



1. I TRIANGOLI RETTANGOLI CON EXCEL

Con riferimento alla **figura 1**, i casi che si possono presentare sono i seguenti.

- Conosciamo la misura dell'ipotenusa e quella di un angolo acuto, cioè conosciamo a e β . Ricaviamo che

$$\gamma = 90^\circ - \beta \qquad b = a \sin \beta \qquad c = a \cos \beta$$

- Conosciamo la misura dell'ipotenusa e quella di un cateto, cioè conosciamo a e b . Ricaviamo che

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad \sin \beta = \frac{b}{a} \qquad \gamma = 90^\circ - \beta$$

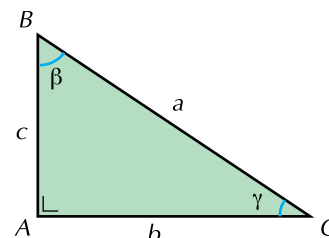
- Conosciamo la misura dei cateti, cioè conosciamo b e c . Ricaviamo che

$$a = \sqrt{c^2 + b^2} \qquad \tan \beta = \frac{b}{c} \qquad \gamma = 90^\circ - \beta$$

- Conosciamo la misura di un cateto e quella di un angolo acuto, cioè conosciamo b e γ . Ricaviamo che

$$\beta = 90^\circ - \gamma \qquad c = b \tan \gamma \qquad a = \frac{b}{\cos \gamma}$$

Figura 1



Apriamo allora un foglio di lavoro e impostiamo il calcolo inserendo stringhe, dati e formule nelle celle specificate, come è indicato di seguito.

Nella preparazione del foglio, di cui puoi vedere un esempio in figura, abbiamo tenuto conto del fatto che le funzioni goniometriche di **Excel**, come abbiamo già visto nell'esercitazione dell'unità precedente, usano angoli la cui misura è espressa in radianti mentre noi prevediamo di assegnare le misure degli angoli in gradi (abbreviato nel foglio di esempio in "gr"); quando uno dei valori noti è un angolo, è quindi prevista una cella in cui calcolare il corrispondente valore dell'angolo in radianti (abbreviato nel foglio di esempio in "rad").

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	RISOLUZIONE TRIANGOLI RETTANGOLI								
2									
3	1° CASO - ipotenusa e angolo acuto: a, beta					RISULTATI			
4	a	beta (gr)	beta (rad)			gamma (gr)	b	c	
5	10	27,5	0,4799655			62,5	4,6174861	8,870108	
6									
7	2° CASO - ipotenusa e cateto: a, b					RISULTATI			
8	a	b				beta (gr)	gamma (gr)	c	
9	15	12				53,130102	36,869898	9	
10									
11	3° CASO - i due cateti: b, c					RISULTATI			
12	b	c				beta (gr)	gamma (gr)	a	
13	7	9				37, 874984	52,125016	11,40175	
14									
15	4° CASO - cateto e angolo acuto: b, gamma					RISULTATI			
16	b	gamma (gr)	gamma (rad)			beta (gr)	c	a	
17	18	36,57	0,6382669			53,43	13,353362	22,41232	
18									
19									

La funzione di Excel che esegue la conversione da gradi a radianti è la funzione **RADIANTI**(angolo), quella che esegue la conversione da radianti a gradi è la funzione **GRADI**(angolo).

Le funzioni di Excel che consentono di ricavare l'ampiezza di un angolo nota una delle sue funzioni goniometriche sono:

- ARCSEN(x) ■ ARCCOS(x) ■ ARCTAN(x)

dove x è il valore della funzione goniometrica. Per esempio ARCSEN(1/2) restituisce l'angolo il cui seno vale $\frac{1}{2}$.

Relativamente al primo caso, abbiamo posto in A5 la misura dell'ipotenusa a (10) e in B5 la misura in gradi nella forma decimale dell'angolo β (27,5). Le formule da inserire sono poi le seguenti:

C5	= RADIANTI(B5)	(formula per trasformare la misura di β in radianti)
F5	= 90 - B5	(formula per il calcolo di γ in gradi)
G5	= A5 * SEN (C5)	(formula per il calcolo di b)
H5	= A5 * COS (C5)	(formula per il calcolo di c)

Prosegui impostando gli altri casi come è illustrato nell'esempio; ti indichiamo solamente le formule da inserire nelle celle specificate lasciando a te il compito di inserire le stringhe.

F9	= GRADI(ARCSEN(B9/A9))	(calcolo di β in gradi)
G9	= 90 - F9	(calcolo di γ in gradi)
H9	= RADQ(A9 * A9 - B9 * B9)	(calcolo di c)

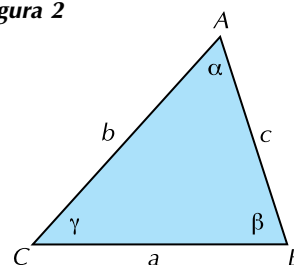
F13	= GRADI(ARCTAN(A13/B13))	(calcolo di β in gradi)
G13	= 90 - F13	(calcolo di γ in gradi)
H13	= RADQ(A13 * A13 + B13 * B13)	(calcolo di a)

C17	= RADIANTI(B17)	(conversione in radianti della misura di γ)
F17	= 90 - B17	(calcolo di β in gradi)
G17	= A17 * TAN(C17)	(calcolo di c)
H17	= A17 / COS(C17)	(calcolo di a)

2. I TRIANGOLI QUALUNQUE CON EXCEL

Con riferimento alla **figura 2**, i casi che si possono presentare nella risoluzione di un triangolo qualsiasi sono i seguenti.

