Modelli di secondo grado

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le equazioni di secondo grado incomplete. Un'equazione di secondo grado si può sempre scrivere nella sua *forma normale* $ax^2 + bx + c = 0$ dove a, b, c sono numeri reali con $a \neq 0$ altrimenti l'equazione diventa lineare. Se uno dei coefficienti b o c è nullo, l'equazione si dice **incompleta**.

- Se l'equazione ha la forma $ax^2 + bx = 0$, cioè manca il termine noto, basta raccogliere x a fattor comune ed applicare la legge di annullamento del prodotto.
  Per esempio:
  - $6x^2 + 5x = 0 \qquad x(6x+5) = 0 \qquad x = 0 \ \vee \ x = -\dfrac{5}{6}$
  - $4x^2 - 9x = 0 \qquad x(4x-9) = 0 \qquad x = 0 \ \vee \ x = \dfrac{9}{4}$

- Se l'equazione ha la forma $ax^2 + c = 0$, cioè manca il termine in x, si isola x^2 e si ottiene:

$$ax^2 = -c \quad \rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a}$$

  Ponendo $-\dfrac{c}{a} = k$, si tratta di risolvere l'equazione $x^2 = k$:
  - se $k > 0$ le soluzioni sono le seguenti: $x = \pm\sqrt{k}$
  - se $k < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali

  Per esempio:
  - $4x^2 - 9 = 0 \qquad x^2 = \dfrac{9}{4} \qquad x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \pm\dfrac{3}{2}$
  - $5x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = -\dfrac{1}{5} \qquad$ l'equazione non ha soluzioni reali

- Se l'equazione ha la forma $ax^2 = 0$, cioè mancano sia il termine in x che il termine noto, basta dividere entrambi i membri per il coefficiente a e applicare la legge di annullamento del prodotto. Tale equazione ammette sempre due soluzioni entrambe nulle.
  Per esempio:
  - $5x^2 = 0 \qquad x^2 = 0 \qquad x \cdot x = 0 \qquad x = 0 \ \vee \ x = 0$

Risolvi le seguenti equazioni incomplete.

2 **a.** $4x^2 - 25 = 0$ **b.** $5x^2 + x = 0$

3 **a.** $-3x^2 + 2x = 0$ **b.** $36x^2 + 1 = 0$

4 **a.** $4x - \dfrac{3}{4}x^2 = 0$ **b.** $\dfrac{1}{16}x^2 + 9 = 0$

5 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le equazioni di secondo grado complete. Quando l'equazione è completa, cioè è del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ con tutti i coefficienti diversi da zero, le soluzioni si ottengono applicando la seguente formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

in cui l'espressione $b^2 - 4ac$ si chiama **discriminante** e si indica con il simbolo Δ.
Per esempio:

- nell'equazione $3x^2 - 5x - 2 = 0$ è $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$, quindi le soluzioni sono

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \\ 2 \end{cases}$$

- nell'equazione $2x^2 + x - 3 = 0$ è $a = 2$, $b = 1$, $c = -3$, quindi le soluzioni sono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Le soluzioni di un'equazione di secondo grado dipendono dal valore del discriminante; in particolare:

- se $\Delta > 0$, le soluzioni dell'equazione sono numeri reali e distinti
- se $\Delta = 0$, le soluzioni sono numeri reali coincidenti
- se $\Delta < 0$, le soluzioni non sono numeri reali.

Risolvi in R le seguenti equazioni.

6 **a.** $2x^2 + 3x - 5 = 0$ **b.** $4x^2 - 4x - 3 = 0$

7 **a.** $x^2 + 3x + 8 = 0$ **b.** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

8 $\dfrac{2x^2 + 1 - 3x}{7} = \dfrac{2x - 1}{2} - \dfrac{6}{7}$

9 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\dfrac{1}{x - 1} + 5 = \dfrac{3}{x + 1}$

L'equazione è frazionaria, deve quindi essere $x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1$; si ha allora che

$$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Liberando l'equazione dai denominatori e svolgendo i calcoli trovi l'equazione

$$5x^2 - 2x - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono ....

