La logica

OBIETTIVI

- riconoscere proposizioni e individuarne il valore di verità
- operare con le proposizioni e riconoscere equivalenze logiche
- stabilire la correttezza di un ragionamento logico
- operare con i predicati
- usare in modo appropriato i quantificatori

1 LE PROPOSIZIONI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 17

Un qualunque ragionamento è, in ultima analisi, composto da frasi di senso compiuto che, in logica, prendono il nome di *proposizioni*.

Chiamiamo **proposizione** una frase di senso compiuto della quale si può dire se è vera o se è falsa.
Quando una proposizione è vera diremo che il suo valore di verità è Vero (V), quando è falsa diremo che il suo valore di verità è Falso (F).

*Le proposizioni si chiamano anche **enunciati** e si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto.*

In base a questa definizione, sono proposizioni le seguenti frasi:

a: «Pasqua cade sempre di domenica.» valore di verità: V

b: «Le balene sono mammiferi.» valore di verità: V

c: «$\frac{5}{4}$ è un numero intero.» valore di verità: F

d: «Torino si trova in Veneto.» valore di verità: F

Non sono invece proposizioni in quanto non ha senso chiedersi se sono vere o false:

«Portami un pacchetto di caramelle.»

«Viva il Milan!»

«Quanti anni hai?»

Sono da annoverare fra le proposizioni anche frasi del tipo:

«Esistono dei numeri che sono interi.»

«In classe c'è qualcuno che non ha il libro di matematica.»

Anche se non si sta parlando di un numero o di uno studente particolare, tuttavia possiamo dire che la prima frase è vera, che la seconda è falsa solo se gli studenti hanno tutti il libro di matematica ed è vera negli altri casi; entrambe sono perciò delle proposizioni.

Le proposizioni sono dunque quelle frasi che asseriscono un fatto, vero o falso che sia.

I valori di verità V e F sono a volte sostituiti dai simboli 1 e 0:

$V \rightarrow 1 \qquad F \rightarrow 0$

Poiché lo scopo che ci prefiggiamo è quello di costruire dei metodi che ci permettano di stabilire la correttezza o meno di un ragionamento, dobbiamo richiedere che le proposizioni soddisfino alcune caratteristiche:

I PRINCIPI FONDAMENTALI

Principio di non contraddizione: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.

Principio del terzo escluso: una proposizione è vera oppure falsa, non esistono altre possibilità.

Il tipo di logica che ci accingiamo a studiare può dunque controllare la correttezza solo di quei ragionamenti che coinvolgono proposizioni, le quali, a loro volta, devono obbedire alle regole fissate dai due principi di non contraddizione e del terzo escluso.
Ma un ragionamento, di solito, è una cosa complessa, composta da molte proposizioni legate fra loro. Per esempio:

«Giovanni studia al Conservatorio perché ama la musica e vuole diventare un direttore d'orchestra»

è indubbiamente una proposizione (conoscendo Giovanni possiamo sicuramente dire se questa frase è vera o no), ma possiamo ritenere che essa sia formata da più proposizioni di carattere più semplice:

- *a*: «Giovanni studia al Conservatorio»
- *b*: «Giovanni ama la musica»
- *c*: «Giovanni vuole diventare direttore d'orchestra»

e che, in ultima analisi, il valore di verità della proposizione iniziale dipenda dai valori di verità di ciascuna delle proposizioni più semplici.
Dobbiamo quindi fissare delle regole che permettano di stabilire il valore di verità di una proposizione complessa ottenuta dalla combinazione di proposizioni semplici. Chiariamo innanzi tutto cosa intendiamo per "proposizione semplice".
La caratteristica delle proposizioni *a*, *b*, *c* precedenti è che sono formate da una sola forma verbale, il **predicato**, alla quale sono eventualmente collegati alcuni **argomenti**:

Che cosa possiamo dire dell'intera proposizione sapendo che Giovanni studia al Conservatorio e ama la musica (a e b vere), ma non vuole diventare direttore d'orchestra (c falsa)?

PROPOSIZIONE	PREDICATO	ARGOMENTI
a	studiare	Giovanni, Conservatorio
b	amare	Giovanni, musica
c	diventare	Giovanni, direttore d'orchestra

PROPOSIZIONI ATOMICHE E MOLECOLARI

Una proposizione si dice **atomica** se è formata da un solo predicato.

Le proposizioni atomiche possono avere uno, due o più argomenti, ma possono anche non averne. Per esempio:

- «La campana suona» - predicato: suonare
  - argomento: la campana
- «Piove» - predicato: piovere
  - non ci sono argomenti

Le proposizioni che sono formate da più proposizioni atomiche si dicono **molecolari**.

