Trigonometria sferica

Obiettivi

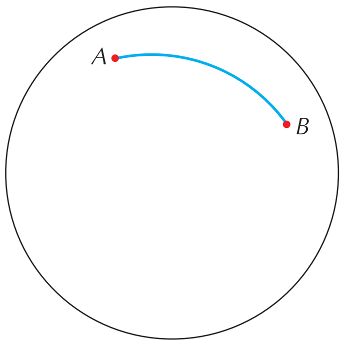
- conoscere gli oggetti della geometria della sfera
- conoscere e saper applicare i teoremi di trigonometria sferica
- risolvere triangoli sferici
- applicare i concetti della trigonometria sferica alla navigazione

1. La geometria sulla sfera

1.1 I concetti fondamentali

Lo studio delle superfici sferiche è particolarmente importante se pensiamo alle sue applicazioni: una nave che, partendo da un porto sulle coste del Portogallo, deve attraversare l'oceano per raggiungere le coste dell'Argentina si deve muovere su un arco di circonferenza anche se ai passeggeri sembra che la nave si muova in linea retta; così è anche per chi si trova su un aereo.
Il modello della geometria euclidea, che funziona benissimo fino a che ci muoviamo su spazi ristretti che possono essere pensati come parti di un piano, non si può usare quando ci si muove sulla sfera. Per esempio, il percorso minimo per congiungere due punti A e B su un piano è il segmento, ma un segmento non esiste sulla superficie sferica e per arrivare in B partendo da A occorre muoversi su un arco di circonferenza (***figura 1***); visto poi che con il termine di *distanza* si intende sempre il percorso minimo, dobbiamo capire qual è l'arco minimo che unisce A e B.
Cominciamo allora a studiare la geometria della sfera introducendo alcuni concetti fondamentali.

Figura 1



Una **superficie sferica** è il luogo dei punti dello spazio che hanno la stessa distanza r da un punto fisso O che ne rappresenta il centro, mentre r ne è il raggio.
La **sfera** è invece il luogo dei punti dello spazio la cui distanza dal centro è minore o uguale al raggio; la sfera è un solido, quindi un oggetto tridimensionale, mentre la superficie sferica è un oggetto bidimensionale costruito nello spazio tridimensionale.
Ogni retta che passa per il centro della sfera interseca la sua superficie in due punti P e Q che si chiamano **poli**.

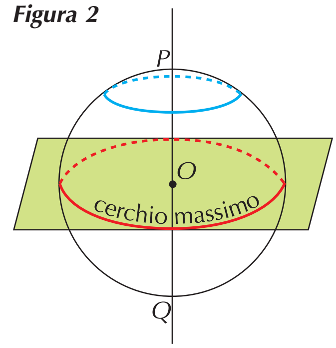
Cerchio massimo è il cerchio che si ottiene intersecando la sfera con un piano che passa per il suo centro O; qualunque altro piano non passante per il centro interseca invece la sfera lungo un cerchio che viene detto **cerchio minore** (***figura 2***). In modo analogo, **circonferenza massima**, o anche **circolo massimo**, è l'intersezione dello stesso piano con la superficie sferica. Il diametro passante per il centro O della sfera e perpendicolare al piano di un cerchio massimo interseca la superficie sferica in due poli P e Q che rappresentano i poli di quel cerchio massimo.

Le circonferenze massime sono poi caratterizzate da queste proprietà (segui la ***figura 3***):

- per ogni punto A sulla superficie sferica passano infinite circonferenze massime
- per ogni coppia di punti A e B della superficie sferica, che non siano i poli, passa sempre una circonferenza massima e una sola; infatti A e B con il centro O della sfera individuano un solo piano che taglia la superficie sferica lungo una circonferenza massima
- per due poli passano invece infinite circonferenze massime
- due circonferenze massime si intersecano sempre in due poli.

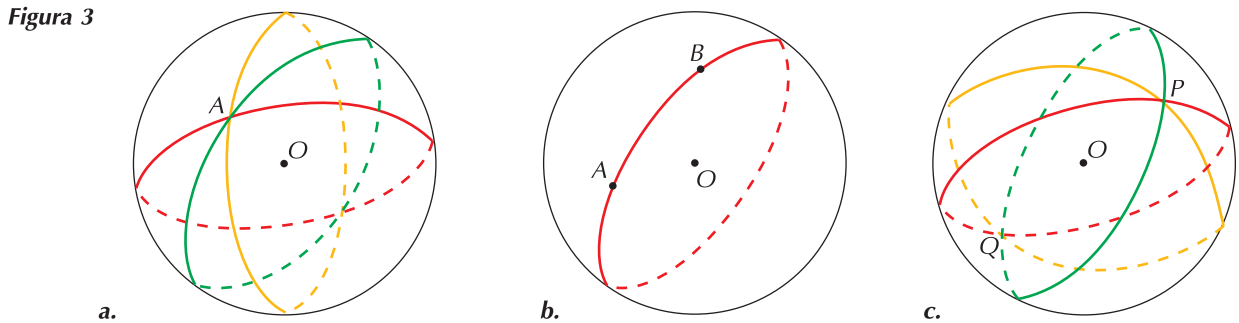
IL CERCHIO MASSIMO E LA DISTANZA SFERICA

Figura 2



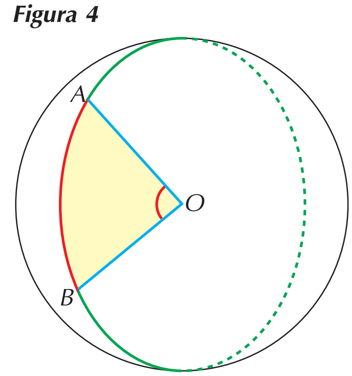
P e Q: poli

Figura 3



Come due punti su un piano definiscono una sola retta, così due punti su una superficie sferica, che non siano i poli, individuano una sola circonferenza massima; essa assume quindi sulla sfera lo stesso ruolo che la retta ha nel piano. Sembra dunque logico definire la distanza tra due punti sulla sfera come parte di una circonferenza massima. Presi dunque due punti A e B sulla superficie sferica, costruiamo la circonferenza massima che passa per essi; tale circonferenza viene divisa dai punti A e B in due archi, il minore dei quali sottende l'angolo convesso $A\widehat{O}B$ (***figura 4***).

Figura 4



Chiamiamo **distanza sferica** fra due punti A e B, o anche **geodetica**, l'arco di circonferenza massima, sotteso ad un angolo minore di 180°, che ha per estremi quei punti.

*Una **geodetica** è una particolare curva che descrive localmente la traiettoria più breve fra punti di un particolare spazio.*

Per trovare la misura della distanza sferica tra due punti basta ricordare la proporzionalità tra archi e angoli al centro corrispondenti in una circonferenza:

angoli espressi in gradi

$2\pi r : \widehat{AB} = 360° : \alpha°$

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi r \cdot \alpha°}{360°}$$

angoli espressi in radianti

$2\pi r : \widehat{AB} = 2\pi : \alpha$

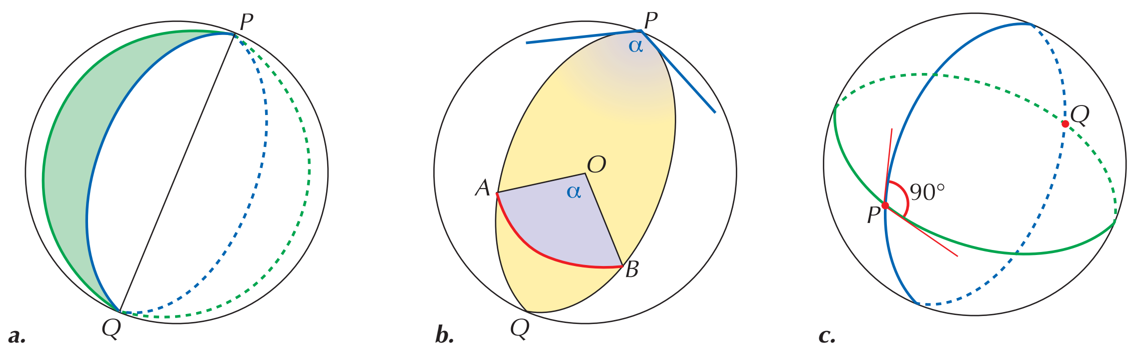
$$\widehat{AB} = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{2\pi} = \alpha \cdot r$$

Due piani che passano per il centro di una sfera individuano due circonferenze massime che, intersecandosi in due poli P e Q, dividono la superficie sferica in quattro parti ciascuna delle quali viene detta **fuso sferico** (***figura 5a***); un fuso sferico è quindi la parte di superficie sferica delimitata da due semipiani passanti per il centro e aventi l'origine in comune. Come ampiezza del fuso sferico si assume quella del diedro α formato dai due semipiani; di conseguenza l'ampiezza di un fuso sferico è sempre minore di 180°.
Sezionando il fuso con un piano passante per il centro della sfera e perpendicolare ai due semipiani che lo generano si ottiene un arco di circonferenza massima AB; la distanza sferica tra i punti A e B coincide con l'ampiezza del fuso. Anche l'angolo delimitato dalle rette tangenti in P o in Q alle due semicirconferenze massime che delimitano il fuso ha ampiezza α (***figura 5b***).
L'angolo α prende il nome di **angolo sferico**. L'angolo sferico è retto se uno dei due circoli massimi passa per i poli dell'altro (***figura 5c***).