Figura 2



- Conosciamo la misura di due angoli e quella di un lato, ad esempio α , γ e b . Ricaviamo che

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \qquad a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} \qquad c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$$

- Conosciamo la misura di due lati e quella dell'angolo compreso, ad esempio a , c e β . Usiamo il teorema di Carnot:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta} \qquad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

- Conosciamo la misura dei tre lati, cioè conosciamo a , b e c . Usando il teorema di Carnot ricaviamo che:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

- Conosciamo la misura di due lati e dell'angolo opposto ad uno di essi, ad esempio a , b e α . Ricaviamo che:

- se $a \geq b$ esiste un solo triangolo (**figura 3a**. di pagina seguente) ed è:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \quad \text{cioè} \quad \beta = \arcsin\left(\frac{b \sin \alpha}{a}\right); \quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \qquad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

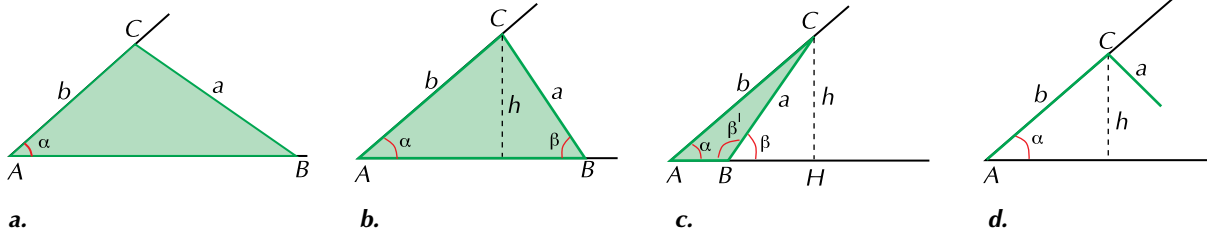
■ se $b \sin \alpha \leq a < b$ esistono due triangoli (**figura 3b. e c.**)

• il primo si risolve con le stesse modalità del caso precedente

• per il secondo $\beta' = 180^\circ - \beta$ $\gamma' = 180^\circ - (\alpha + \beta')$ $c = \frac{a \sin \gamma'}{\sin \alpha}$

■ se $a < b \sin \alpha$ il problema non ammette soluzione (**figura 3d.**).

Figura 3



Impostiamo il foglio di lavoro in questo modo (osserva la figura per inserire le stringhe, i dati e convertire gli angoli, noi ti indichiamo solamente le formule di calcolo degli elementi del triangolo)

1° CASO

$$\begin{aligned} G5 &= 180 - B5 - C5 \\ H5 &= A5 * \text{SEN}(D5) / \text{SEN}(\text{RADIANTI}(G5)) \\ I5 &= A5 * \text{SEN}(E5) / \text{SEN}(\text{RADIANTI}(G5)) \end{aligned}$$

2° CASO

$$\begin{aligned} G9 &= \text{RADQ}(A9 * A9 + B9 * B9 - 2 * A9 * B9 * \text{COS}(D9)) \\ H9 &= \text{GRADI}(\text{ARCCOS}((G9 * G9 + B9 * B9 - A9 * A9) / (2 * G9 * B9))) \\ I9 &= 180 - C9 - H9 \end{aligned}$$

3° CASO

$$\begin{aligned} G13 &= \text{GRADI}(\text{ARCCOS}((B13 * B13 + C13 * C13 - A13 * A13) / (2 * B13 * C13))) \\ H13 &= \text{GRADI}(\text{ARCCOS}((A13 * A13 + C13 * C13 - B13 * B13) / (2 * A13 * C13))) \\ I13 &= 180 - G13 - H13 \end{aligned}$$

4° CASO

Questo è il caso più complesso perché, a seconda delle misure assegnate, dobbiamo prevedere di risolvere un solo triangolo, due triangoli o nessun triangolo.