Poiché tali soluzioni appartengono al dominio, $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Risolvi in R le seguenti equazioni frazionarie.

10 $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{3-5x}{x^2-3x+2}$

(Attenzione: delle soluzioni trovate una non appartiene al dominio, quindi ....)

11 $\dfrac{x-2}{2x+3}-\dfrac{7}{4x^2-9}=\dfrac{1}{3-2x}$

12 $\dfrac{5x}{x^2+6x+9}=\dfrac{6}{x^2+4x+3}-\dfrac{1}{x+3}$

13 **ESERCIZIO SVOLTO**

Se il coefficiente b dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ è pari, per determinare le soluzioni conviene usare la **formula ridotta**:

$$x=\frac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

Per esempio, nell'equazione $3x^2+8x+4=0$ è $b=8$, quindi $\dfrac{b}{2}=4$; applicando la formula ridotta otteniamo:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-3\cdot 4}}{3}=\frac{-4\pm 2}{3}=\begin{cases}-2\\ -\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

14 Risolvi in R le seguenti equazioni applicando la formula ridotta:

a. $x^2+6x-7=0$ **b.** $x^2+2x-1=0$

15 **ESERCIZIO SVOLTO**

I legami fra coefficienti e soluzioni. Ricordiamo che fra le soluzioni x_1 e x_2 di un'equazione di secondo grado ed i coefficienti a, b, c sussistono le seguenti relazioni:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Per esempio, data l'equazione $12x^2-8x+1=0$ si ha che:

$$x_1+x_2=-\frac{-8}{12}=\frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{1}{12}$$

Posto $s=x_1+x_2$ e $p=x_1\cdot x_2$, l'equazione può essere scritta nella forma $x^2-sx+p=0$.

Queste relazioni ci permettono di:

- determinare rapidamente in alcuni casi le soluzioni di un'equazione senza applicare la formula risolutiva.

  Per esempio, dell'equazione $x^2-2x-8=0$ sappiamo che $x_1+x_2=2$ e $x_1\cdot x_2=-8$; quindi i due numeri il cui prodotto è -8 e la cui somma è 2 sono $+4$ e -2.
  Quindi $S=\{-2, 4\}$.

- individuare due numeri conoscendo la loro somma s ed il loro prodotto p.

  Per esempio, se $s=\dfrac{2}{3}$ e $p=-\dfrac{5}{3}$ per trovare i due numeri possiamo risolvere l'equazione $x^2-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}=0$, ricaviamo così che i due numeri sono -1 e $\dfrac{5}{3}$.

- scrivere l'equazione che ha come soluzioni due numeri assegnati.

  Per esempio, l'equazione che ha come soluzioni $x_1 = -3$ e $x_2 = 7$, tenendo presente che

$$x_1 + x_2 = -3 + 7 = 4 \qquad x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 7 = -21$$

  è $x^2 - 4x - 21 = 0$.

- scomporre in fattori un trinomio di secondo grado; vale infatti la relazione

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  essendo x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

  Per esempio, scomponiamo il trinomio $2x^2 + 5x - 3$:

  - risolviamo l'equazione $2x^2 + 5x - 3 = 0$ $\qquad x = \dfrac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} -3 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$
  - applichiamo la formula tenendo presente che è $a = 2$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = (2x - 1)(x + 3)$$

16 Senza applicare la formula risolutiva, trova le soluzioni delle equazioni:

a. $x^2 - 2x - 63 = 0$ **b.** $x^2 - 12x + 35 = 0$

17 Determina due numeri sapendo che:

a. la somma è 6 e il prodotto è -16
b. la somma è -2 e il prodotto è -8
c. la somma è 2 e il prodotto è -1