Le proposizioni molecolari sono il risultato di alcune operazioni fra proposizioni atomiche nelle quali i simboli di operazione sono alcune particelle della lingua parlata come "e", "o", "non" e così via.
Nei prossimi paragrafi ci occuperemo di studiare come valutare il valore di verità delle proposizioni molecolari in base alle operazioni che legano fra loro le proposizioni atomiche.

2 Le operazioni con le proposizioni

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 18

Gli operatori che si usano per comporre fra loro le proposizioni si chiamano **connettivi** ed operano, a seconda del tipo, su una sola o su due proposizioni alla volta; il risultato dell'operazione ha un valore di verità che dipende sia dal connettivo usato, sia dal valore di verità delle proposizioni atomiche coinvolte.
Per rappresentare i possibili risultati, si usano delle tabelle che prendono il nome di **tavole di verità**; in esse, le prime colonne riportano le possibili combinazioni dei valori di verità delle proposizioni coinvolte mentre la colonna finale indica il valore di verità della proposizione molecolare. Così:

- se abbiamo una sola proposizione *a*, la tavola ha due sole righe perché *a* può essere vera oppure falsa;
- se abbiamo due proposizioni *a* e *b*, ci sono 4 possibili combinazioni.

a
V
F

a	***b***
V	V
V	F
F	V
F	F

Vediamo allora quali sono le operazioni che si possono eseguire con le proposizioni.

La negazione

È l'operazione logica che, data una proposizione *a*, restituisce la proposizione «**non** *a*».
La proposizione «**non** *a*» è F quando *a* è V ed è V quando *a* è F.
Il simbolo logico della negazione è un trattino posto sopra la lettera che individua la proposizione:

$$\overline{a}$$

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Per indicare la negazione si può anche usare il simbolo ¬ anteposto alla proposizione: $\neg a$

Occorre fare attenzione alle modalità con cui si esprime una negazione; è corretto anteporre il connettivo *non* alla forma verbale, oppure la frase *non è vero che* all'intera proposizione; per esempio:

- la negazione di *a*: «il rombo ha i lati congruenti» si può esprimere indifferentemente nei seguenti due modi:
  - $\overline{a}$: «il rombo **non** ha i lati congruenti»
  - $\overline{a}$: «**non è vero che** il rombo ha i lati congruenti».

  Poiché *a* è V, il valore di verità di $\overline{a}$ è F.

La doppia negazione di una proposizione coincide con la preposizione stessa:

$$\overline{\overline{a}} = a$$

In altre parole, una doppia negazione afferma.

Attenzione agli errori

Non è invece opportuno cambiare l'enunciazione della proposizione se si vogliono evitare errori.
Per esempio la negazione di «Ogni Italiano si sa esprimere nel dialetto locale» **non è** «Nessun Italiano si sa esprimere nel dialetto locale» **ma è** «Non è vero che ogni Italiano si sa esprimere nel dialetto locale».

La congiunzione

È l'operazione logica che, date due proposizioni a e b, restituisce la proposizione «a **e** b».
Tale proposizione si ritiene vera solo se entrambe le proposizioni a e b sono vere, falsa in tutti gli altri casi.
Il simbolo logico della congiunzione è $\wedge$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \wedge b$$

a	***b***	$a \wedge b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La congiunzione si può anche esprimere usando i termini:
et *dalla lingua latina;*
and *in linguaggio informatico.*

Per esempio:

- se a: «Dante ha scritto la *Divina Commedia*» (V) e b: «Alessandro Manzoni ha scritto *I promessi sposi*» (V), la proposizione $c = a \wedge b$: «Dante ha scritto la *Divina Commedia* e Alessandro Manzoni ha scritto *I promessi sposi*» è V
- se a: «12 è un numero pari» (V) e b: «8 è un numero dispari» (F), la proposizione $c = a \wedge b$: «12 è un numero pari e 8 è un numero dispari» è F.

La disgiunzione inclusiva

È l'operazione logica che, date due proposizioni a e b, restituisce la proposizione «a **o** b».
Tale proposizione si ritiene falsa solo se entrambe le proposizioni a e b sono false, vera in tutti gli altri casi.
Il simbolo logico della disgiunzione inclusiva è $\vee$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \vee b$$

a	***b***	$a \vee b$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione inclusiva si può anche esprimere usando i termini:
vel *dalla lingua latina;*
or *in linguaggio informatico.*

Per esempio:

- se a: «8 è pari» (V) e b: «12 è multiplo di 5» (F), la proposizione $c = a \vee b$: «8 è pari o 12 è multiplo di 5» è V;
- se a: «la lettera *i* è una vocale» (V) e b: «la lettera *c* è una consonante» (V), la proposizione $c = a \vee b$: «la lettera *i* è una vocale o la lettera *c* è una consonante» è V.