FUSI E ANGOLI SFERICI

Due semipiani aventi l'origine in comune definiscono un angolo diedro; ampiezza di un diedro è l'angolo da esso individuato su un piano perpendicolare allo spigolo del diedro.

Figura 5



1.2 Il triangolo sferico

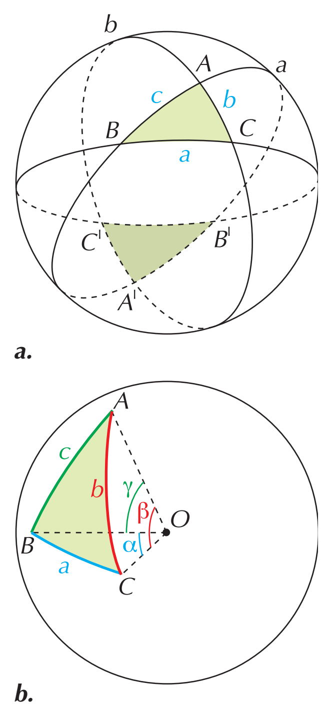
Il triangolo, che è la figura fondamentale della geometria del piano, è definito da tre rette che si intersecano a due a due; nella geometria della sfera il suo corrispondente è il triangolo sferico che si definisce in modo analogo.

Si dice **triangolo sferico** la parte di superficie sferica delimitata da tre circonferenze massime che si intersecano a due a due.

I punti di intersezione A, B, C delle tre circonferenze sono i vertici del triangolo, gli archi AB, BC, AC ne sono i lati (***figura 6a***).
Le semicirconferenze di origine A che delimitano il triangolo danno origine ad un angolo sferico la cui ampiezza è quella del fuso corrispondente, così come le semicirconferenze di origine B e quelle di origine C. In un triangolo sferico, come in un triangolo del piano, individuiamo quindi tre angoli sferici i cui vertici sono i punti A, B e C; gli angoli sferici verranno indicati nel seguito con la lettera del proprio vertice: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.
Per indicare i lati di un triangolo sferico useremo le stesse convenzioni usate per i triangoli piani: a è la lunghezza del lato opposto al vertice A, b quella del lato opposto al vertice B, c quella del lato opposto al vertice C.
I lati a, b, c del triangolo rappresentano le distanze sferiche tra i vertici e si misurano quindi in base agli angoli α, β, γ, misurati in radianti oppure in gradi, che hanno il vertice nel centro della sfera e insistono su di essi (***figura 6b***):

$$a = \alpha \cdot r \qquad b = \beta \cdot r \qquad c = \gamma \cdot r$$

Figura 6



In particolare, se assumiamo che la sfera abbia raggio unitario, i lati del triangolo hanno proprio misura α, β e γ.

La sfera di raggio 1 prende il nome di **sfera trigonometrica**.

Nel seguito ci riferiremo sempre ad una sfera trigonometrica.

I triangoli sferici godono delle seguenti proprietà, alcune delle quali sono analoghe a quelle dei triangoli piani.

- Ogni lato è minore di una semicirconferenza massima, quindi è minore di π; inoltre al lato maggiore è sempre opposto l'angolo maggiore.
- Ogni lato è maggiore della differenza degli altri due lati e minore della loro somma.
- La somma dei lati è minore di 2π : $a + b + c < 2\pi$.
- La somma degli angoli non è costante come nei triangoli piani, ma è compresa tra 180° e 540°.
- L'area di un triangolo sferico è di $S = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$.

In un triangolo piano la somma degli angoli interni è costante, in un triangolo sferico questa caratteristica non è più vera.

Se la sfera ha raggio r, allora

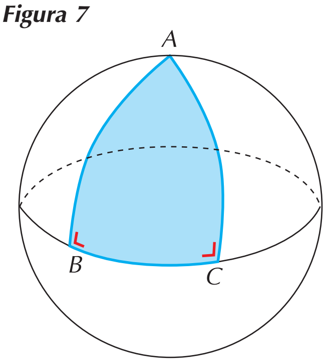
$$S = \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi\right) r^2$$

L'espressione: $D = 2\pi - (a + b + c)$ viene detta **difetto sferico**.

L'espressione: $E = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$ viene detta **eccesso sferico**.

L'area di un triangolo sferico definito su una superficie sferica trigonometrica è quindi uguale al suo eccesso sferico.

Figura 7



Visto che i lati di un triangolo sferico si misurano tramite l'ampiezza dell'angolo al centro ad esso sotteso, è possibile avere triangoli i cui lati misurano 90°; diremo che un triangolo è **rettilatero** se ha un solo lato di lunghezza 90°, **birettilatero** se ne ha due, **trirettilatero** se ne ha tre.
Anche gli angoli sferici del triangolo possono essere retti e, come nel caso dei lati, possono esistere triangoli che hanno uno, due o anche tre angoli retti; essi vengono detti rispettivamente **rettangoli**, **birettangoli** e **trirettangoli** (in ***figura 7*** un triangolo birettangolo).

Un triangolo piano può avere un solo angolo retto, un triangolo sferico può averne anche due o tre.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Se P e Q sono due poli per una circonferenza massima Γ di raggio 1, quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a. ogni punto di Γ ha la stessa distanza da P

b. la distanza di P da Γ è $\sqrt{2}$

c. se A è un punto di Γ e O è il centro della sfera, l'angolo $\widehat{POA}$ è retto

d. le precedenti affermazioni sono tutte vere.

2. Di un triangolo sferico su una sfera trigonometrica possiamo dire che:

a. può avere un solo lato retto V F

b. può avere più angoli sferici retti V F

c. la sua area è uguale al suo eccesso sferico V F

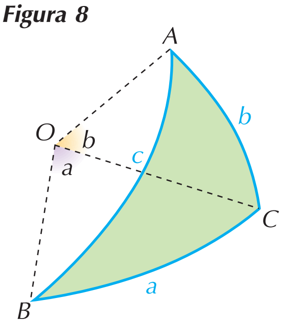
d. la somma dei suoi angoli è uguale a 360°. V F

2. La trigonometria sferica

Relativamente ai triangoli sferici, e in questo capitolo lavoreremo solo con la sfera trigonometrica, possiamo enunciare alcuni teoremi che, analogamente ai teoremi di trigonometria sui triangoli piani, esprimono relazioni tra i suoi lati e i suoi angoli.
Per comprendere il loro significato ci serviremo del triangolo sferico rappresentato in ***figura 8***, estratto dalla sfera trigonometrica. In esso i punti A, B e C sono i vertici del triangolo, O è il centro della sfera e i segmenti OA, OB e OC sono i raggi unitari; di conseguenza:

$$a = \widehat{BOC} \qquad b = \widehat{AOC} \qquad c = \widehat{AOB}$$

Figura 8



Il teorema dei seni

In ogni triangolo sferico il rapporto tra il seno di un angolo ed il seno del lato ad esso opposto è costante:

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}$$

Dimostrazione.
Per dimostrare questa relazione, tracciamo dal vertice A la perpendicolare AH al piano OBC e da H le perpendicolari HK al raggio OB e HT al raggio OC (***figura 9***).
In questo modo, per il teorema delle tre perpendicolari ($AH \perp$ piano OBC, $HK \perp OB \rightarrow OB \perp$ piano AKH), risulta che $AK \perp OB$ e analogamente $AT \perp OC$.
Nella figura si individuano quindi alcuni triangoli rettangoli piani per i quali valgono i teoremi della trigonometria piana.