18 Scrivi l'equazione che ha come soluzione i numeri:

a. $-\dfrac{3}{2}$ e -5 **b.** $\dfrac{1}{4}$ e 2 **c.** $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{2}{3}$ **d.** $\dfrac{4}{3}$ e $-\dfrac{5}{2}$

19 Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado:

a. $3x^2 - 2x - 5$ **b.** $-15x^2 + 13x - 2$ **c.** $5x^2 - 9x - 2$ **d.** $6x^2 + 13x + 6$

20 **ESERCIZIO GUIDATO**

Nell'equazione parametrica $x^2 - (k + 3)x - k + 5 = 0$, vogliamo determinare il valore del parametro k in modo che le radici siano reali e che:

a. una soluzione sia nulla **b.** le radici siano coincidenti
c. una delle radici sia l'opposto dell'altra **d.** una radice sia l'inverso dell'altra.

a. Sostituisci 0 nell'equazione al posto di x; ottieni che deve essere $k =$ ....

b. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono coincidenti se il discriminante vale zero, quindi ....

c. Se $x_1 = -x_2$, allora $x_1 + x_2 = 0$; applicando la relazione sulla somma delle soluzioni trovi l'equazione ...., da cui ricavi che ....

d. Se $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$, allora $x_1 \cdot x_2 = 1$; applicando la relazione sul prodotto delle soluzioni trovi che ....

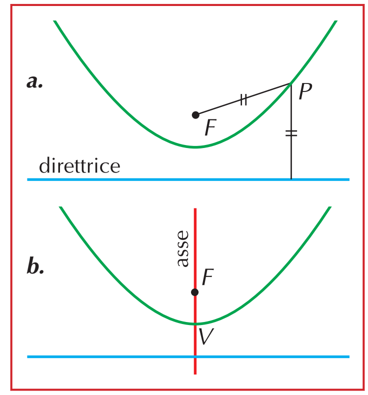
21 Nell'equazione parametrica $2x^2 - kx + k - 2 = 0$, determina il parametro in modo che le radici siano reali e che:

a. $x_1 = 2$ **b.** $x_1 + x_2 = 1$ **c.** $x_1 \cdot x_2 = -1$

22
ESERCIZIO SVOLTO

La parabola: equazione e grafico. La parabola è il luogo dei punti che hanno uguale distanza da un punto fisso F detto **fuoco** e da una retta fissa d detta **direttrice**; la rappresentazione grafica di questo luogo è in ***figura a***. Le caratteristiche geometriche di una parabola sono riassunte nelle seguenti considerazioni (***figura b.***) :

- è una curva simmetrica rispetto alla retta che passa per il fuoco ed è perpendicolare alla direttrice; tale retta si dice **asse** della parabola
- il punto V di intersezione dell'asse con la parabola si chiama **vertice**.



In un sistema di riferimento cartesiano che ha l'asse x parallelo alla direttrice e l'asse y parallelo all'asse di simmetria, l'equazione di una parabola ha la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, le coordinate del vertice della parabola e l'equazione dell'asse di simmetria si trovano con le formule:

$$\text{vertice: } V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad \text{asse: } x = -\frac{b}{2a}$$

L'ordinata del vertice, che è un punto della parabola, si può anche trovare sostituendo nella sua equazione il valore calcolato dell'ascissa.
Per esempio, data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 1$ nella quale $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$ si ha che:

- $x_V = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1 \qquad y_V = -\dfrac{4 + 4 \cdot 1}{4 \cdot 1} = -2 \qquad \rightarrow \qquad V(1, -2)$
- equazione dell'asse $\quad x = 1$

Per calcolare l'ordinata del vertice, una volta trovata la sua ascissa, si può anche procedere per sostituzione: $y_V = 1 - 2 \cdot 1 - 1 = -2$.