La disgiunzione esclusiva

È l'operazione logica che, date due proposizioni a e b, restituisce la proposizione «**o** a **o** b».
Tale proposizione si ritiene vera solo se le proposizioni a e b sono una falsa e l'altra vera, si considera falsa se le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false.
Il simbolo logico della disgiunzione inclusiva è $\dot\vee$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \dot\vee b$$

a	***b***	$a \dot\vee b$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione esclusiva si può anche esprimere usando i termini:
aut *dalla lingua latina;*
xor *in linguaggio informatico.*

Questa forma di disgiunzione è di frequente uso comune; si dice per esempio:

«o vieni o parto senza di te» «o sei promosso o sei bocciato»

Un altro esempio:

- se a: «3 è dispari» (V) e b: «3 è pari» (F), la proposizione $c = a \dot\vee b$: «o 3 è dispari o 3 è pari» è V (la disgiunzione può anche essere enunciata così: «3 o è dispari o è pari»).

L'implicazione materiale

È l'operazione logica che, date due proposizioni *a* e *b*, restituisce la proposizione «**se** *a* **allora** *b*».
Tale proposizione si ritiene falsa solo se la prima proposizione è vera e la seconda è falsa, vera in tutti gli altri casi.
Il simbolo logico dell'implicazione materiale è $\rightarrow$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \rightarrow b$$

a	b	$a \rightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nell'implicazione $a \rightarrow b$, la proposizione ***a*** si dice **premessa**, la proposizione ***b*** si dice **conseguenza**.
Per esempio:

- se *a*: «Le aquile sono uccelli» (V) e *b*: «I leoni sono mammiferi» (V), la proposizione $c = a \rightarrow b$: «Se le aquile sono uccelli allora i leoni sono mammiferi» è V
- se *a*: «Io sono un uccello» (F) e *b*: «Io volo» (F), la proposizione $c = a \rightarrow b$: «Se sono un uccello allora volo» è V.
  Osserva che anche nel linguaggio corrente siamo portati a dire che questa proposizione è vera pur essendo false le sue componenti
- se *a*: «Maria è miope» (V) e *b*: «Maria vede bene da lontano» (F), la proposizione $c = a \rightarrow b$: «Se Maria è miope allora vede bene da lontano» è F.

La coimplicazione materiale

È l'operazione logica che, date due proposizioni *a* e *b*, restituisce la proposizione «*a* **se e solo se** *b*».
Tale proposizione si ritiene vera se le due proposizioni hanno lo stesso valore di verità (quindi se sono entrambe vere oppure entrambe false), falsa negli altri casi.
Il simbolo logico della coimplicazione materiale è $\leftrightarrow$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \leftrightarrow b$$

a	b	$a \leftrightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La coimplicazione è sostanzialmente una implicazione doppia; essa risulta quindi vera quando le due proposizioni $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow a$ sono entrambe vere.
Per esempio:

- se *a*: «15 è un numero primo» (F) e *b*: «15 è un numero dispari» (V), la proposizione $c = a \leftrightarrow b$: «15 è un numero primo se e solo se è dispari» è F
- se *a*: «parto» e *b*: «prendo l'autobus», la proposizione $c = a \leftrightarrow b$: «parto se e solo se prendo l'autobus» è V se parto usando come mezzo di trasporto l'autobus oppure se non parto e non prendo nemmeno l'autobus; è falsa negli altri casi, per esempio se parto ma uso l'auto.

Osservazione

Le operazioni logiche fondamentali sono solo le prime tre che abbiamo descritto: la negazione, la congiunzione e la disgiunzione inclusiva.

Le altre si possono tutte descrivere in funzione di queste.
Per esempio, vedremo nel prossimo paragrafo che l'operazione logica $a \rightarrow b$ equivale alla proposizione $\overline{a} \vee b$, quindi un'implicazione si può esprimere mediante la negazione e la disgiunzione inclusiva.
È tuttavia consuetudine introdurre anche le operazioni di disgiunzione esclusiva e di implicazione sia perché semplificano la valutazione del valore di verità di una proposizione complessa, sia perché si usano frequentemente in qualunque linguaggio; in particolare l'implicazione e la doppia implicazione verranno usate nelle dimostrazioni dei teoremi.

3 ESPRESSIONI LOGICHE ED EQUIVALENZE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 23

3.1 Le espressioni logiche

Un qualunque ragionamento, anche il più semplice, è composto, in generale, da più di due proposizioni; si possono allora costruire delle vere e proprie espressioni logiche delle quali si può calcolare il valore di verità.
Per esempio:

«Se durante l'anno studio e mi comporto bene, mio padre mi lascerà andare in vacanza con i miei amici, ma se non studio e non vengo promosso, credo proprio che in vacanza con i miei amici non ci andrò».

