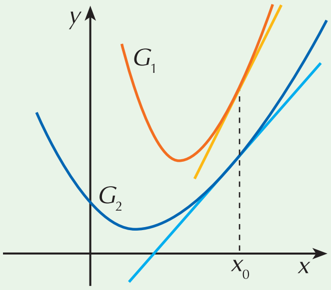
La curva $y = e^x$

Le curve esponenziali con $a > 1$ hanno un grafico che cresce dapprima in modo lento, ma che diventa sempre più ripido al crescere di x.
La rapidità con cui una funzione cresce può essere misurata attraverso la pendenza delle rette ad essa tangenti; per esempio, delle due funzioni rappresentate in ***figura 1*** possiamo dire che nel punto x_0 la curva G_1 cresce in modo più rapido della curva G_2 perché in questo punto la retta tangente a G_1 ha una pendenza maggiore della retta tangente a G_2.
Nel punto di coordinate $(0, 1)$, che è comune a tutte le curve esponenziali, ogni curva ha la sua retta tangente con una pendenza diversa a seconda del valore della base.

Figura 1



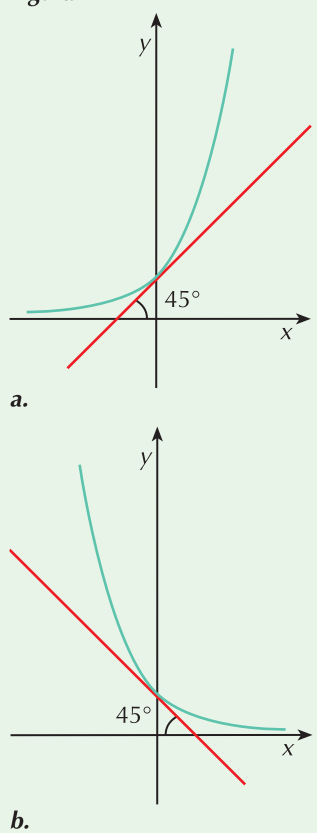
Nella tabella che segue abbiamo scritto nella prima colonna l'equazione di alcune funzioni esponenziali con basi diverse ma tutte maggiori di 1 e nella seconda colonna il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $(0, 1)$.

$y = a^x$	**Coeff. angolare**
$y = 1{,}5^x$	0,4055
$y = 2^x$	0,6931
$y = 2{,}5^x$	0,9163
$y = 2{,}7^x$	0,9933
$y = 2{,}71^x$	0,9969
$y = 2{,}718^x$	0,9999
$y = 2{,}719^x$	1,0003
$y = 2{,}8^x$	1,0296
$y = 2{,}9^x$	1,0647
$y = 3^x$	1,0986

Dai risultati ottenuti si evidenzia che la pendenza cresce al crescere della base, come ci dovevamo aspettare viste le considerazioni fatte su questa curva; il coefficiente angolare si mantiene minore di 1 quando $a \leq 2{,}718$ e diventa maggiore di 1 quando $a \geq 2{,}719$. E' ragionevole supporre che ci sia un valore di a compreso tra 2,718 e 2,719 per il quale il coefficiente angolare è esattamente uguale a 1. Questo numero esiste e si indica con la lettera e.
Impareremo a conoscerlo meglio con tutte le sue caratteristiche proseguendo i nostri studi; per ora dobbiamo limitarci a dire che si tratta di un numero irrazionale del quale si conoscono qualche migliaio di cifre decimali, calcolate grazie all'impiego di potenti computer. A noi basta comunque conoscere un suo valore approssimato anche con poche cifre decimali

$$e = 2{,}71828....$$

Figura 2



La funzione $y = e^x$ ha quindi un grafico come quello in ***figura 2a*** dove abbiamo evidenziato che la retta ad essa tangente nel punto $(0, 1)$ ha coefficiente angolare 1, cioè ha una inclinazione di 45° rispetto alla direzione positiva dell'asse x; la sua simmetrica rispetto all'asse y ha equazione $y = e^{-x}$ e la retta ad essa tangente nello stesso punto ha coefficiente angolare -1 (***figura 2b***).