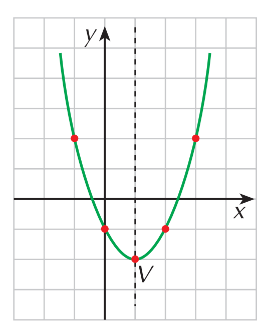
Si può inoltre dire che se $a > 0$ la parabola è concava verso l'alto, se $a < 0$ è concava verso il basso.

Per tracciare il grafico di una parabola si devono sempre determinare le coordinate del vertice e quelle di qualche altro punto a nostra scelta. Nella ricerca di questi punti occorre tenere presente che l'asse di simmetria della parabola è parallelo all'asse y e passa per il vertice, quindi altri punti, oltre a quelli calcolati, si possono trovare per simmetria. Spesso poi è conveniente attribuire il valore 0 alla x trovando in questo modo il punto di intersezione con l'asse y.

Per esempio, la precedente parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 1$

passa per i punti individuati nella seguente tabella e per i loro simmetrici rispetto all'asse della parabola ed il suo grafico è nella ***figura a lato***:

x	0	−1
y	−1	2



Trova le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse delle seguenti parabole e costruiscine poi il grafico.

23 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 1$

24 $y = x^2 + 4x$

25 $y = x^2 + 3x$

26 $y = -x^2 + x - 2$

27 $y = 2x^2 + 1$

28 $y = -\dfrac{3}{2}x^2 - 3x + 1$

29 **ESERCIZIO SVOLTO**

Gli zeri di una parabola. Considerando una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, si chiamano **zeri della parabola** le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$; dal punto di vista grafico questi valori corrispondono alle ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse x.

Per esempio, gli zeri della parabola di equazione $y = 6x^2 + x - 2$ sono le soluzioni dell'equazione $6x^2 + x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Trova gli zeri delle seguenti funzioni.

30 $y = 8x^2 + 20x - 12$

31 $y = 9x^2 + 9x - 4$

32 $y = -x^2 + 8x - 15$

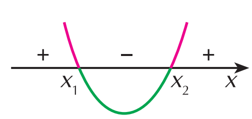
33 $y = \dfrac{1}{3}x^2 + 7x$

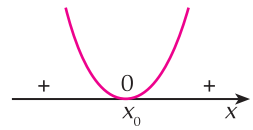
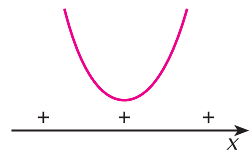
34 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le disequazioni di secondo grado intere. Ricordiamo i passi da eseguire per risolvere una disequazione di secondo grado intera:

- svolgere i calcoli fino ad arrivare ad avere una disequazione della forma $ax^2 + bx + c > 0$ (oppure $ax^2 + bx + c < 0$) in cui si può sempre supporre che sia $a > 0$ (in caso contrario basta cambiare segni e verso della disequazione)
- risolvere l'equazione di secondo grado associata $ax^2 + bx + c = 0$
- rappresentare la parabola associata $y = ax^2 + bx + c$
- scegliere l'intervallo delle soluzioni.

Nel risolvere l'equazione di secondo grado associata si possono presentare tre casi a seconda del valore del discriminante: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.

	numero soluzioni dell'equazione	**rappresentazione della parabola**	**segno del valore di y della parabola**
$\Delta > 0$	2 soluzioni reali distinte		• il trinomio $ax^2 + bx + c$ è positivo per $x < x_1 \vee x > x_2$ • il trinomio $ax^2 + bx + c$ è negativo per $x_1 < x < x_2$ • il trinomio $ax^2 + bx + c$ si annulla per $x = x_1 \vee x = x_2$

	numero soluzioni dell'equazione	rappresentazione della parabola	segno del valore di y della parabola
$\Delta = 0$	1 soluzione reale		• il trinomio $ax^2 + bx + c$ è positivo per tutti i valori di x tranne per $x = x_0$ • il trinomio $ax^2 + bx + c$ non è mai negativo • il trinomio $ax^2 + bx + c$ si annulla per $x = x_0$
$\Delta < 0$	0 soluzioni reali		• il trinomio $ax^2 + bx + c$ è positivo per tutti i valori di x • il trinomio $ax^2 + bx + c$ non è mai negativo • il trinomio $ax^2 + bx + c$ non si annulla mai