- Triangolo ATH, rettangolo in H: $\quad \overline{AH} = \overline{AT} \cdot \sin \widehat{ATH}$
- Triangolo AKH, rettangolo in H: $\quad \overline{AH} = \overline{AK} \cdot \sin \widehat{AKH}$

L'angolo $\widehat{ATH}$ ha entrambi i lati perpendicolari al raggio OC, dunque, per definizione di angolo sferico, $\widehat{ATH}$ è uguale all'angolo sferico $\widehat{C}$.
Analogamente, l'angolo $\widehat{AKH}$ ha entrambi i lati perpendicolari al raggio OB, dunque $\widehat{AKH}$ è uguale all'angolo sferico $\widehat{B}$.
Dal confronto tra le due relazioni e usando gli angoli sferici troviamo che:

$$\overline{AT} \cdot \sin \widehat{C} = \overline{AK} \cdot \sin \widehat{B} \qquad (\mathbf{A})$$

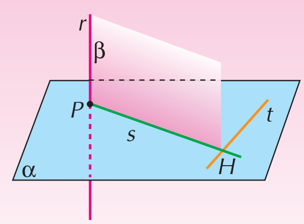
Consideriamo adesso i triangoli OAT e OAK:

- triangolo OAT, rettangolo in T: $\quad \overline{AT} = \overline{OA} \sin \widehat{AOT}$
  cioè, tenendo presente che $\overline{OA} = 1 \quad \overline{AT} = \sin b$
- triangolo OAK, rettangolo in K: $\quad \overline{AK} = \overline{OA} \sin \widehat{AOK}$ cioè $\overline{AK} = \sin c$

Riprendendo la precedente relazione (**A**) e sostituendo i valori trovati abbiamo infine che:

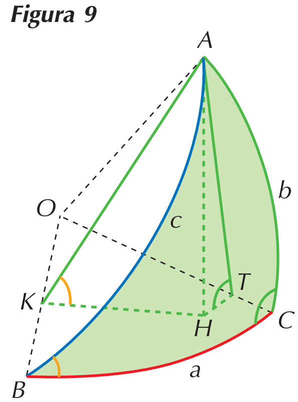
$$\sin b \cdot \sin \widehat{C} = \sin c \cdot \sin \widehat{B} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}$$

Teorema delle tre perpendicolari



se $r \perp \alpha$ *e* $PH \perp t$
allora $t \perp \beta$

Figura 9



Tracciando adesso dal vertice B la perpendicolare al piano OAC e ripetendo lo stesso ragionamento troviamo la relazione:

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}$$

Dal confronto tra queste ultime segue la tesi del teorema. ◀

I teoremi del coseno

Primo teorema del coseno. In un triangolo sferico il coseno di un lato è uguale al prodotto dei coseni degli altri due lati aumentato del prodotto dei loro seni per il coseno dell'angolo sferico fra essi compreso.

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{B}$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \widehat{C}$$

Questo teorema è noto come **teorema di Eulero**; le sue formule mettono in relazione i tre lati del triangolo con uno dei suoi angoli.

Dimostrazione.

Riprendiamo il triangolo sferico ABC e tracciamo dal vertice A le tangenti alle semicirconferenze massime che individuano i lati b e c; tali rette intersecano il piano OBC nei punti N e M (***figura 10a***). Concentriamo la nostra attenzione sui triangoli OAM e OAN, entrambi rettangoli in A (***figura 10b***):

Figura 10a.

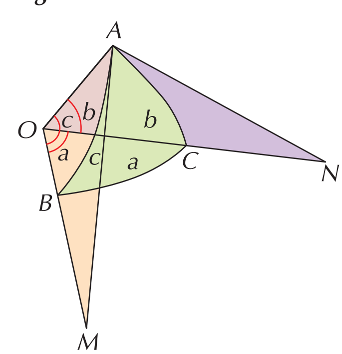
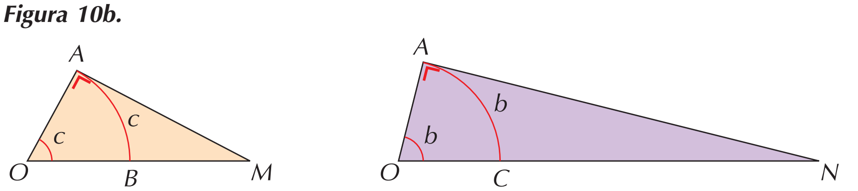


Figura 10b.



- triangolo OAM :

  $\overline{AM} = \tan \gamma = \tan c$

  $\overline{MO} = \dfrac{1}{\cos \gamma} = \dfrac{1}{\cos c}$

- triangolo OAN :

  $\overline{AN} = \tan \beta = \tan b$

  $\overline{NO} = \dfrac{1}{\cos \beta} = \dfrac{1}{\cos b}$

Consideriamo adesso il triangolo MNO ed applichiamo il teorema di Carnot per trovare $\overline{MN}^2$:

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2 \cdot \overline{OM} \cdot \overline{ON} \cdot \cos \alpha = \frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2 \cdot \frac{1}{\cos c} \cdot \frac{1}{\cos b} \cdot \cos \alpha =$$

$$= \frac{\cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos b \cos c \cos \alpha}{\cos^2 b \cos^2 c}$$

Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo AMN (l'angolo $\widehat{MAN}$ è l'angolo sferico del triangolo) e troviamo ancora $\overline{MN}^2$:

$$\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \cos \widehat{A} = \tan^2 c + \tan^2 b - 2 \cdot \tan c \cdot \tan b \cdot \cos \widehat{A}$$

$$= \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} + \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} - \frac{2\sin c \sin b \cos \widehat{A}}{\cos c \cos b}$$

$$= \frac{\sin^2 c \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 c - 2\sin c \sin b \cos c \cos b \cos \widehat{A}}{\cos^2 b \cos^2 c}$$

Uguagliamo le due relazioni:

$$\frac{\cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos b \cos c \cos a}{\cos^2 b \cos^2 c} = \frac{\sin^2 c \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 c - 2\sin c \sin b \cos c \cos b \cos \widehat{A}}{\cos^2 b \cos^2 c}$$

Eliminiamo i denominatori e riorganizziamo i termini in modo da avere $\cos a$ al primo membro:

$$\cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos b \cos c \cos a = \sin^2 c \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 c - 2\sin c \sin b \cos c \cos b \cos \widehat{A}$$

$$2\cos b \cos c \cos a = \cos^2 b + \cos^2 c - \sin^2 c \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 c + 2\sin c \sin b \cos c \cos b \cos \widehat{A}$$

$$2\cos b \cos c \cos a = \cos^2 b(1 - \sin^2 c) + \cos^2 c(1 - \sin^2 b) + 2\sin c \sin b \cos c \cos b \cos \widehat{A}$$

$$2\cos b \cos c \cos a = \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \cos^2 b + 2\sin c \sin b \cos c \cos b \cos \widehat{A}$$

$$\cos a = \frac{2 \cos^2 b \cos^2 c + 2\sin c \sin b \cos c \cos b \cos \widehat{A}}{2\cos b \cos c}$$

In definitiva, semplificando la frazione otteniamo la prima relazione del teorema:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

In modo del tutto analogo si dimostrano le altre due. ◀

Formule simili che mettono in relazione i tre angoli con uno dei lati sono le seguenti (ci limitiamo ad enunciarle):

Secondo teorema del coseno. In un triangolo sferico il coseno di un angolo è uguale all'opposto del prodotto dei coseni degli altri due angoli aumentato del prodotto dei loro seni per il coseno del lato fra essi compreso.

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} \cos a$$

$$\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{C} \cos b$$

$$\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos c$$

Si vede subito che, al contrario di quello che accade per i triangoli piani, la conoscenza dei tre angoli di un triangolo sferico permette di trovare le lunghezze dei lati (vedi l'esempio 3 successivo).

Il teorema delle cotangenti

Combinando le relazioni dei due teoremi precedenti si giunge alle cinque formule che seguono e che vengono dette **formule di Vieta**; esse legano tra loro quattro elementi consecutivi del triangolo sferico, due lati e due angoli:

$$\text{cotan } a \sin b = \cos b \cdot \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cdot \text{cotan } \widehat{A}$$

$$\text{cotan } a \sin c = \cos c \cdot \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cdot \text{cotan } \widehat{A}$$

$\text{cotan } b \sin a = \cos a \cdot \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cdot \text{cotan } \widehat{B}$

$\text{cotan } b \sin c = \cos c \cdot \cos \widehat{A} + \sin \widehat{A} \cdot \text{cotan } \widehat{B}$

$\text{cotan } c \sin a = \cos a \cdot \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cdot \text{cotan } \widehat{C}$

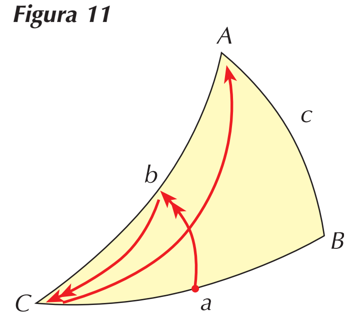
$\text{cotan } c \sin b = \cos b \cdot \cos \widehat{A} + \sin \widehat{A} \cdot \text{cotan } \widehat{C}$

Per ricordare queste formule, di cui omettiamo le dimostrazioni, si deve tenere a mente lo schema delle funzioni goniometriche usate:

$$\text{cotan } ..... \sin ..... = \cos ..... \cos ..... + \sin ..... \text{cotan } .....$$

Gli angoli e i lati che devono essere inseriti si ricavano dallo schema grafico che si può vedere nella ***figura 11***; in essa è segnato il percorso che consente di scrivere la prima formula. Si parte dal lato a (cotan a), si va verso il lato b che viene usato due volte (ci sono due punte di freccia: $\text{cotan } a \sin b = \cos b$), si raggiunge l'angolo $\widehat{C}$ che viene anch'esso usato due volte ($\text{cotan } a \sin b = \cos b \cdot \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C}$) e si termina nell'angolo $\widehat{A}$ (formula completa: $\text{cotan } a \sin b = \cos b \cdot \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cdot \text{cotan } \widehat{A}$).

