

La studio della concentrazione

Sappiamo che nel mondo la popolazione umana si distribuisce in modo vario nei diversi paesi, il reddito di una nazione si distribuisce in modo molto diverso fra la popolazione, il livello di istruzione varia in relazione a fattori ambientali. Può allora essere interessante scoprire in quale percentuale delle terre emerse si concentra ad esempio il 50% della popolazione, oppure in quale percentuale della popolazione di un paese si concentra il 60% del reddito, o ancora in quale percentuale della popolazione di un paese si concentra un livello di studi di tipo universitario. Per pianificare il trasporto pubblico in una città, può essere utile sapere in quali giorni della settimana si concentra la maggior parte degli utenti, mentre conoscere la concentrazione di pollini in un determinato periodo dell'anno è sicuramente utile a tutti coloro che soffrono di allergie per poter prendere provvedimenti al fine di evitare disturbi e fastidi. Uno studio sulla concentrazione può dunque servire a molti scopi.

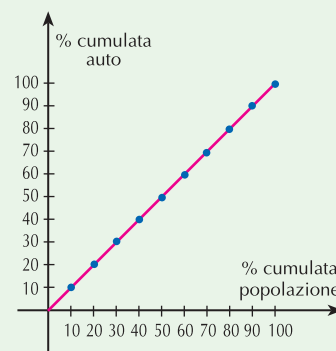
Studiare la **concentrazione** significa stabilire quale percentuale di un certo bene si concentra su una certa percentuale di popolazione.

Cominciamo il nostro studio della concentrazione a partire da un esempio molto semplice. Consideriamo una popolazione di 10 persone, ciascuna delle quali possiede un'automobile; possiamo dire in questo caso che, poiché ogni persona ha lo stesso numero di auto, il bene in questione è **equidistribuito** fra la popolazione. Trattandosi di 10 persone, ognuna possiede il 10% del bene considerato. Allora, il 100% della popolazione possiede il 100% del bene ed esso si distribuisce in modo uniforme per cui 1 persona possiede complessivamente 1 automobile, 2 persone possiedono complessivamente 2 automobili, e così via. Parlando in termini percentuali, il 10% della popolazione possiede il 10% del bene, il 20% ne possiede il 20% e così via.

% popolazione	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
% bene	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Se riportiamo questi dati in un grafico e uniamo i punti ottenuti, il diagramma che ne risulta è quello di una retta che passa per l'origine degli assi e per il punto (100, 100) (**figura 1**), cioè la bisettrice del primo quadrante.

Figura 1

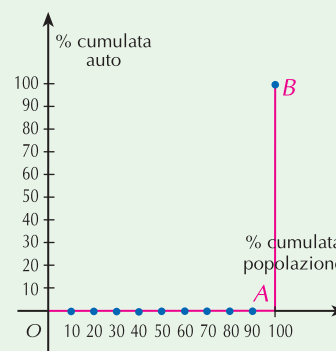


Supponiamo invece che tutte le 10 automobili siano di proprietà di una sola persona e che le altre 9 non ne abbiano; in questo caso il bene si è concentrato su di un unico individuo, vi è cioè la **massima concentrazione** possibile. Anche in questo caso, il 100% del bene è posseduto dalla popolazione, ma questa volta il 90% di essa possiede lo 0% del bene ed il 10% restante possiede il 100% del bene. Se riportiamo in una tabella analoga alla precedente questi dati percentuali progressivi, otteniamo:

% popolazione	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
% bene	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100

Il grafico di questa distribuzione è una spezzata a forma di L rovesciata (**figura 2**).

Figura 2



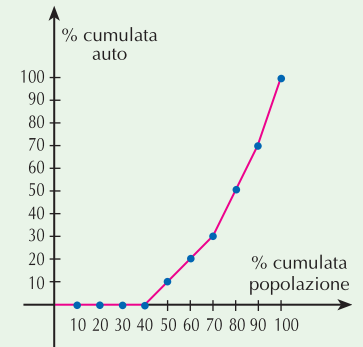
I due casi presentati sono dei "casi limite" perché, in genere, sono le situazioni intermedie che si presentano più frequentemente. Ad esempio, può darsi che vi sia qualche persona che ha un'automobile, qualche persona che non ne ha, qualche persona che ne ha due o tre. Supponiamo che delle 10 persone del nostro esempio, 4 non abbiano automobili, 3 abbiano una sola automobile (ognuno di questi ha il 10% del bene), 2 abbiano 2 automobili ciascuno (ognuno di questi ha il 20% del bene), e 1 abbia 3 automobili (il 30% del bene).