Se la disequazione ha verso maggiore di zero, la soluzione è data da quei valori di x che rendono il trinomio $ax^2 + bx + c$ positivo; se il verso è minore di zero, la soluzione è data da quei valori di x che rendono il trinomio $ax^2 + bx + c$ negativo.

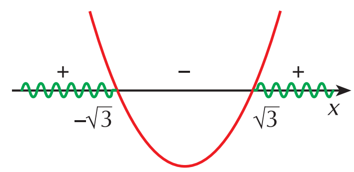
Per esempio risolviamo le seguenti disequazioni:

- $x^2 - 3 > 0$

  risolviamo l'equazione $x^2 - 3 = 0$: $\quad x = -\sqrt{3} \lor x = \sqrt{3}$

  disegniamo la parabola corrispondente (*figura a lato*)

  l'insieme delle soluzioni è $x < -\sqrt{3} \lor x > \sqrt{3}$



- $(2 - 3x)(2 + 3x) > -6x$

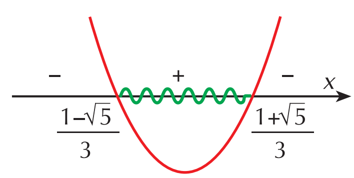
  svolgiamo i calcoli $-9x^2 + 6x + 4 > 0 \quad \rightarrow \quad 9x^2 - 6x - 4 < 0$

  risolviamo l'equazione $9x^2 - 6x - 4 = 0$

  $$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{9} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{9} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{3}$$

  disegniamo la parabola corrispondente (*figura a lato*)

  l'insieme delle soluzioni è $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{3} < x < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{3}$



Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

35 $x^2 - x - 2 > 0$

36 $4x^2 - 4x + 1 < 0$

37 $3x^2 - 2x + 5 > 0$

38 $(3x - 1)(3x + 1) < 15$

39 $\dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{x^2 + 3}{3} \geq \dfrac{x^2 - 3}{6}$

40 $(x - 1)^2 < (2x + 1)(x + 1)$

41 $x\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - 3x - 1 > -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$

42 $4x^2 - \dfrac{5x + 1}{2} > \dfrac{5(x - 1)}{3}$

43 $\dfrac{1+2x}{2} - \dfrac{3x+8}{3} < \dfrac{x(x+1)-5}{2} + \dfrac{1}{3}$

44 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le disequazioni frazionarie. Ogni disequazione frazionaria si può scrivere nella forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ (oppure $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$) e bisogna ricordare che **i denominatori non si possono eliminare** a meno di sapere a priori se sono positivi o negativi.

Conviene poi procedere così:

- studiare il segno di ogni fattore che si trova al numeratore e di ogni fattore che si trova al denominatore
- costruire la tabella dei segni
- determinare il segno della frazione in ciascun intervallo
- scegliere gli intervalli delle soluzioni.

Risolviamo per esempio la disequazione: $\dfrac{x^2-36}{x^2-4x-21} > 0$

Studiamo il segno del numeratore andando a vedere quando è positivo:

$$x^2 - 36 > 0 \qquad \text{se} \qquad x < -6 \ \vee \ x > 6$$

Studiamo in modo analogo il segno del denominatore:

$$x^2 - 4x - 21 > 0 \qquad x = 2 \pm \sqrt{4+21} = 2 \pm 5 = \begin{cases} -3 \\ 7 \end{cases} \qquad x < -3 \quad \vee \quad x > 7$$

Costruiamo la tabella dei segni:

		−6		−3		6		7		R
x^2-36	+	○	−		−	○	+		+	
$x^2-4x-21$	+		+	○	−		−	○	+	
frazione	**+**	○	**−**	○	**+**	○	**−**	○	**+**	

Poiché vogliamo che la frazione sia positiva, l'insieme delle soluzioni è

$$x < -6 \quad \vee \quad -3 < x < 6 \quad \vee \quad x > 7$$

Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie.