Figura 11

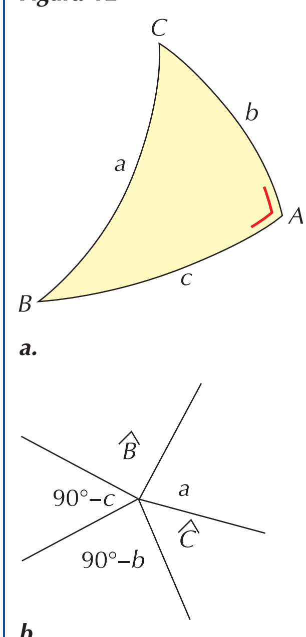


I triangoli sferici rettangoli e la regola di Nepero

Tutte le formule dei precedenti teoremi si semplificano notevolmente nel caso in cui il triangolo sferico abbia un angolo retto. Per determinare i dati incogniti, noti due elementi del triangolo, vale una regola mnemonica che viene detta **regola di Nepero**.
Dividiamo l'angolo giro in cinque parti e, in ogni settore che si viene a determinare, inseriamo un elemento del triangolo sferico saltando l'angolo retto e sostituendo ai cateti i loro complementari; procedendo in senso orario e supponendo che sia $\widehat{A} = 90°$ (***figura 12***):

- al primo posto inseriamo l'ipotenusa a
- accanto all'ipotenusa incontriamo l'angolo $\widehat{C}$, scriviamolo nel settore a fianco di a
- subito dopo troviamo il cateto b, procedendo in senso orario scriviamo $90° - b$ nel settore a fianco del precedente
- poi incontriamo l'angolo retto $\widehat{A}$ che saltiamo
- quindi il cateto c e scriviamo $90° - c$ nel settore successivo
- infine l'angolo $\widehat{B}$ che scriviamo nell'ultimo settore libero.

Figura 12



La regola di Nepero afferma che:

> Il coseno di un elemento è uguale:
> - al prodotto delle cotangenti degli elementi adiacenti, oppure
> - al prodotto dei seni degli elementi opposti (i più lontani nel pentagono).

Per esempio, facendo riferimento al pentagono della precedente ***figura 12***:

- $\cos a = \text{cotan } \widehat{B} \cdot \text{cotan } \widehat{C}$
- $\cos a = \sin (90° - c) \cdot \sin (90° - b) = \cos c \cos b$.

Queste formule si ottengono dai due teoremi del coseno ponendo in essi $\widehat{A} = 90°$.

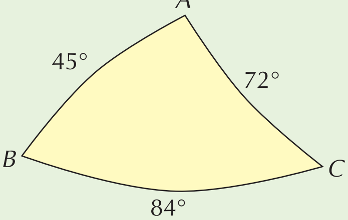
ESEMPI

1. Di un triangolo sferico appartenente alla sfera trigonometrica sono note le misure dei tre lati (espresse in gradi):

$a = 84°$ $\qquad b = 72°$ $\qquad c = 45°$

Calcoliamo le misure dei tre angoli del triangolo e la sua area.

Figura 13



Dobbiamo applicare il teorema del coseno (***figura 13***):

$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A}$

da cui ricaviamo che $\quad \cos \widehat{A} = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

Sostituendo i valori dati dal problema otteniamo $\quad \cos \widehat{A} = -0{,}16948... \quad \rightarrow \quad \widehat{A} = 99°45'29''$

In modo analogo troviamo le ampiezze degli altri angoli:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{B} \quad \rightarrow \quad \cos \widehat{B} = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \quad \rightarrow \quad \widehat{B} = 70°28'8''$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \widehat{C} \quad \rightarrow \quad \cos \widehat{C} = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad \rightarrow \quad \widehat{C} = 44°29'4''$$

Per determinare l'area calcoliamo l'eccesso sferico (occorre trasformare le misure degli angoli in radianti):

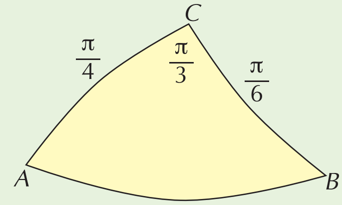
$$\text{area} = E = (99°45'29'' + 70°28'8'' + 44°29'4'') \cdot \frac{\pi}{180} - \pi = 0{,}6058$$

2. Di un triangolo sferico sono noti i seguenti elementi (le misure dei lati e degli angoli sono espresse in radianti):

$a = \dfrac{\pi}{6} \qquad b = \dfrac{\pi}{4} \qquad \widehat{C} = \dfrac{\pi}{3}$

Calcoliamo le misure dei rimanenti lati e angoli.

Figura 14



Applicando il teorema di Eulero (***figura 14***) possiamo trovare la misura del lato c (in radianti):

$$\cos c = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 0{,}789149131 \quad \rightarrow \quad c = 0{,}661$$

Per trovare le misure degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ possiamo applicare sia il teorema dei seni che quello di Eulero:

- con il teorema dei seni:

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c} \quad \rightarrow \quad \sin \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{C} \cdot \sin a}{\sin c} = 0{,}705339779 \quad \rightarrow \quad \widehat{A} = 0{,}783$$

$$\frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c} \quad \rightarrow \quad \sin \widehat{B} = \frac{\sin \widehat{C} \cdot \sin b}{\sin c} = 0{,}997501082 \quad \rightarrow \quad \widehat{B} = 1{,}500$$

- con il teorema di Eulero:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A} \quad \rightarrow \quad \cos \widehat{A} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = 0{,}709173343 \quad \rightarrow \quad \widehat{A} = 0{,}782$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{B} \quad \rightarrow \quad \cos \widehat{B} = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = 0{,}076509224 \quad \rightarrow \quad \widehat{B} = 1{,}494$$

Tenendo in considerazione errori di arrotondamento nella valutazione di $\widehat{B}$, i risultati ottenuti sono gli stessi.

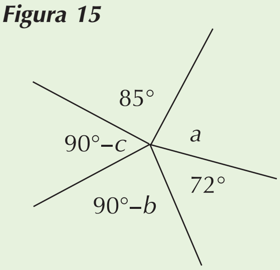
3. Di un triangolo sferico rettangolo sono note le misure degli angoli:

$\widehat{A} = 90^\circ \qquad \widehat{B} = 85^\circ \qquad \widehat{C} = 72^\circ$

Calcoliamo le misure dei lati.

Si tratta di un triangolo rettangolo in A; applichiamo la regola di Nepero riferendoci allo schema del pentagono in ***figura 15***:

Figura 15



$\cos a = \text{cotan } 85^\circ \cdot \text{cotan } 72^\circ = 0{,}028426789 \quad \rightarrow \quad a = 88^\circ 22' 16''$

$\cos(90^\circ - b) = \sin a \sin 85^\circ \quad \text{cioè} \quad \sin b = \sin a \sin 85^\circ = 0{,}995792145 \quad \rightarrow \quad b = 84^\circ 44' 31''$

$\cos(90^\circ - c) = \text{cotan}(90^\circ - b)\,\text{cotan } 85^\circ \quad \text{cioè} \quad \sin c = \tan b \,\text{cotan } 85^\circ = 0{,}950665343 \quad \rightarrow \quad c = 71^\circ 55' 39''$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Indica in quali dei seguenti casi **non** si può risolvere un triangolo sferico. Sono note le misure di:

a. tre lati **b.** tre angoli **c.** due angoli
d. due lati **d.** due lati e l'angolo compreso **f.** due angoli e il lato opposto ad uno di essi

2. Di un triangolo sferico sono noti gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ e il lato a; volendo risolvere il triangolo, la prima operazione che si può fare è:

a. trovare il terzo angolo perché la somma degli angoli interni è sempre 180° V F
b. applicare per primo il teorema dei seni per trovare il lato b oppure il lato c V F
c. applicare le formule del secondo teorema del coseno per trovare l'angolo $\widehat{A}$ V F
d. applicare il teorema delle cotangenti per trovare il lato b. V F