In questo ragionamento possiamo individuare alcune proposizioni atomiche:

a: «Durante l'anno studio»

b: «Durante l'anno mi comporto bene»

c: «Vado in vacanza con i miei amici»

d: «Vengo promosso»

Sinteticamente, usando i connettivi che rappresentano le operazioni che abbiamo studiato, possiamo riscrivere il ragionamento in questo modo:

$$[(a \wedge b) \rightarrow c] \wedge [(\overline{a} \wedge \overline{d}) \rightarrow \overline{c}]$$

La valutazione del valore di verità di questo ragionamento dipende dai valori di verità delle proposizioni atomiche che lo compongono; supponiamo che sia:

Se conosciamo il valore di verità di ogni proposizione di un'espressione logica, per stabilire se essa è vera oppure falsa basta applicare le regole delle operazioni logiche.

a V $\quad$ b F $\quad$ c F $\quad$ d V

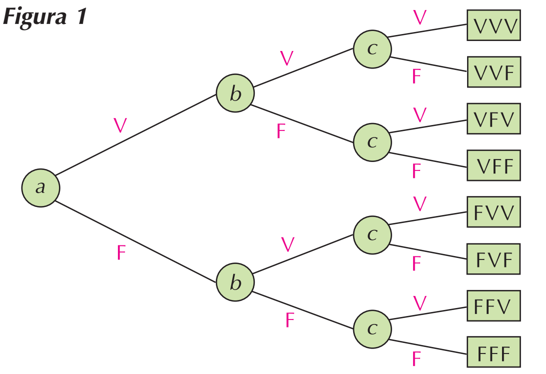
allora

$a \wedge b$	è F
$[(a \wedge b) \rightarrow c]$	è V
$\overline{a} \wedge \overline{d}$	è F
$[(\overline{a} \wedge \overline{d}) \rightarrow \overline{c}]$	è V
$[(a \wedge b) \rightarrow c] \wedge [(\overline{a} \wedge \overline{d}) \rightarrow \overline{c}]$	è V

In genere, però, si vuole sapere come varia il valore di verità di un'espressione al variare dei valori di verità delle singole proposizioni che la formano. Occorre allora costruire una tavola di verità che contempli tutte le possibilità.
Se con due proposizioni abbiamo 4 possibilità, quante ce ne saranno con tre,

quattro, dieci proposizioni? Inoltre, come possiamo essere sicuri di scriverle tutte?
La risposta ad entrambe le domande si può ottenere costruendo un diagramma ad albero che incrementa il numero di proposizioni ad ogni ramificazione. In sostanza, a partire dalla proposizione *a*, dalla quale si dipartono i due rami che rappresentano le due possibilità V o F, si giunge alla proposizione *b* che può essere anch'essa V o F; da *b* si passa a *c* e così via fino ad esaurire le proposizioni. In ***figura 1*** puoi vedere l'albero che si ottiene con tre proposizioni; basta adesso leggere i valori di verità lungo ciascun percorso per avere tutti i casi possibili.

Figura 1



Osserviamo poi che, poiché ad ogni nuova ramificazione il numero dei casi raddoppia, il numero complessivo di possibilità è una potenza del 2:

- con una proposizione: $2^1 = 2$ casi;
- con due proposizioni: $2^2 = 4$ casi;
- con tre proposizioni: $2^3 = 8$ casi; e così via.

Con n proposizioni i casi possibili sono 2^n

Per essere sicuri di scrivere tutte le possibilità, completiamo le colonne della tavola di verità in questo modo (osserva la tabella a lato nella quale è rappresentato il caso di tre proposizioni):

- colonna della prima proposizione: metà casi di V e metà casi di F
- colonna delle seconda proposizione: $\frac{1}{4}$ casi di V e $\frac{1}{4}$ casi di F alternati
- colonna delle terza proposizione: $\frac{1}{8}$ casi di V e $\frac{1}{8}$ casi di F alternati

a	***b***	***c***
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

e così via fino a che nell'ultima colonna vi è una alternanza di V e F.
In sostanza dimezziamo ogni volta il numero di casi di V e F rispetto al precedente.

Vediamo allora attraverso alcuni esempi come si valuta il valore di verità di un'espressione logica.

ESEMPI

1. Studiamo l'espressione logica $((a \vee b) \wedge \bar{a}) \rightarrow b$.

Abbiamo a che fare con due proposizioni quindi abbiamo 4 casi possibili. Per la valutazione della proposizione procediamo come nelle espressioni numeriche determinando il risultato delle operazioni parziali; nelle colonne successive a quelle dove sono rappresentate le proposizioni atomiche valutiamo in successione le seguenti operazioni

$a \vee b \qquad \bar{a} \qquad (a \vee b) \wedge \bar{a}$ e infine $((a \vee b) \wedge \bar{a}) \rightarrow b$

Ecco la tavola:

a	b	$a \vee b$	$\bar{a}$	$(a \vee b) \wedge \bar{a}$	$((a \vee b) \wedge \bar{a}) \rightarrow b$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

2. Valutiamo l'espressione $\overline{(a \vee b)} \wedge a$.

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\overline{(a \vee b)} \wedge a$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

3. Studiamo il valore di verità dell'espressione $((a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)) \rightarrow c$.