Possiamo riassumere questi dati cumulandoli in una tabella percentuale come quella che segue:

% popolazione	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
% bene	0	0	0	0	10	20	30	50	70	100

Se riportiamo anche questi dati in un grafico, otteniamo una spezzata non decrescente che prende il nome di **spezzata di concentrazione** (o anche **curva di concentrazione**) (figura 3).

Figura 3

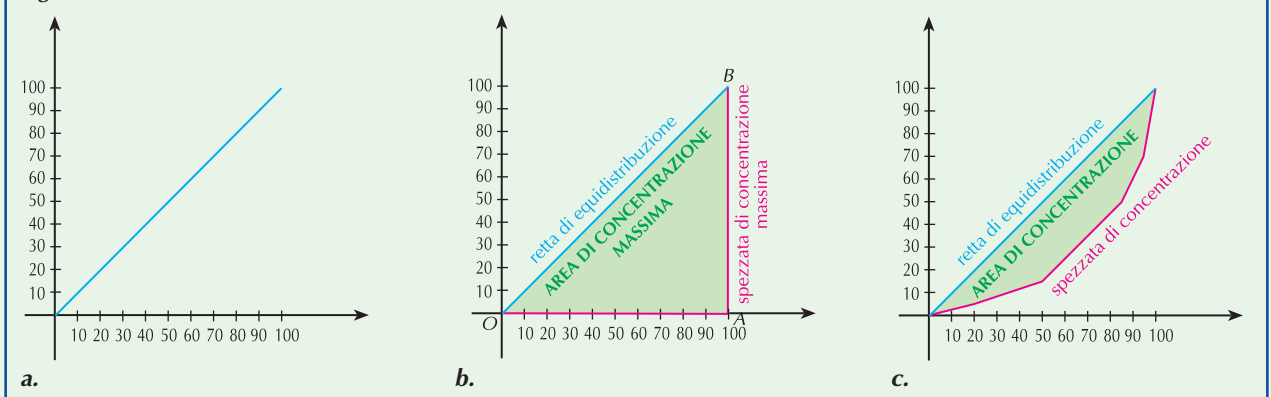


Riassumiamo quello che abbiamo visto attraverso l'esempio.

Data la distribuzione di un certo bene, si parla di:

- **equidistribuzione** se esso si ripartisce in parti uguali fra gli elementi della collettività; il grafico corrispondente è la retta bisettrice del primo quadrante (figura 4a);
- **massima concentrazione** se esso si concentra su un solo individuo della collettività e tutti gli altri o non ne possiedono o ne possiedono quantità talmente basse da poterle considerare nulle; il grafico di massima concentrazione è la spezzata OAB , dove O è l'origine degli assi, A è il punto $(100,0)$, B è il punto $(100,100)$ (figura 4b);
- **concentrazione variabile** se esso si ripartisce in modo non uniforme fra gli elementi della collettività; il grafico è una spezzata che esce dall'origine e termina nel punto $(100,100)$ (figura 4c).

Figura 4



La retta di equidistribuzione e la curva di concentrazione (variabile o massima), per come vengono costruite, passano entrambe per l'origine degli assi e per il punto $(100,100)$. La parte di piano da esse racchiusa prende il nome di **area di concentrazione**.

Nel caso particolare in cui la curva di concentrazione sia quella massima, la parte di piano racchiusa dalla retta di equidistribuzione e dalla curva di concentrazione è un triangolo rettangolo che rappresenta quindi l'**area di concentrazione massima**.

