APPROFONDIMENTO

Considerazioni sui vari tipi di media

Le medie che abbiamo studiato in questo paragrafo si dicono **medie ferme** perché, per calcolarle, sono necessari tutti i dati della distribuzione.
Indubbiamente fra le medie ferme quella più conosciuta è la media aritmetica e sembra che gli altri tipi siano solo qualcosa di teorico scarsamente usato per le questioni concrete. In realtà le cose non stanno così e presentiamo due esempi nei quali appare evidente che il calcolo della media aritmetica non darebbe i risultati voluti.

I esempio

Un'automobile percorre un tratto di strada $s_1 = 20\text{km}$ ad una velocità costante $v_1 = 40\text{km/h}$, un tratto di strada $s_2 = 50\text{km}$ ad una velocità costante $v_2 = 60\text{km/h}$, un tratto di autostrada $s_3 = 80\text{km}$ ad una velocità costante $v_3 = 120\text{km/h}$; ci chiediamo quale sia stata la sua velocità media $\overline{v}$ durante l'intero percorso.

La risposta che verrebbe immediata è che $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$; tuttavia, se riflettiamo per un attimo, ci sorge qualche dubbio sulla correttezza di questa risposta perché dobbiamo pensare ad un valore medio come a quello che, sostituito ai valori dati, non cambia la situazione (se nei compiti di matematica hai preso 6, 5, 7, la tua media è 6 perché è come se tu, nei tre compiti, avessi preso 6, 6, 6).
La risposta allora non può essere data senza una ulteriore riflessione sul fine rispetto al quale vogliamo calcolare la media: vogliamo che si mantenga inalterato il tempo totale del viaggio? Oppure desideriamo che si mantenga inalterato il consumo di carburante o quello degli pneumatici?
Se lo scopo è quello di mantenere inalterato il tempo totale dobbiamo ragionare così.

Il tempo complessivo t impiegato a percorrere i tre tratti di strada è dato da $t = \dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2} + \dfrac{s_3}{v_3}$.

La velocità media $\overline{v}$ è quella che, sostituita al posto di v_1, v_2, v_3, non altera il tempo; deve cioè essere vero che

$$\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{\overline{v}}$$

Se risolviamo rispetto a $\overline{v}$ l'equazione ottenuta, abbiamo che $\overline{v} = \dfrac{s_1 + s_2 + s_3}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2} + \dfrac{s_3}{v_3}}$

Quella che abbiamo ottenuto è la formula della media armonica che, per quanto riguarda il nostro esempio, dà il seguente valore per la velocità media:

$$\overline{v} = \frac{20 + 50 + 80}{\dfrac{20}{40} + \dfrac{50}{60} + \dfrac{80}{120}} = 75\text{km/h}$$

Se, come abbiamo detto inizialmente, avessimo calcolato la media aritmetica fra le tre velocità avremmo ottenuto che $\overline{v} = \dfrac{40 + 60 + 120}{3} \approx 73{,}33(\text{km/h})$ e questo risultato è sbagliato perché in questo modo il tempo impiegato a percorrere l'intero tragitto sarebbe stato diverso:

- tempo complessivo con i dati del problema: $t = \dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2} + \dfrac{s_3}{v_3} = \dfrac{20}{40} + \dfrac{50}{60} + \dfrac{80}{120} = 2\text{h}$
- tempo complessivo con la velocità media calcolata con la media armonica: $t = \dfrac{s}{\overline{v}} = \dfrac{20 + 50 + 80}{75} = 2\text{h}$

- tempo complessivo con la velocità media calcolata con la media aritmetica:

$$t = \frac{s}{\overline{v}} = \frac{20 + 50 + 80}{73,33} = 2,0455\text{h} = 2^{\text{h}}2^{\text{m}}44^{\text{s}}.$$

II esempio

Abbiamo impegnato un capitale di € 20000 in una forma di investimento che dura 8 anni e che ha un tasso di interesse che viene rivalutato anno per anno ed è i_1 il primo anno, i_2 il secondo e così via secondo la tabella che segue:

i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8
2,5%	3,2%	3,0%	3,5%	3,8%	4,0%	3,6%	3,5%

alla fine del periodo, la Banca ci comunica che il capitale restituito è di € 28195,92. Ci chiediamo qual è stato il tasso medio di investimento.