Con tre proposizioni abbiamo 8 possibilità; ecco la tavola che risulta:

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a \vee \overline{b}$	$\overline{a} \vee b$	$(a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$	$((a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)) \rightarrow c$
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F

I precedenti esempi riguardano espressioni logiche molto particolari perché nel primo caso abbiamo ottenuto che l'espressione è sempre vera e nel secondo che è sempre falsa. In logica espressioni di questo tipo prendono nomi particolari.

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

Si dice **tautologia** un'espressione logica che è vera qualunque sia il valore di verità degli enunciati che la compongono.

Si dice **contraddizione** un'espressione logica che è falsa qualunque sia il valore di verità degli enunciati che la compongono.

Le tautologie e le contraddizioni sono importanti perché definiscono proposizioni complesse che sono assolutamente vere o assolutamente false, indipendentemente dal valore di verità delle proposizioni atomiche che le compongono. Non è quindi importante da quali proposizioni sono formate; esse stabiliscono delle verità o delle falsità assolute.
L'espressione logica $((a \vee b) \wedge \overline{a}) \rightarrow b$ dell'esempio 1 è quindi una tautologia, l'espressione $\overline{(a \vee b)} \wedge a$ dell'esempio 2. è una contraddizione.

Altri esempi di tautologie sono i principi fondamentali che abbiamo introdotto nel primo paragrafo e che, facendo uso dei connettivi, possiamo scrivere così:

- **principio di non contraddizione:** una proposizione a non può essere contemporaneamente vera e falsa: $\overline{a \wedge \overline{a}}$
- **principio del terzo escluso:** una proposizione è vera oppure falsa: $a \vee \overline{a}$

3.2 Le equivalenze logiche

A volte capita che due espressioni logiche formalmente diverse, ma formate dalle stesse proposizioni, abbiano la stessa tavola di verità, come per esempio:

$$a \rightarrow b \qquad \text{e} \qquad \bar{a} \vee b$$

le cui tavole di verità sono

a	**b**	$a \rightarrow b$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

a	**b**	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$
V	V	F	**V**
V	F	F	**F**
F	V	V	**V**
F	F	V	**V**

Questo significa che, dal punto di vista logico, esse esprimono lo stesso concetto, sono cioè **equivalenti**; scriviamo allora che

- $a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$

  dove il simbolo di uguaglianza significa *equivalenza logica*.

Se analizziamo anche le altre equivalenze logiche riportate a lato della pagina, ci accorgiamo che implicazione, coimplicazione e disgiunzione esclusiva si possono realizzare anche mediante i connettivi *e*, *o*, *non*; queste operazioni allora, come già anticipato nell'osservazione del precedente paragrafo, non sono fondamentali e sintetizzano semplicemente una opportuna combinazione delle operazioni di negazione, congiunzione e disgiunzione inclusiva.

Altre equivalenze logiche sono:

- $a \leftrightarrow b = (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$
- $a \dot{\vee} b = (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$

Consideriamo adesso le due proposizioni

$$a \rightarrow b \qquad \text{e} \qquad \bar{b} \rightarrow \bar{a}$$

PROPOSIZIONE CONTRONOMINALE

delle quali la seconda proposizione prende il nome di **contronominale** della prima. Le rispettive tavole di verità sono le seguenti:

a	**b**	$a \rightarrow b$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

a	**b**	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{b} \rightarrow \bar{a}$
V	V	F	F	**V**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	V	**V**

Avendo ottenuto gli stessi valori di verità possiamo concludere che:

la proposizione $a \rightarrow b$ e la sua contronominale $\bar{b} \rightarrow \bar{a}$ sono logicamente equivalenti.

Per esempio dire:

- $\underbrace{\text{se Giovanni è cattolico}}_{a} \quad \underset{\rightarrow}{\text{allora}} \quad \underbrace{\text{è cristiano}}_{b}$

  equivale a dire:

  $\underbrace{\text{se Giovanni non è cristiano}}_{\bar{b}} \quad \underset{\rightarrow}{\text{allora}} \quad \underbrace{\text{non è cattolico}}_{\bar{a}}$

- $\underbrace{\text{se un numero è dispari}}_{a}$ $\underset{\rightarrow}{\text{allora}}$ $\underbrace{\text{non è divisibile per 6}}_{\overline{b}}$

  equivale a dire:

  $\underbrace{\text{se un numero è divisibile per 6}}_{\overline{\overline{b}} = b}$ $\underset{\rightarrow}{\text{allora}}$ $\underbrace{\text{non è dispari}}_{\overline{a}}$

Enunciamo adesso alcune equivalenze che rappresentano le proprietà delle operazioni logiche; la loro dimostrazione mediante la costruzione delle rispettive tavole di verità può essere un utile esercizio di applicazione.