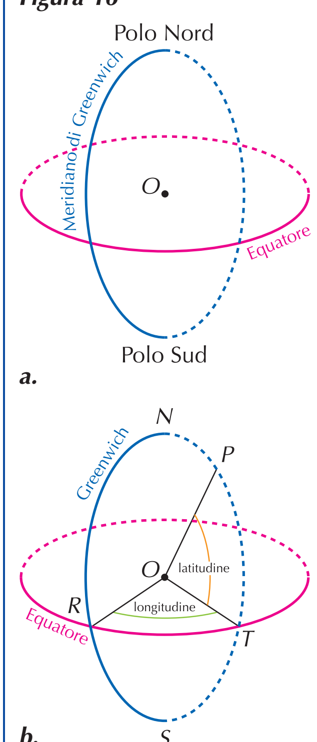
3. UN'APPLICAZIONE: LA NAVIGAZIONE ORTODROMICA

Il sistema di riferimento sulla Terra

Per individuare la posizione di un punto sulla Terra è necessario fissare un sistema di riferimento; se assumiamo che la Terra abbia la forma di una sfera, il sistema di riferimento può essere individuato fissando due circonferenze massime, in modo che ciascuna passi per i poli dell'altra, e che si assumono come fondamentali (***figura 16a***).
La prima circonferenza massima fondamentale è l'equatore, l'altra è il meridiano di Greenwich; i poli associati all'equatore sono i Poli terrestri che individuano l'asse di rotazione.
Un punto P qualunque sulla superficie della Terra può essere individuato assegnando (***figura 16b***):

- la **latitudine**, cioè la distanza angolare α tra l'equatore e il circolo minore che passa per P; α è un angolo compreso tra 0° e 90° verso Nord e verso Sud
- la **longitudine**, cioè la distanza angolare β tra il meridiano di Greenwich e il meridiano che passa per P; β è un angolo compreso tra 0° e 180° verso Est e verso Ovest.

Figura 16

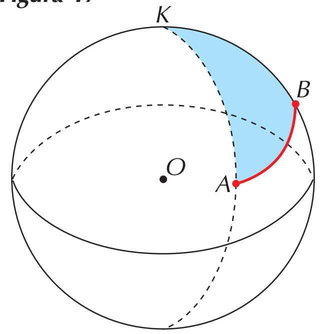


Se assumiamo come unità di misura per le lunghezze il suo raggio, la Terra diventa una sfera trigonometrica e ad essa possiamo applicare le conoscenze acquisite nei precedenti paragrafi.
In questo caso, indicato con R il punto di intersezione dell'equatore con il meridiano fondamentale e con T la proiezione di P sull'equatore, la latitudine è la misura del segmento sferico PT, la longitudine è la misura del segmento sferico RT.
In questo sistema di riferimento, un punto P ha quindi coordinate che scriviamo in questo modo:

$$P : lat_P,\ long_P$$

Con queste posizioni, la lunghezza del segmento sferico che passa per due punti A e B di coordinate $A : lat_A,\ long_A$ e $B : lat_B,\ long_B$ si calcola applicando i teoremi della trigonometria sferica al triangolo KAB dove con K abbiamo indicato il polo dell'emisfero del punto di partenza (***figura 17***).

Figura 17



Se il punto di partenza A e quello di arrivo B si trovano nello stesso emisfero e dalla stessa parte rispetto al meridiano di Greenwich:

- l'angolo sferico $\widehat{AKB}$ è la differenza tra le longitudini di B e di A:
  $\widehat{AKB} = long_B - long_A$
- il segmento KA è la differenza tra un quarto di circonferenza massima e la latitudine di A: $KA = 90° - lat_A$
- analogamente per il segmento KB: $KB = 90° - lat_B$

Applicando il teorema di Eulero si trova che:

$$\cos AB = \cos KA \cdot \cos KB + \sin KA \cdot \sin KB \cdot \cos \widehat{AKB} =$$

$$= \cos (90° - lat_A) \cdot \cos (90° - lat_B) + \sin (90° - lat_A) \cdot \sin (90° - lat_B) \cdot \cos (long_B - long_A) =$$

$$= \sin (lat_A) \cdot \sin (lat_B) + \cos (lat_A) \cdot \cos (lat_B) \cdot \cos (long_B - long_A)$$

In definitiva:

$$\boxed{AB = \arccos \left[\sin (lat_A) \sin (lat_B) + \cos (lat_A) \cdot \cos (lat_B) \cos (long_B - long_A)\right]}$$

Nel caso in cui i punti di partenza e di arrivo si trovino in emisferi diversi o da parti opposte rispetto al meridiano fondamentale, si deve ragionare di volta in volta sulla valutazione dell'angolo $\widehat{AKB}$ e dei segmenti KA e KB. Per mantenere la stessa regola, può essere utile la seguente convenzione:

- latitudini di punti che si trovano nell'emisfero nord vengono assunte positive
- latitudini di punti che si trovano nell'emisfero sud vengono assunte negative
- longitudini di punti che si trovano entrambi a Est o entrambi a Ovest vengono assunte positive
- longitudini di punti che si trovano una a Est e l'altra a Ovest vengono assunte una positiva e l'altra negativa.

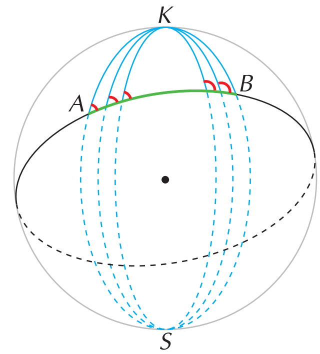
La navigazione ortodromica

Questi concetti si applicano alla navigazione oceanica, dove le distanze sono grandi e, per congiungere due località, è necessario seguire il percorso più bre-

ve. Si parla in questo caso di **navigazione ortodromica**.
Il triangolo AKB che ha come vertici il punto di partenza, quello di arrivo e il polo dell'emisfero a cui appartiene il punto di partenza viene detto **triangolo ortodromico**.
Il segmento AB viene detto **cammino ortodromico** o **ortodromia**.

L'angolo $\widehat{KAB}$ è l'**angolo di rotta**; esso indica la rotta iniziale da seguire per arrivare in B partendo da A.
Poiché la navigazione non avviene in linea retta, l'angolo di rotta cambia in continuazione (***figura 18***) e deve essere continuamente ricalcolato.

Figura 18



Vediamo un esempio e calcoliamo l'ortodromia e l'angolo di rotta iniziale noti i punti

$A: lat_A = 27°\,Nord,\ long_A = 25°\,Est$ e $B: lat_B = 74°\,Nord,\ long_B = 34°\,Ovest$.

Per calcolare AB applichiamo la formula tenendo presente che:

$$long_B - long_A = 34° - (-25°) = 34° + 25° = 59°$$

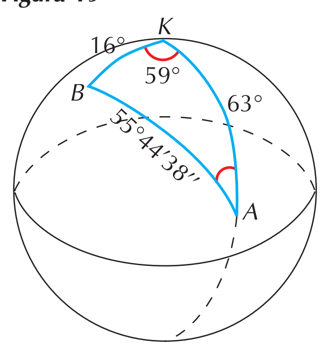
$$\cos AB = \sin 27° \sin 74° + \cos 27° \cdot \cos 74° \cdot \cos 59° = 0{,}56289429 \quad \rightarrow \quad AB = 55°44'38''$$

L'angolo iniziale di rotta è l'angolo $\widehat{A}$ che calcoliamo riferendoci al triangolo ABK in ***figura 19***; in esso:

$\widehat{K} = 59°$ $\qquad KA = 90° - 27° = 63°$

$KB = 90° - 74° = 16°$ $\qquad AB = 55°44'38''$

Figura 19



Possiamo applicare sia il teorema dei seni che quello delle cotangenti:

- con il teorema dei seni:

$$\frac{\sin \widehat{K}}{\sin AB} = \frac{\sin \widehat{A}}{\sin KB} \quad \rightarrow \quad \sin \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{K} \cdot \sin KB}{\sin AB} = 0{,}285854608$$

da cui $\widehat{A} = 16°36'36''$

- con il teorema delle cotangenti:

$$\text{cotan}\, KB \cdot \sin KA = \cos KA \cdot \cos \widehat{K} + \sin \widehat{K} \cdot \text{cotan}\, \widehat{A} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \text{cotan}\, \widehat{A} = \frac{\text{cotan}\, KB \cdot \sin KA - \cos KA \cdot \cos \widehat{K}}{\sin \widehat{K}} = 3{,}352305467 \quad \rightarrow \quad \widehat{A} = 16°36'36''$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Barra vero o falso.

a. La latitudine e la longitudine servono per individuare un punto sulla superficie della Terra. V F
b. La longitudine rappresenta la distanza del punto dall'equatore terrestre. V F
c. L'angolo di rotta rappresenta la direzione da seguire per raggiungere il punto finale di un cammino ortodromico. V F
d. L'angolo di rotta è costante e non cambia mai durante la navigazione. V F

I concetti e le regole

La sfera e i suoi elementi

I principali elementi che si possono individuare sulla superficie sferica sono:

- la **circonferenza massima**, individuata dall'intersezione della superficie sferica con un piano passante per il centro della sfera; ogni circonferenza individuata da un piano non passante per il centro viene detta **circonferenza minore**
- la **distanza sferica** fra due punti A e B, o anche **geodetica**, che è il più piccolo tra gli archi di circonferenza massima che hanno per estremi quei punti
- il **fuso sferico**, che è la parte di superficie sferica delimitata da due semicirconferenze massime
- l'**angolo sferico** che rappresenta l'ampiezza del fuso sferico
- il **triangolo sferico**, che è la parte di superficie sferica delimitata da tre circonferenze massime che si intersecano a due a due.