L'area di concentrazione è data quindi dalla differenza fra l'area di concentrazione massima e l'area del poligono racchiuso fra la spezzata di concentrazione e l'asse x nell'intervallo $[0,100]$. Ad esempio, per calcolare l'area di concentrazione R della distribuzione delle automobili del nostro esempio dobbiamo sottrarre dall'area del triangolo OAB quelle dei poligoni T_1, T_2, T_3 (figura 5):

- area di OAB : $\frac{100 \cdot 100}{2} = 5000$
- area triangolo T_1 : $\frac{30 \cdot 30}{2} = 450$
- area trapezio T_2 : $\frac{(30 + 70) \cdot 20}{2} = 1000$
- area trapezio T_3 : $\frac{(100 + 70) \cdot 10}{2} = 850$

L'area di concentrazione è $R = 5000 - (450 + 1000 + 850) = 2700$

Osserviamo che, poiché consideriamo i valori percentuali della distribuzione, l'area del triangolo OAB di concentrazione massima è sempre uguale a 5000; allora, più l'area di concentrazione è grande e si avvicina a 5000, più la distribuzione del bene si concentra su una percentuale bassa della popolazione (figura 6a), più l'area di concentrazione è piccola e si avvicina a 0, più la distribuzione del bene tende ad essere equidistribuita (figura 6b).

Di solito, anziché analizzare l'area di concentrazione, il cui valore è espresso in una certa unità di misura, si preferisce analizzare il rapporto fra l'area di concentrazione e l'area di concentrazione massima, che diventa così un coefficiente adimensionale e quindi facilita i confronti; tale rapporto si indica con c e prende il nome di **rapporto di concentrazione**; si pone cioè

$$c = \frac{\text{area di concentrazione}}{\text{area di concentrazione massima}}$$

- Se si ha equidistribuzione l'area di concentrazione vale zero e quindi si ha che $c = 0$;
- se si ha concentrazione massima le due aree sono uguali e quindi $c = 1$.
- In tutti gli altri casi si ha che $0 < c < 1$ e si può dire che, più c assume valori vicini a 0, più il bene tende ad essere equiripartito fra la popolazione, più c si avvicina a 1, più il bene tende a concentrarsi su una parte della popolazione.

Nel caso del nostro esempio il rapporto di concentrazione è dato da $c = \frac{2700}{5000} = 0,54$.

Figura 5

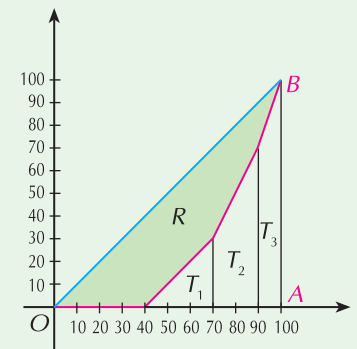
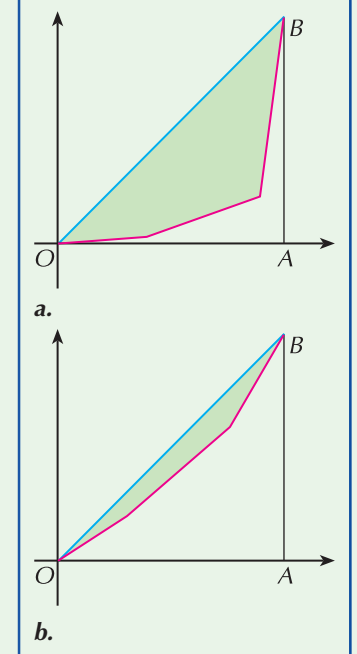


Figura 6



1 ESERCIZIO GUIDATO

Consideriamo la tabella relativa al capitale nominale complessivo di un gruppo di 1130 società:

società	capitale nominale complessivo (in migliaia euro)
320	1120
300	1320
240	1750
180	1800
90	2080
$\Sigma = 1130$	$\Sigma = 8070$

Dopo aver disegnato la curva di concentrazione, calcoliamo il rapporto di concentrazione.