Formule per il caso di un solo triangolo (caso $a \geq b$):

$$\begin{aligned} G17 &= \text{SE}(A17 \geq B17; \text{GRADI}(\text{ARCSIN}((B17 * \text{SEN}(D17)) / A17))) \\ H17 &= \text{SE}(A17 \geq B17; 180 - G17 - C17) \\ I17 &= \text{SE}(A17 \geq B17; (A17 * \text{SEN}(\text{RADIANTI}(H17))) / \text{SEN}(D17)) \end{aligned}$$

Formule per il caso di due triangoli (caso $b \sin \alpha \leq a < b$):

$$\begin{aligned} G19 &= \text{SE}(E(A17 < B17; A17 \geq B17 * \text{SEN}(D17)); \text{GRADI}(\text{ARCSIN}((B17 * \text{SEN}(D17)) / A17))) \\ H19 &= \text{SE}(E(A17 < B17; A17 \geq B17 * \text{SEN}(D17)); 180 - G19 - C17) \\ I19 &= \text{SE}(E(A17 < B17; A17 \geq B17 * \text{SEN}(D17)); (A17 * \text{SEN}(\text{RADIANTI}(H19))) / \text{SEN}(D17)) \\ G20 &= \text{SE}(G19; 180 - G19) \\ H20 &= \text{SE}(G19; 180 - C17 - G20) \\ I20 &= \text{SE}(G19; A17 * \text{SEN}(\text{RADIANTI}(H20))) / \text{SEN}(D17) \end{aligned}$$

Formule per il caso di nessun triangolo:

$$G22 = \text{SE}(A17 < B17 * \text{SEN}(D17); \text{VERO}())$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	RISOLUZIONE TRIANGOLI QUALSIASI								
2									
3	1° CASO - due angoli e un lato: alfa, gamma, b							RISULTATI	
4	b	alfa (gr)	gamma (gr)	alfa (rad)	gamma (rad)		beta (gr)	a	c
5	15	32,25	50,65	0,562869	0,8840093		97,1	8,066069	11,68894
6									
7	2° CASO - due lati e l'angolo compreso: a, c, beta							RISULTATI	
8	a	c	beta (gr)	beta (rad)			b	alfa (gr)	gamma (gr)
9	153	75	15,22056	0,265649			83,00019	151,0563	13,72313
10									
11	3° CASO - tre lati: a, b, c							RISULTATI	
12	a	b	c				alfa (gr)	beta (gr)	gamma (gr)
13	175	286	197				37,01136	100,3284	42,66027
14									
15	4° CASO - due lati e l'angolo opposto ad uno di essi: a, b, alfa							RISULTATI	
16	a	b	alfa (gr)	alfa (rad)			beta (gr)	gamma (gr)	c
17	98	112	55	0,959931		1 triangolo	FALSO	FALSO	FALSO
18									
19						2 triangoli	69,41861	55,58139	98,69125
20							110,5814	14,41861	29,78988
21									
22						nes. triang.	FALSO		

3. LA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI: UN CASO PARTICOLARE CON GEOGEBRA

Verifichiamo che se di un triangolo sono assegnate le misure di due lati a e b e dell'angolo opposto ad uno di essi, per esempio l'angolo α opposto al lato a , si possono presentare tre possibilità a seconda della misura di a .

Eliminando dalla finestra grafica gli assi cartesiani, disegniamo dunque un angolo α e fissiamo su uno dei suoi lati un punto C in modo che sia $\overline{AC} = b$.

Seguiamo adesso questa procedura.

- costruiamo uno slider che rappresenti la misura del segmento a assumendo zero come estremo sinistro e un valore superiore alla lunghezza di b come estremo superiore del range di valori (nella nostra simulazione, essendo $b = 5$, abbiamo posto uguale a 7 l'estremo destro)
- Disegniamo la circonferenza di centro C e raggio uguale ad a usando lo strumento 6 - *Circonferenza dati centro e raggio* indicando a come misura del raggio.
- Con lo strumento 2 - *Intersezione di due oggetti* troviamo i punti d'intersezione della circonferenza con la semiretta r (il lato dell'angolo che non contiene il punto C).

Agiamo adesso sullo slider e facciamo variare la lunghezza del segmento a ; ci accorgiamo che fino ad un certo valore non esistono intersezioni tra la circonferenza e la semiretta r , poi ne ce sono due e infine ne troviamo una sola.

Cerchiamo di capire a che cosa corrispondono queste situazioni.

Tracciamo da C la retta perpendicolare a r e indichiamo con H il suo punto d'intersezione con r ; definiamo quindi il segmento CH (nella figura è evidenziato in blu) e nascondiamo la perpendicolare.

La misura di CH viene calcolata automaticamente da GeoGebra e corrisponde al valore $b \sin \alpha$; puoi controllare applicando il primo teorema dei triangoli rettangoli al triangolo CAH .

Questo è il valore del raggio al di sotto del quale la circonferenza non interseca la retta r e non può quindi definire alcun triangolo.

Oltre questo valore troviamo inizialmente due punti di intersezione e dobbiamo concludere che esistono due triangoli. Quando il raggio diventa più lungo del lato b , vi è un solo punto d'intersezione con la semiretta r e dunque vi è un solo triangolo.

Per costruirli dobbiamo usare lo strumento 5- *Poligono* e indicare i tre vertici del primo triangolo (nella figura ACE) tornando sul primo punto per chiuderlo e poi i vertici del secondo (ACD).

Per evidenziarli in modo che si possano distinguere, dal menu contestuale, abbiamo poi usato due tipi differenti di tratteggio che si possono scegliere dalla scheda *Stile*.