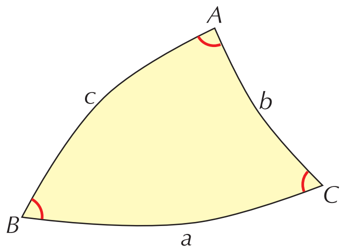
La sfera di raggio unitario prende il nome di **sfera trigonometrica**; in tal caso la distanza sferica tra due punti è esattamente uguale all'ampiezza dell'angolo che la sottende avente vertice nel centro della sfera.

Queste considerazioni permettono di affermare che in un triangolo sferico:

- la somma degli angoli è compresa tra 180° e 540°
- l'area di un triangolo sferico è uguale a $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}-\pi$
- la somma dei lati è minore di 360° : $a+b+c<360°$.

Il triangolo sferico e i teoremi ad esso relativi

In un triangolo sferico valgono i seguenti teoremi.



- **Teorema dei seni**

  In ogni triangolo sferico il rapporto tra il seno di un angolo ed il seno del lato ad esso opposto è costante:

  $$\frac{\sin\widehat{A}}{\sin a}=\frac{\sin\widehat{B}}{\sin b}=\frac{\sin\widehat{C}}{\sin c}$$

- **Teoremi del coseno**

  In un triangolo sferico il coseno di un lato è uguale al prodotto dei coseni degli altri due lati aumentato del prodotto dei loro seni per il coseno dell'angolo sferico fra essi compreso:

  $$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{A}$$

  $$\cos b=\cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{B}$$

  $$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\widehat{C}$$

  In un triangolo sferico il coseno di un angolo è uguale all'opposto del prodotto dei coseni degli altri due angoli aumentato del prodotto dei loro seni per il coseno del lato fra essi compreso:

  $$\cos\widehat{A}=-\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos a$$

  $$\cos\widehat{B}=-\cos\widehat{A}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{A}\sin\widehat{C}\cos b$$

  $$\cos\widehat{C}=-\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}+\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\cos c$$

- **Teorema delle cotangenti**

  $$\operatorname{cotan} a\sin b=\cos b\cdot\cos\widehat{C}+\sin\widehat{C}\cdot\operatorname{cotan}\widehat{A}$$

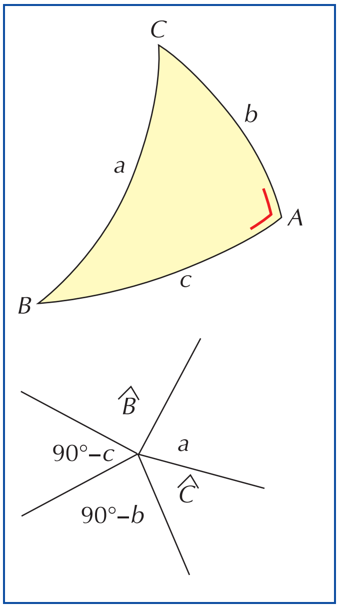
  $$\operatorname{cotan} a\sin c=\cos c\cdot\cos\widehat{B}+\sin\widehat{B}\cdot\operatorname{cotan}\widehat{A}$$

$\text{cotan } b \sin a = \cos a \cdot \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cdot \text{cotan } \widehat{B}$

$\text{cotan } b \sin c = \cos c \cdot \cos \widehat{A} + \sin \widehat{A} \cdot \text{cotan } \widehat{B}$

$\text{cotan } c \sin a = \cos a \cdot \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cdot \text{cotan } \widehat{C}$

$\text{cotan } c \sin b = \cos b \cdot \cos \widehat{A} + \sin \widehat{A} \cdot \text{cotan } \widehat{C}$



Se il triangolo sferico ha un angolo retto, i teoremi precedenti si possono riassumere in un'unica regola mnemonica, nota come **regola di Nepero**, che ha come riferimento la suddivisione pentagonale in figura nella quale si suppone che l'angolo retto sia in A. La regola afferma che:

- il coseno di un elemento è uguale:
  - al prodotto delle cotangenti degli elementi adiacenti, oppure
  - al prodotto dei seni degli elementi opposti (i più lontani nel pentagono).

La navigazione ortodromica

Se assumiamo che la Terra sia sferica, possiamo fissare un sistema di riferimento su di essa individuando due circonferenze massime ortogonali tra loro: l'equatore e il meridiano di Greenwich. La posizione di un punto P sulla superficie viene in questo modo individuata assegnando la latitudine e la longitudine che vengono definite come segue:

- **latitudine** è la distanza angolare α tra l'equatore e il circolo minore che passa per P; α è un angolo compreso tra 0° e 90° verso Nord e verso Sud
- **longitudine** è la distanza angolare β tra il meridiano di Greenwich e il meridiano che passa per P; β è un angolo compreso tra 0° e 180° verso Est e verso Ovest.

Il **cammino ortodromico**, cioè la distanza sferica tra due punti $A : lat_A,\ long_A$ e $B : lat_B,\ long_B$ è dato dalla formula

$$AB = \arccos\left[\sin(lat_A)\sin(lat_B) + \cos(lat_A)\cdot\cos(lat_B)\cos(long_B - long_A)\right]$$

Trigonometria sferica

LA GEOMETRIA SULLA SFERA

Comprensione

1 Barra vero o falso.

a. Su una superficie sferica esiste un solo circolo massimo. V F

b. Intersecando una sfera con un piano si ottiene sempre un circolo massimo. V F

c. Per due punti su una sfera passa una e una sola circonferenza massima. V F

d. Il centro di un circolo massimo coincide con il centro della sfera. V F

2 Su una superficie sferica:

a. tre punti individuano sempre un triangolo sferico V F

b. tre punti non appartenenti alla stessa circonferenza massima individuano un triangolo sferico V F

c. due semicirconferenze massime che hanno il diametro in comune individuano un fuso che ha come ampiezza l'angolo formato dalle due semicirconferenze V F

d. il cammino più breve che congiunge due punti è un qualsiasi arco di circonferenza che passa per quei due punti. V F

3 In un triangolo sferico:

a. la somma degli angoli è maggiore di 180° V F

b. i lati si possono misurare in gradi V F

c. ci può essere più di un angolo retto V F

d. la somma dei lati non può essere maggiore di un angolo piatto. V F

4 Completa. In ogni triangolo sferico *ABC*:

a. si chiama difetto sferico ....

b. si chiama eccesso sferico ....

c. l'area è uguale a ....

Applicazione

5 Stabilisci in quali dei seguenti casi non esiste il triangolo sferico spiegandone il motivo.

a. $a = 15°$ $b = 25°$ $c = 132°$

b. $\widehat{A} = 130°$ $\widehat{B} = 78°$ $\widehat{C} = 97°$

c. $a = 150°$ $b = 112°$ $c = 215°$

d. $\widehat{A} = 27°$ $\widehat{B} = 32°$ $\widehat{C} = 45°$ [a., c., d.]