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI LOGICHE

- $\overline{\overline{a}} = a$ legge della doppia negazione
- $a \wedge a = a$ e $a \vee a = a$ proprietà di idempotenza della congiunzione e della disgiunzione
- $a \wedge (a \vee b) = a$ e $a \vee (a \wedge b) = a$ proprietà di assorbimento
- $a \wedge b = b \wedge a$ e $a \vee b = b \vee a$ proprietà commutativa della congiunzione e della disgiunzione
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ e $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ proprietà associativa della congiunzione e della disgiunzione
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione
- $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ prima legge di De Morgan
- $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ seconda legge di De Morgan

ESEMPI

1. Stabiliamo, applicando le proprietà delle operazioni logiche, se le seguenti sono equivalenze logiche:

a. $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{c})} = (a \wedge b) \wedge (\overline{a} \vee c)$

Applichiamo le leggi di De Morgan alla prima parte: $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{c})} = \overline{(\overline{a} \vee \overline{b})} \wedge \overline{(a \wedge \overline{c})}$

essendo: $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b})} = \overline{\overline{a}} \ \wedge \ \overline{\overline{b}} = a \ \wedge \ b$ e $\overline{(a \wedge \overline{c})} = \overline{a} \ \vee \ \overline{\overline{c}} = \overline{a} \ \vee \ c$

si ha che: $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b})} \wedge \overline{(a \wedge \overline{c})} = (a \wedge b) \wedge (\overline{a} \vee c)$

Avendo ottenuto la seconda parte, si tratta di una equivalenza logica.

b. $a \leftrightarrow b = (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$

Ricordiamo che $a \rightarrow b = \overline{a} \vee b$ e che $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Possiamo allora riscrivere il primo membro dell'uguaglianza in questo modo:

$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = (\overline{a} \vee b) \wedge (\overline{b} \vee a) = (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$

Quella data è quindi un'equivalenza logica.

4 GLI ENUNCIATI APERTI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 26

Abbiamo visto che le proposizioni, in generale, sono costituite da forme verbali, i predicati, legate a degli argomenti. Quando un argomento non è noto, non è più possibile parlare di proposizioni perché di queste frasi non si può dire se sono vere o false, come per esempio nel caso della frase

x è amico di Giulia

"Essere amici di Giulia" esprime in questo caso la proprietà che identifica alcuni elementi di un insieme A di persone; A rimane in questo modo diviso in due parti: quella i cui elementi sono amici di Giulia, quella i cui elementi non sono amici di Giulia (***figura 2***). Se al posto di x si sostituisce un elemento che appartiene alla prima parte, per esempio Matteo, si ottiene una proposizione vera:

«Matteo è amico di Giulia»

Se al posto di x si sostituisce un elemento che appartiene alla seconda parte, per esempio Luca, si ottiene una proposizione falsa:

«Luca è amico di Giulia»

Figura 2

Un predicato esprime quindi una caratteristica relativa ad alcuni elementi di un insieme.

Gli argomenti di tale insieme vengono normalmente indicati con una lettera minuscola dell'alfabeto, di solito x, y o z, e di essi si dice che sono delle **variabili**.
Per esempio, nelle frasi:

x è cugino di Luca	"essere cugini di Luca" è il predicato	x è la variabile
x ama y	"amare" è il predicato	x e y sono le variabili

Le frasi che sono formate da un predicato e da alcuni argomenti incogniti si dicono **enunciati aperti**.

Gli enunciati aperti si chiamano anche ***proposizioni aperte****.*

Un enunciato aperto si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto seguita dai nomi delle variabili racchiuse in una coppia di parentesi tonde; per esempio:

- $p(x)$: «x è maggiore di 8» è un enunciato aperto con una sola variabile, e si ha che:

  $p(10)$: «10 è maggiore di 8» (V)

  $p(2)$: «2 è maggiore di 8» (F)

  $p(-1)$: «-1 è maggiore di 8» (F)

- $q(x, y)$: «x è la capitale di y» è un enunciato aperto con due variabili, e si ha che:

  q(Parigi, Francia) : «Parigi è la capitale della Francia» (V)

  q(Roma, Germania) : «Roma è la capitale della Germania» (F)

DOMINIO

L'insieme dei valori che è possibile attribuire alle variabili, indipendentemente dal fatto che rendano la proposizione vera o falsa, si chiama **dominio** dell'enunciato aperto.