Prima di tutto calcoliamo le percentuali relative e le percentuali cumulate che possiamo riassumere nella seguente tabella:

società %	cap. nom. complessivo %	società cumulate %	cap. nom. complessivo cumulado %
28,32	13,879	28,32	13,879
26,55	16,357	54,87	30,236
21,24	21,685	76,11	51,921
15,93	22,305	92,04	74,226
7,96	25,774	100	100

Il grafico della curva di concentrazione è quindi quello nella figura a fianco.

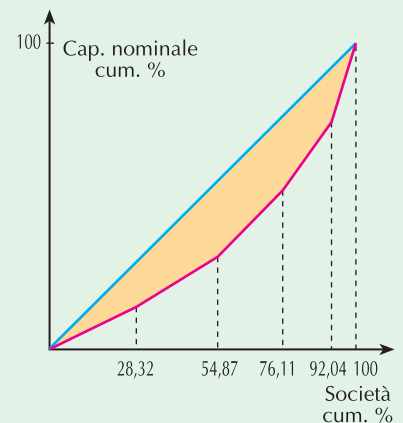
Calcoliamo l'area di concentrazione.

- L'area di massima concentrazione è 5000.
- Calcoliamo l'area del poligono delimitato dalla curva di concentrazione:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{28,32 \cdot 13,879}{2} + \frac{(13,879 + 30,235) \cdot 26,55}{2} + \\
 &+ \frac{(30,235 + 51,921) \cdot 21,24}{2} + \frac{(51,921 + 74,226) \cdot 15,93}{2} + \\
 &+ \frac{(100 + 74,226) \cdot 7,96}{2} = 3353,072
 \end{aligned}$$

- L'area di concentrazione è quindi: $5000 - 3353,072 = 1646,928$

Il rapporto di concentrazione è quindi $c = \frac{1646,928}{5000} = 0,329$



2 Calcola il rapporto di concentrazione della seguente tabella di dati:

classi	[0-15)	[15-30)	[30-45)	[45-60)	[60-75)	[75-90)	[90-105]
frequenze	220	250	300	310	360	430	560

[0,274]

3 Considera la seguente tabella relativa al guadagno, in euro, che una piccola impresa ha dalla vendita di alcuni suoi prodotti:

n° vendite	20	35	45	30	18
guadagno	400	585	685	460	160

Calcola il rapporto di concentrazione e commenta adeguatamente il risultato.

[0,021]

4 Da una indagine svolta su un gruppo di studenti di una classe è risultato che ognuno di essi possiede il numero di calcolatrici indicato nella seguente tabella:

studente	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
n° calcolatrici	1	2	0	1	1	2	1	1	0	1

Disegna l'area di concentrazione e calcolane la misura; determina poi il rapporto di concentrazione.

[1600; 0,32]

5 Data la seguente distribuzione:

valori	3	5	7	8	9	11	13	15	12	17
frequenze %	3,57	5,36	8,93	7,14	17,86	21,43	14,28	7,14	8,93	5,36

Rappresenta l'area di concentrazione, calcolane l'area e determina il rapporto di concentrazione.

[862,207; 0,17]

6 Data la seguente distribuzione per classi, determina il rapporto di concentrazione:

classi	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)	[40-50)	[50-60)	[60-70)	[70-80)	[80-90]
frequenze	5	8	12	15	30	18	15	10	6

[0,2416]

7 In una clinica sono nati in tre mesi 288 neonati i cui pesi alla nascita hanno dato luogo alla seguente distribuzione:

classi (in kg)	[1,5-2)	[2-2,5)	[2,5-3)	[3-3,5)	[3,5-4)	[4-4,5)	[4,5-5]
frequenze	2	14	59	139	53	19	2

Calcola il rapporto di concentrazione e commenta il risultato ottenuto.

[0,0794]

8 I dati relativi alla frequenza di visitatori di una mostra di arte contemporanea sono stati raggruppati a seconda della fascia oraria ed hanno dato origine alla seguente tabella:

fascia oraria	[10-12)	[12-14)	[14-16)	[16-18)	[18-20)	[20-22]
frequenze	120	100	20	25	150	30

Calcola il rapporto di concentrazione e commenta il risultato ottenuto.

[0,13]