6 Calcola il difetto sferico nei seguenti casi:

a. $a = 87°$ $b = 95°$ $c = 65°$

b. $a = 115°$ $b = 108°$ $c = 125°$

c. $a = 92°$ $b = 74°$ $c = 106°$ [113°, 12°, 88°]

7 Calcola l'eccesso sferico nei seguenti casi:

a. $\widehat{A} = 92°$ $\widehat{B} = 77°$ $\widehat{C} = 136°$

b. $\widehat{A} = 215°$ $\widehat{B} = 117°$ $\widehat{C} = 184°$

c. $\widehat{A} = 90°$ $\widehat{B} = 218°$ $\widehat{C} = 195°$ [125°, 336°, 323°]

8 Calcola l'area dei seguenti triangoli sferici appartenenti alla sfera trigonometrica.

a. $\widehat{A} = 68°$ $\widehat{B} = 135°$ $\widehat{C} = 95°$

b. $\widehat{A} = 208°$ $\widehat{B} = 164°$ $\widehat{C} = 125°$

c. $\widehat{A} = 68°$ $\widehat{B} = 95°$ $\widehat{C} = 154°$ [118°, 317°, 137°]

LA TRIGONOMETRIA SFERICA

Comprensione

9 Indica quali tra le seguenti relazioni esprimono correttamente la relazione del teorema dei seni.

a. $\sin \widehat{A} \cdot \sin c = \sin a \cdot \sin \widehat{C}$

b. $\dfrac{\sin b}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{\sin c}{\sin \widehat{B}}$

c. $\sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{B} = \sin b \cdot \sin a$

d. $\sin c \cdot \sin \widehat{B} = \sin b \cdot \sin \widehat{C}$

10 Di un triangolo sferico sono assegnati alcuni elementi. In quali dei casi presentati di seguito è possibile risolvere il triangolo?

a. a, b, c **b.** a, b, C **c.** A, B, b **d.** b, c, B

11 Se sono noti tre elementi di un triangolo sferico è sempre possibile risolvere il triangolo. E' vera o falsa questa affermazione?

12 In ciascuno dei seguenti casi sono noti alcuni elementi; specifica quale teorema si deve applicare per trovare quello indicato.

a. elementi noti: $b \quad c \quad \widehat{A}$ elemento da trovare: a

b. elementi noti: $\widehat{A} \quad \widehat{B} \quad \widehat{C}$ elemento da trovare: b

c. elementi noti: $\widehat{B} \quad \widehat{C} \quad a$ elemento da trovare: c

d. elementi noti: $\widehat{A} \quad \widehat{B} \quad a$ elemento da trovare: b

Applicazione

Risolvi i seguenti triangoli sferici noti i tre angoli.

13 **ESERCIZIO GUIDA**

$\widehat{A} = 145°$ $\widehat{B} = 95°$ $\widehat{C} = 107°$

Usiamo il secondo teorema del coseno per trovare i tre lati:

$$\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} + \sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos a \quad \rightarrow \quad \cos a = \frac{\cos\widehat{A} + \cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}{\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}} = -0{,}833104569 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad a = 146°25'8''$$

$$\cos\widehat{B} = -\cos\widehat{A}\cos\widehat{C} + \sin\widehat{A}\sin\widehat{C}\cos b \quad \rightarrow \quad \cos b = \frac{\cos\widehat{B} + \cos\widehat{A}\cos\widehat{C}}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{C}} = 0{,}277734336 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad b = 73°52'30''$$

$$\cos\widehat{C} = -\cos\widehat{A}\cos\widehat{B} + \sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\cos c \quad \rightarrow \quad \cos c = \frac{\cos\widehat{C} + \cos\widehat{A}\cos\widehat{B}}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}} = -0{,}386734954 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad c = 112°45'5''$$

14 $\widehat{A} = 84°$ $\quad\widehat{B} = 124°$ $\quad\widehat{C} = 100°$ $\quad$ [75°42′8″; 126°7′12″; 106°21′]

15 $\widehat{A} = 87°$ $\quad\widehat{B} = 97°$ $\quad\widehat{C} = 75°$ $\quad$ [88°45′26″; 96°26′52″; 75°14′42″]

16 $\widehat{A} = 156°$ $\quad\widehat{B} = 128°$ $\quad\widehat{C} = 135°$ $\quad$ [149°7′2″; 83°57′; 116°49′55″]

Risolvi i seguenti triangoli sferici noti due lati e l'angolo compreso.

17 **ESERCIZIO GUIDA**

$a = 76°$ $\quad b = 66°$ $\quad \widehat{C} = 148°$

Applichiamo il primo teorema del coseno e troviamo il lato c:

$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\widehat{C} = \cos 76°\cos 66° + \sin 76°\sin 66°\cos 148° = -0{,}653319179$

da cui $\quad c = 130°47'32''$

Per trovare gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ puoi adesso applicare ancora lo stesso teorema oppure il teorema dei seni; nella valutazione degli angoli tieni sempre presente che al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore.

$[\widehat{A} = 42°46'40'';\ \widehat{B} = 39°44'59'']$

18 $b = 125°$ $\quad c = 164°$ $\quad \widehat{A} = 92°$ $\quad$ $[a = 57°4'46'';\ \widehat{B} = 102°46'22'';\ \widehat{C} = 160°50'33'']$

19 $a = 87°$ $\quad c = 48°$ $\quad \widehat{B} = 65°$ $\quad$ $[b = 69°35'42'';\ \widehat{A} = 105°3'31'';\ \widehat{C} = 45°56'23'']$

20 $a = 114°$ $\quad b = 132°$ $\quad \widehat{C} = 118°$ $\quad$ $[c = 92°40'8'';\ \widehat{A} = 126°8'56'';\ \widehat{B} = 138°56'18'']$

Risolvi i seguenti triangoli sferici noti due angoli e il lato tra essi compreso.

21 **ESERCIZIO GUIDA**

$\widehat{A} = 63°$ $\quad \widehat{B} = 87°$ $\quad c = 154°$

Possiamo applicare il teorema delle cotangenti per trovare il lato a:

$\text{cotan}\ a \sin c = \cos c \cdot \cos\widehat{B} + \sin\widehat{B} \cdot \text{cotan}\ \widehat{A}$

$$\text{cotan}\ a = \frac{\cos c \cdot \cos\widehat{B} + \sin\widehat{B} \cdot \text{cotan}\ \widehat{A}}{\sin c} = \frac{\cos 154°\cos 87° + \sin 87°\text{cotan}\ 63°}{\sin 154°} = 1{,}053417681$$

da cui $\quad a = 43°30'35''$

Puoi adesso procedere applicando il teorema dei seni o il primo teorema del coseno.

$[\widehat{C} = 145°26'10'',\ b = 50°30'4'']$

22 $\widehat{A} = 85°$ $\widehat{C} = 106°$ $b = 93°$ $[a = 84°21'55''; \ c = 106°12'17''; \ \widehat{B} = 88°30'19'']$

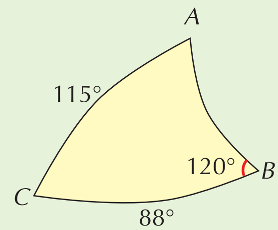
23 $\widehat{B} = 168°$ $\widehat{C} = 168°$ $a = 142°$ $[b = c = 108°36'49''; \ \widehat{A} = 172°14'14'']$

24 $\widehat{A} = 94°$ $\widehat{B} = 103°$ $c = 42°$ $[b = 112°51'47''; \ a = 109°22'29''; \ \widehat{C} = 45°2'15'']$

Risolvi i seguenti triangoli sferici noti due lati e l'angolo opposto a uno di essi.

25 **ESERCIZIO GUIDA**

$a = 88°$ $b = 115°$ $\widehat{B} = 120°$



Applichiamo il teorema dei seni per calcolare $\widehat{A}$:

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} \quad \rightarrow \quad \sin \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{B} \cdot \sin a}{\sin b} = \frac{\sin 120° \cdot \sin 88°}{\sin 115°} = 0{,}954971$$

Può quindi essere $\widehat{A} = 72°44'26''$ oppure $\widehat{A} = 107°15'34''$. Ci sono dunque due possibilità.