INSIEME DI VERITÀ

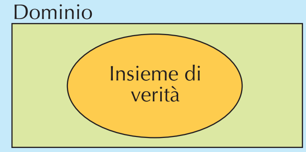
L'insieme dei valori del dominio che rendono l'enunciato aperto una proposizione vera si dice **insieme di verità**.

Nel seguito indicheremo genericamente il dominio di un enunciato aperto con D e l'insieme di verità con la stessa lettera usata per indicare l'enunciato; per esempio, relativamente ai precedenti due esempi possiamo dire che:

- il dominio di $p(x)$ è un qualunque insieme numerico N, Z, Q o qualche loro sottoinsieme, l'insieme di verità è l'insieme P dei numeri di quell'insieme che sono maggiori di 8;
- il dominio di $q(x, y)$ è l'insieme Q delle coppie (x, y) appartenenti al prodotto cartesiano $A \times B$ dove A è l'insieme delle città, per esempio europee, B è l'insieme degli Stati europei.

Il dominio di un predicato rappresenta l'insieme ambiente, mentre l'insieme di verità è un sottoinsieme dell'insieme ambiente.

Dominio

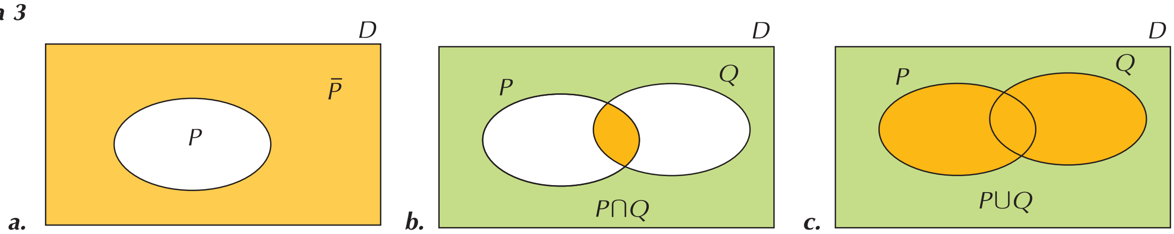


Con gli enunciati aperti è possibile eseguire le stesse operazioni logiche che si eseguono con le proposizioni e, proprio per la corrispondenza che esiste fra un enunciato aperto e il suo dominio, esiste una perfetta corrispondenza fra le operazioni con i predicati e le operazioni con gli insiemi.
In particolare, se D è l'insieme dominio di due enunciati nella stessa variabile $p(x)$ e $q(x)$, P e Q sono i loro insiemi di verità, si verifica che:

LE OPERAZIONI CON GLI ENUNCIATI APERTI

- la **negazione** di $p(x)$ è l'enunciato aperto $\overline{p(x)}$; il suo insieme di verità è l'insieme $\overline{P}$, complementare di P rispetto a D (***figura 3a***);
- la **congiunzione** è l'enunciato aperto $p(x) \wedge q(x)$; poiché si ottiene una proposizione vera solo per i valori di x che soddisfano contemporaneamente entrambi i predicati, il suo insieme di verità è $P \cap Q$, cioè l'intersezione degli insiemi di verità dei due enunciati (***figura 3b***);
- la **disgiunzione inclusiva** è l'enunciato aperto $p(x) \vee q(x)$; poiché si ottiene una proposizione vera per i valori di x che soddisfano l'uno o l'altro dei due predicati, il suo insieme di verità è $P \cup Q$, cioè l'unione degli insiemi di verità dei due enunciati (***figura 3c***).

Figura 3



ESEMPI

1. Sia $p(x)$: «x è un numero pari». Il suo insieme ambiente è l'insieme dei numeri naturali N, ma potrebbe anche essere l'insieme $A = \{x \in N \mid x < 20\}$ o un qualunque sottoinsieme di N.
Avremo in questo caso che, per esempio, $p(2)$ è vero, $p(6)$ è vero, $p(5)$ è falso, $p(17)$ è falso.

2. Sia $p(x, y)$: «$x + y = 10$». Se consideriamo x e y entrambi variabili in N, il dominio è l'insieme $N \times N$.
In questo caso avremo che $p(3, 5)$ è falso, $p(2, 8)$ è vero, $p(0, 10)$ è vero, $p(5, 8)$ è falso.

Se pensiamo x e y variabili nell'insieme Q dei numeri razionali l'insieme ambiente sarà l'insieme $Q \times Q$.

In questo caso avremo che $p\left(\frac{13}{4}, \frac{27}{4}\right)$ è vero, $p\left(-\frac{3}{2}, \frac{23}{2}\right)$ è vero, $p\left(7, \frac{2}{9}\right)$ è falso.

