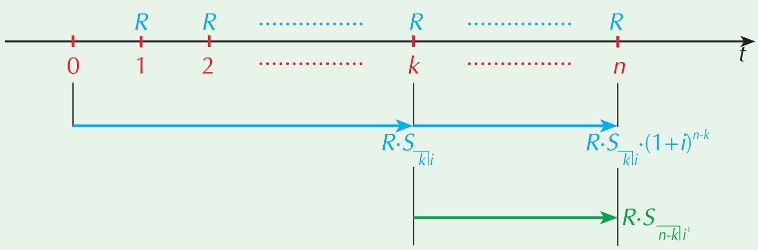
Altri problemi sulle rendite

Nel tempo di durata di una rendita, può capitare che intervengano delle variazioni rispetto a quelle concordate all'atto della stipula del contratto; queste variazioni possono riguardare il tasso di interesse applicato o una modifica dell'importo della rata.

Il cambiamento del tasso di interesse

Supponiamo che, dopo il pagamento delle prime k rate ad un tasso di interesse i, alle rimanenti $n-k$ venga applicato un tasso d'interesse i'.
La valutazione del montante di questa rendita viene fatto in questo modo:



- si determina il montante di una prima rendita di k rate di importo R al tasso i e lo si capitalizza per un tempo pari a $n-k$ periodi al tasso i' : $R \cdot s_{\overline{k}|i} \cdot (1+i)^{n-k}$
- si determina il montante di una seconda rendita di $n-k$ rate di importo R al tasso i' : $R \cdot s_{\overline{n-k}|i'}$
- si sommano i due montanti ottenuti.

Esempio

Alla fine di ogni anno versiamo una rata di € 600 al tasso annuo del 2,5%. Dopo il quarto versamento, il tasso scende al 2% annuo. Qual è il valore della rendita alla sua scadenza?
Il montante delle prime 4 rate, valutato all'alto del versamento della quarta rata, è uguale a: $600 \cdot s_{\overline{4}|0,025}$

Tale somma va poi capitalizzata per i rimanenti 6 anni di durata della rendita: $600 \cdot s_{\overline{4}|0,025} \cdot (1+0,02)^6$

Dopo il cambiamento del tasso, la nuova rendita è formata da 6 rate di pari importo valutate al nuovo tasso del 2%; il suo montante è pari a: $600 \cdot s_{\overline{6}|0,02}$

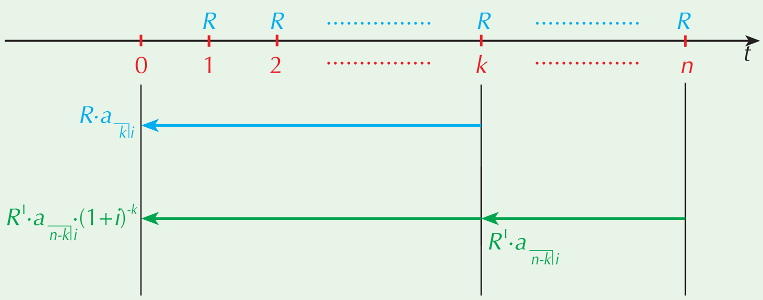
Il montante complessivo della rendita è uguale a: $M = 600 \cdot s_{\overline{4}|0,025} \cdot (1+0,02)^6 + 600 \cdot s_{\overline{6}|0,02} = 6590,72(€)$

Il cambiamento della rata

Una rendita composta da n rate può prevedere una serie di k rate di un certo importo R e una seconda serie di $n-k$ rate di importo R', tutte allo stesso tasso.
Il montante di una rendita di questo tipo si calcola in modo analogo al montante della precedente rendita, in questo caso cambia l'importo della rata e non il tasso:

- si determina il montante della prima rendita di k rate di importo R al tasso i e lo si capitalizza per un tempo pari a $n-k$ periodi: $R \cdot s_{\overline{k}|i} \cdot (1+i)^{n-k}$
- si determina il montante di una seconda rendita di $n-k$ rate di importo R' allo stesso tasso i: $R' \cdot s_{\overline{n-k}|i}$
- si sommano i due montanti ottenuti.

Il valore attuale si determina con un analogo ragionamento:



- si determina il valore attuale di una rendita immediata di k rate di importo R: $R \cdot a_{\overline{k}|i}$
- si determina il valore attuale di una seconda rendita di $n-k$ rate di importo R' differita di k periodi: $R' \cdot a_{\overline{n-k}|i} \cdot (1+i)^{-k}$
- si sommano i due valori attuali ottenuti.

I esempio

Una rendita è formata da 10 rate annue di cui le prime quattro di € 500 e le rimanenti sei di € 600; il tasso è del 10% annuo. Calcoliamo il montante della rendita.
Calcoliamo il montante di una rendita di 4 rate di importo 500 e poi lo capitalizziamo per 6 anni:

$$M_1 = 500 \cdot \frac{(1+0{,}10)^4 - 1}{0{,}10} \cdot (1+0{,}10)^6 = 4110{,}91(€)$$

il montante della seconda rendita di 6 rate di importo € 600:

$$M_2 = 600 \cdot \frac{(1+0{,}10)^6 - 1}{0{,}10} = 4629{,}37(€)$$

Il montante della rendita è $M = 4110{,}91 + 4629{,}37 = 8740{,}28(€)$

II esempio

Davide ha diritto a riscuotere una rendita formata da 10 rate annue posticipate, di cui le prime tre di € 8900 e le altre di € 9500. Cede tale diritto come anticipo per l'acquisto di un immobile e la cessione viene fatta ad un tasso annuo del 6%. Quanto vale l'anticipo che Davide versa?
Si tratta di valutare:

- il valore attuale di una rendita immediata posticipata di 3 rate di importo € 8900: $8900 \cdot a_{\overline{3}|0{,}06}$
- il valore attuale di una rendita posticipata composta da 7 rate di importo € 9500, differita di 3 periodi: $9500 \cdot a_{\overline{7}|0{,}06} \cdot (1+0{,}06)^{-3}$

Il valore attuale della rendita è: $V = 8900 \cdot a_{\overline{3}|0{,}06} + 9500 \cdot a_{\overline{7}|0{,}06} \cdot (1+0{,}06)^{-3} = 6831{,}70(€)$