45 $\dfrac{9x}{x^2+x+8} > 0$

46 $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-10x+21} \geq 0$

47 $\dfrac{6x^2-x-1}{3x^2-20x} \leq 0$

48 $\dfrac{2x^2-x-1}{x-3} \leq 0$

49 $\dfrac{7}{x-2} - 3 + \dfrac{8}{x-5} < 0$

50 $x+1 > \dfrac{1}{x-1}$

51 **ESERCIZIO SVOLTO**

I sistemi di disequazioni. Ricordiamo che per risolvere un sistema di disequazioni si deve:

- risolvere ciascuna disequazione del sistema

- costruire la tabella delle soluzioni
- determinare l'intersezione degli insiemi soluzione.

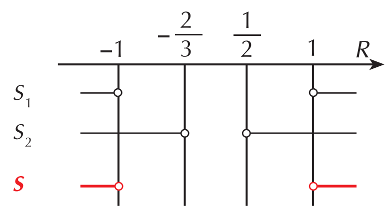
Risolviamo per esempio il seguente sistema: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 6x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$

Risolviamo la prima disequazione del sistema: $x^2 - 1 > 0$ se $x < -1 \vee x > 1 \quad \leftarrow \quad S_1$

Risolviamo la seconda disequazione: $6x^2 + x - 2 > 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \begin{cases} -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad\qquad x < -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \quad \leftarrow \quad S_2$$

Costruiamo la tabella delle soluzioni:



L'insieme delle soluzioni è $x < -1 \quad \vee \quad x > 1$.

52 $\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$

53 $\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 4x^2 + 1 > 0 \end{cases}$

54 $\begin{cases} 3x^2 + x - 4 < 0 \\ 1 - 4x^2 < 0 \end{cases}$

55 $\begin{cases} \dfrac{x(1-2x)}{3} < 0 \\ 6x^2 - 5x - 1 \geq 0 \\ x^2 < 3x \end{cases}$

56 **ESERCIZIO SVOLTO**

I sistemi di secondo grado. Un sistema di equazioni è di secondo grado se una delle equazioni che lo compongono è di secondo grado e le altre sono tutte di primo. Per risolvere un sistema di questo tipo è conveniente usare il metodo di sostituzione e ricavare l'espressione di una delle variabili da una delle equazioni di primo grado.
Osserva l'esempio.

$$\begin{cases} x^2 - y + 6(x+1) = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Conviene ricavare il valore di y dalla seconda equazione perché nella prima questa variabile compare una sola volta ed è di primo grado:

$$\begin{cases} x^2 - (x+2) + 6x + 6 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado nella variabile x:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$$

Otteniamo allora i due sistemi: $\begin{cases} x = -4 \\ y = x + 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = x + 2 \end{cases}$

le cui soluzioni sono: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Quindi $S = \{(-4, -2); (-1, 1)\}$.

Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado.

57 $\begin{cases} y + x = (x-2)(x+1) \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$

58 $\begin{cases} \dfrac{2}{3} - y = \dfrac{x-1}{2} \cdot \dfrac{x+1}{3} \\ 3y = 2 - (x-1) \end{cases}$

59 $\begin{cases} 2(y - x) = 1 - 2x \\ y = \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{5}{x} \end{cases}$

60 $\begin{cases} y = 2 - \dfrac{3}{x+10} \\ 8y + x + 4 = 0 \end{cases}$

61 **ESERCIZIO GUIDATO**

Troviamo le coordinate dei punti di intersezione della parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$ con la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Le coordinate dei punti di intersezione di due curve si determinano risolvendo il sistema delle loro equazioni, nel nostro caso:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{4} \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Completa la risoluzione del sistema.