Per trovare il lato c e l'angolo $\widehat{C}$ dobbiamo scrivere il seguente sistema che sfrutta i due teoremi del coseno:

$$\begin{cases} \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \widehat{C} \\ \cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos c \end{cases}$$

I caso: $\begin{cases} \cos c = \cos 88° \cdot \cos 115° + \sin 88° \cdot \sin 115° \cdot \cos \widehat{C} \\ \cos \widehat{C} = -\cos 72°44'26'' \cos 120° + \sin 72°44'26'' \sin 120° \cos c \end{cases}$

II caso: $\begin{cases} \cos c = \cos 88° \cdot \cos 115° + \sin 88° \cdot \sin 115° \cdot \cos \widehat{C} \\ \cos \widehat{C} = -\cos 107°15'34'' \cos 120° + \sin 107°15'34'' \sin 120° \cos c \end{cases}$

Risolvendo i due sistemi (conviene usare un software adeguato) si completa la risoluzione del triangolo. $[c_1 = 61°31'40''; \ \widehat{C}_1 = 57°8'15''; \ c_2 = 126°27'45''; \ \widehat{C}_2 = 129°46'51'']$

26 $a = 68°$ $b = 92°$ $\widehat{A} = 140°$ $[\widehat{B} = 136°8'39''; \ \widehat{C} = 160°40'; \ c = 151°27'27'']$

27 $b = 67°$ $c = 65°$ $\widehat{B} = 82°$ $[\widehat{C} = 77°9'37''; \ a = 98°45'51''; \ \widehat{A} = 100°15'20'']$

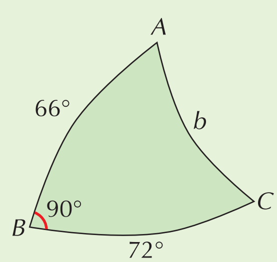
28 $a = 45°$ $c = 95°$ $\widehat{C} = 84°$ $[\widehat{A} = 44°54'14''; \ b = 94°53'46''; \ \widehat{B} = 97°41'54'']$

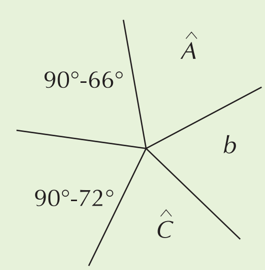
Risolvi i seguentri triangoli rettangoli sferici.

29 **ESERCIZIO GUIDA**

$\widehat{B} = 90°$ $a = 72°$ $c = 66°$

Costruiamo il pentagono per applicare la regola di Nepero:





Applichiamo la seconda regola e troviamo il lato b:

$\cos b = \sin 18° \sin 24° = 0{,}125688534$

da cui $b = 82°46'46''$

Applichiamo la prima regola per trovare gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$:

$\cos\widehat{A} = \cotan b \cdot \cotan 24° = 0{,}284559119 \quad \rightarrow \quad \widehat{A} = 73°28'3''$

$\cos\widehat{C} = \cotan b \cdot \cotan 18° = 0{,}389923676 \quad \rightarrow \quad \widehat{C} = 67°3'1''$

30 $\widehat{B} = 90°$ $\quad a = 14°$ $\quad b = 25°$ $\quad [\widehat{C} = 57°40'39''; \ c = 20°55'28''; \ \widehat{A} = 34°55'13'']$

31 $\widehat{A} = 90°$ $\quad b = 64°$ $\quad c = 87°$ $\quad [a = 88°41'7''; \ \widehat{B} = 64°1'44''; \ \widehat{C} = 87°18'11'']$

32 $\widehat{A} = 90°$ $\quad c = 124°$ $\quad a = 102°$ $\quad [\widehat{B} = 89°56'52''; \ \widehat{C} = 122°3'10''; \ b = 89°56'18'']$

33 $\widehat{C} = 90°$ $\quad \widehat{A} = 127°$ $\quad c = 98°$ $\quad [a = 52°15'59''; \ \widehat{B} = 100°27'50''; \ b = 1°26'54'']$

34 $\widehat{C} = 90°$ $\quad \widehat{B} = 87°$ $\quad a = 115°$ $\quad [\widehat{A} = 114°57'48''; \ c = 91°23'53''; \ b = 86°41'26'']$

35 $\widehat{B} = 90°$ $\quad \widehat{A} = 118°$ $\quad \widehat{C} = 136°$ $\quad [b = 56°35'30''; \ c = 35°26'31''; \ a = 47°28'53'']$

UN'APPLICAZIONE: LA NAVIGAZIONE ORTODROMICA

Comprensione

36 Un punto sulla superficie terrestre è individuato in modo unico assegnando:
a. la latitudine
b. la longitudine
c. sia la latitudine che la longitudine
d. la latitudine, la longitudine e la distanza dai poli

37 Il cammino ortodromico tra due punti A e B della Terra è:
a. il segmento che ha per estremi A e B
b. la distanza sferica tra A e B
c. un qualunque arco di circonferenza che appartiene alla sfera e che unisce A e B
d. la somma degli archi AN e NB dove N è uno dei due poli terrestri.

38 In un cammino ortodromico tra due punti A e B fissati, l'angolo di rotta è:
a. costante e minore di un angolo retto
b. costante e minore di 180°
c. variabile a seconda della posizione sulla distanza AB
d. variabile a seconda della distanza di A e B dai poli.

Applicazione

Trova il percorso minimo che unisce i punti A e B che hanno le coordinate indicate.

39 A : 15°Est, 68°Nord $\quad B$: 24°Est, 40°Nord

40 A : 34°Ovest, 64°Nord $\quad B$: 12°Ovest, 20°Sud

41 A : 32°Est, 68°Sud $\quad B$: 24°Ovest, 15°Sud

42 A : 65°Ovest, 18°Nord $\quad B$: 8°Est, 39°Sud

43 A : 154°Est, 25°Sud $\quad B$: 11°Est, 72°Nord

44 A : 62°Ovest, 62°Nord $\quad B$: 37°Est, 25°Sud

Calcola l'angolo di rotta iniziale nei seguenti cammini ortodromici.

45 $A: 48°$Est, $16°$Nord $B: 12°$Ovest, $65°$Nord

46 $A: 115°$Est, $26°$Nord $B: 86°$Est, $66°$Sud

47 $A: 82°$Ovest, $20°$Sud $B: 30°$Est, $15°$Nord

Per la verifica delle competenze

1 Cerca la latitudine e la longitudine di Roma e di New York e calcola la loro distanza minima sulla superficie terrestre tenendo presente che il raggio medio della Terra è di 6 367,45km.

2 Ripeti la stessa valutazione dell'esercizio precedente calcolando la distanza tra Londra e Buenos Aires.

3 Determina l'angolo iniziale di rotta dell'ortodromia che congiunge Atene con Pechino.

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** V **2** **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** F **3** **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** F

4 **a.** $D = 360° - (a + b + c)$, **b.** $E = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 180°$, **c.** $S = \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 180°\right) r^2$

9 **a.**, **d.** **10** **c.**, **d.** **11** V

12 **a.** I teorema del coseno, **b.** II teorema del coseno, **c.** teorema della cotangente, **d.** teorema dei seni

36 **c.** **37** **b.** **38** **c.**

Test finale di autovalutazione

1 Su una superficie sferica una geodetica è:
- **a.** una qualsiasi linea che congiunge due punti
- **b.** la linea di lunghezza minore che unisce due punti
- **c.** un arco di circonferenza che unisce due punti
- **d.** il segmento che attraversa la sfera e che unisce due punti.

10 punti

2 Barra vero o falso.
- **a.** La distanza sferica tra due punti si misura tramite l'angolo che ha vertice nel centro della sfera i cui lati passano per i due punti. V F
- **b.** Un fuso sferico è la parte di sfera delimitata da due semipiani aventi come origine comune un diametro della sfera. V F
- **c.** Un triangolo sferico è la parte di superficie sferica delimitata da tre circonferenze massime che si intersecano a due a due. V F
- **d.** I lati di un triangolo sferico si misurano in funzione degli angoli che hanno il vertice nel centro della sfera e insistono su di essi. V F

10 punti

3 Su una sfera di centro O rappresenta i seguenti elementi: una circonferenza massima Γ e un suo polo P, una circonferenza minore ad essa parallela, due circonferenze massime uscenti da P che intersecano Γ in A e B e la circonferenza minore in C e D. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- **a.** Il triangolo PAB è birettangolo.
- **b.** Il triangolo PCD è trirettangolo se le circonferenze massime uscenti da P sono perpendicolari.
- **c.** Tra i segmenti sferici rappresentati non ne esistono di congruenti.
- **d.** Se PCD è trirettangolo, lo è anche PAB.

10 punti

4 Di un triangolo sferico ABC si sa che $b = 32°$, $c = 30°$ e $\widehat{A} = 90°$. Per trovare l'ipotenusa a utilizzando la regola di Nepero si deve usare la formula:
- **a.** $\cos a = \sin 60° \sin 58°$
- **b.** $\cos a = \sin 30° \sin 32°$
- **c.** $\cos a = \text{cotan } 60° \text{ cotan } 58°$
- **d.** $\cos a = \text{cotan } 30° \text{ cotan } 32°$

15 punti

5 Di un triangolo sferico sono noti i seguenti elementi: $a = 40°$, $b = 60°$, $\widehat{C} = 120°$. Risolvi il triangolo.

25 punti

6 Trova il percorso minimo che unisce i punti $A: 27°E,\ 12°S$ e $B: 82°E,\ 85°S$.

20 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	Totale
Punteggio							

Voto: $\dfrac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 **b.**

2 **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** V

3 **a.**, **b.**, **d.**

4 **a.**

5 $c = 83°59'27''$, $\widehat{A} = 34°2'18''$, $\widehat{B} = 48°57'2''$

6 $60°56'$