Cominciamo innanzi tutto col dire che se investiamo un capitale C ad un tasso annuale i_1, alla fine dell'anno il capitale ottenuto C' vale C più gli interessi, che si calcolano moltiplicando il capitale per il tasso di interesse; si ha quindi che:

$$C' = C + C \cdot i_1 = C(1 + i_1)$$

All'inizio dell'anno successivo il nuovo capitale investito non è più C ma C' e quindi, alla fine del secondo anno si ottiene un capitale pari a:

$$C'' = C' + C' \cdot i_2 = C'(1 + i_2) = C(1 + i_1)(1 + i_2)$$

Proseguendo in questo modo, alla fine degli 8 anni si ottiene un capitale C^* uguale a:

$$C^* = C(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot ..... \cdot (1 + i_8) \qquad (\mathbf{A})$$

Il capitale che la Banca ha restituito è stato calcolato proprio con questa formula:

$$C^* = 20000(1 + 0,025)(1 + 0,032)(1 + 0,03)(1 + 0,035)(1 + 0,038)(1 + 0,04)(1 + 0,036)(1 + 0,035) = 26\,106,10$$

Chiedersi quale sia stato il tasso medio di investimento significa domandarsi a quale tasso costante $\overline{i}$ avremmo dovuto investire lo stesso capitale C per avere dopo 8 anni C^*. Si tratta quindi di sostituire $\overline{i}$ al posto dei vari tassi i_1, i_2, ... nella formula (**A**) e ricavare poi da essa il valore di $\overline{i}$:

$$C^* = C\underbrace{(1 + \overline{i})(1 + \overline{i}) \cdot ...... \cdot (1 + \overline{i})}_{\text{8 volte}} = C(1 + \overline{i})^8$$

cioè, tenendo conto dell'espressione di C^*: $C(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot ..... \cdot (1 + i_8) = C(1 + \overline{i})^8$

Da questa equazione ricaviamo che

$$(1 + \overline{i})^8 = (1 + i_1)(1 + i_2) \cdot ..... \cdot (1 + i_8) \qquad \text{cioè} \qquad 1 + \overline{i} = \sqrt[8]{(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot ..... \cdot (1 + i_8)}$$

L'espressione $1 + \overline{i}$ dalla quale ricavare poi $\overline{i}$ è quindi la media geometrica fra i valori $(1 + i_1)$, $(1 + i_2)$, ..., $(1 + i_8)$.
Nel nostro caso troviamo che $1 + \overline{i} \approx 1,0339$ quindi $\overline{i} = 0,0339...$ che corrisponde ad un tasso percentuale del 3,39%.

Anche in questo caso la media aritmetica fra i vari tassi non sarebbe stato un valore appropriato.

Ogni problema ha dunque il suo particolare tipo di media da dover calcolare. In generale possiamo dire che si usa la media aritmetica per determinare un valore che esprime un concetto di equidistribuzione, per esempio la media dei redditi, delle retribuzioni in un certo settore e così via; si usa la media geometrica per determinare il tasso medio di accrescimento di un fenomeno, per esempio il tasso di interesse medio come visto nel II esempio; si usa la media quadratica quando si vuole eliminare l'influenza dei segni dei valori della distribuzione; infine si usa la media armonica quando si deve introdurre il reciproco del carattere, come nel caso del I esempio dove, per mantenere costante il tempo si è dovuto valutare il rapporto $\frac{s}{v}$ (quindi il reciproco di v).