62 Trova le coordinate dei punti A e B di intersezione della parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 10$ con la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Risultati di alcuni esercizi.

2. **a.** $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$; **b.** $S = \left\{0, -\frac{1}{5}\right\}$

3. **a.** $S = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$; **b.** $S = \varnothing$

4. **a.** $S = \left\{0, \frac{16}{3}\right\}$; **b.** $S = \varnothing$

6. **a.** $S = \left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$; **b.** $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

7. **a.** $S = \varnothing$; **b.** $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

8. $S = \left\{\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

9. $S = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}\right\}$

10. $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

11. $S = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

12. $S = \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}\right\}$

14. **a.** $S = \{1, -7\}$; **b.** $S = \left\{-1 \pm \sqrt{2}\right\}$

16. **a.** $S = \{-7, 9\}$; **b.** $S = \{7, 5\}$

17. **a.** $8, -2$; **b.** $2, -4$; **c.** $1 \pm \sqrt{2}$

18. **a.** $2x^2 + 13x + 15 = 0$; **b.** $4x^2 - 9x + 2 = 0$; **c.** $6x^2 - x - 2 = 0$; **d.** $6x^2 + 7x - 20 = 0$

19. **a.** $(3x-5)(x+1)$; **b.** $(2-3x)(5x-1)$; **c.** $(5x+1)(x-2)$; **d.** $(3x+2)(2x+3)$

20. soluzioni reali se $k \leq -11 \ \vee \ k \geq 1$; **a.** $k = 5$; **b.** $k = -11 \ \vee \ k = 1$; **c.** $\nexists k$; **d.** $k = 4$

21. soluzioni reali $\forall k \in R$; **a.** $k = 6$; **b.** $k = 2$; **c.** $k = 0$

23. $V(0, 1)$, $x = 0$

24. $V(-2, -4)$, $x = -2$

25. $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$; $x = -\frac{3}{2}$

26. $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$; $x = \frac{1}{2}$

27. $V(0, 1)$; $x = 0$

28. $V\left(-1, \frac{5}{2}\right)$; $x = -1$

30. $x = -3 \ \vee \ x = \frac{1}{2}$

31. $x = -\frac{4}{3} \ \vee \ x = \frac{1}{3}$

32. $x = 3 \ \vee \ x = 5$

33. $x = 0 \ \vee \ x = -21$

35. $x < -1 \ \vee \ x > 2$

36. per nessun valore di x

37. $\forall x \in R$

38. $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$

39. $0 \leq x \leq 1$

40. $x < -5 \ \vee \ x > 0$

41. $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \ \vee \ x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

42. $S = R$

43. $x < -1 \ \vee \ x > 0$

45. $x > 0$

46. $x \leq -2 \ \vee \ 1 \leq x < 3 \ \vee \ x > 7$

47. $-\frac{1}{3} \leq x < 0 \ \vee \ \frac{1}{2} \leq x < \frac{20}{3}$

48. $x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ 1 \leq x < 3$

49. $x < 2 \ \vee \ 3 < x < 5 \ \vee \ x > 9$

50. $-\sqrt{2} < x < 1 \ \vee \ x > \sqrt{2}$

52. $x < -1$

53. $x < 0 \ \vee \ x > 1$

54. $-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{2} \ \vee \ \frac{1}{2} < x < 1$

55. $1 \leq x < 3$

57. $S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right); (3, 1)\right\}$

58. $S = \left\{\left(1, \frac{2}{3}\right)\right\}$

59. $S = \left\{\left(5, \frac{1}{2}\right); \left(-2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

60. $S = \left\{\left(-22, \frac{9}{4}\right); \left(-8, \frac{1}{2}\right)\right\}$

61. $A(1, 2)$, $B(7, 5)$

62. $A(2, 2)$; $B(5, 5)$