3. In un insieme di persone del quale fa parte anche Luigi, sia $p(x)$: «x è amico di Luigi» e $q(x)$: «x ha la stessa età di Luigi»; allora:

- $\overline{p(x)}$ ha come insieme di verità quello formato dalle persone che non sono amiche di Luigi
- $p(x) \wedge q(x)$ ha come insieme di verità quello formato dai coetanei di Luigi che sono anche suoi amici
- $p(x) \wedge \overline{q(x)}$ ha come insieme di verità quello formato dagli amici di Luigi che non hanno la sua età
- $\overline{p(x)} \vee q(x)$ ha come insieme di verità quello formato dalle persone che sono coetanee di Luigi o non gli sono amiche.

5 I QUANTIFICATORI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 30

Considera le seguenti frasi:

a. «tutti gli uomini sono mortali»
b. «non tutti gli animali hanno le ali»
c. «qualche animale ha le ali»
d. «ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo»
e. «esiste almeno un numero positivo»
f. «non tutti i numeri naturali sono pari»
g. «qualche numero naturale è pari».

Di ciascuna di esse possiamo dire se è vera o se è falsa anche senza sapere di quale uomo si sta parlando, o di quale animale, o di quale numero particolare. Più precisamente, quando diciamo «tutti gli uomini sono mortali», esprimiamo il fatto che ogni elemento x appartenente all'insieme degli uomini ha la proprietà di essere mortale. Quando diciamo «qualche animale ha le ali», esprimiamo il fatto che esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme degli animali che ha la proprietà di avere le ali.
Le due valutazioni sono nettamente diverse: la prima esprime il fatto che una proprietà è vera per tutti gli elementi x di un insieme U, nessuno escluso; la seconda ci dice che la proprietà è vera solo per qualche elemento dell'insieme U, quindi uno solo, due, tre, anche infiniti, ma non è necessario che essa sia vera per tutti gli elementi dell'insieme.
Ad esempio, ci sono infiniti numeri naturali che rendono vera la proposizione **g.**, ma non tutti i numeri la verificano.
In matematica si possono esprimere queste due situazioni introducendo dei simboli detti quantificatori.

- Il **quantificatore universale**, indicato con il simbolo

  $\forall$ (si legge «per ogni», «tutti»),

  esprime il fatto che una proprietà è vera per tutti gli elementi x di un insieme U.

- Il **quantificatore esistenziale**, indicato con il simbolo

  $\exists$ (si legge «esiste», «c'è qualche», «alcuni»),

  esprime il fatto che una proprietà è vera per almeno un elemento x di un insieme U; garantisce dunque l'esistenza di un tale x.

Proviamo a riscrivere le proposizioni che hai letto all'inizio del paragrafo usando i quantificatori.

a. $\forall\ x \in \{\text{uomini}\}$, x è mortale

b. non $\forall\ x \in \{\text{animali}\}$, x ha le ali

c. $\exists\ x \in \{\text{animali}\}$, x ha le ali

d. $\forall\ x \in Q^- \ \wedge\ \forall\ y \in Q^+,\ \ x < y$

e. $\exists\ x \in Q$, x è positivo

f. non $\forall\ x \in N$, x è pari

g. $\exists\ x\ \ \in N$, x è pari.

*Una forma equivalente ai casi **b.** e **f.** è la seguente che trasforma il simbolo*

non $\forall$ nel simbolo $\exists$:

***b.** $\exists x \in \{\text{animali}\}$, x non ha le ali*

***f.** $\exists x \in N$, x non è pari.*

Il simbolo $\nexists$ esprime la negazione di $\exists$; significa «non esiste», «non c'è alcuno».
Diremo per esempio che:

$\nexists x \in Q$, tale che $x^2 = 2$: «non esiste un x razionale il cui quadrato è 2»

$\nexists x \in \{\text{uomini}\}$, tale che x è immortale: «non esiste un uomo che sia immortale»

$\nexists x \in N$, tale che $x + 7 = 2$: «non c'è alcun numero naturale x che addizionato a 7 dia come risultato 2».

Concetti chiave e regole

Le proposizioni

Una **proposizione** è una frase di senso compiuto della quale si può stabilire se è vera o se è falsa.
Le proposizioni obbediscono a due principi fondamentali:

- **Principio di non contraddizione**: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.
- **Principio del terzo escluso**: una proposizione è vera oppure falsa, non esistono altre possibilità.

Le operazioni con le proposizioni

Con le proposizioni si possono eseguire delle operazioni logiche mediante i **connettivi**:

- la **negazione** di un enunciato a è l'enunciato $\overline{a}$ (o anche $\neg a$) che muta il valore di verità di a
- la **congiunzione** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \wedge b$ che si considera vero solo se sono veri sia a che b
- la **disgiunzione inclusiva** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \vee b$ che si considera falso solo se sono falsi sia a che b
- la **disgiunzione esclusiva** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \dot{\vee} b$ che si considera vero solo se a e b hanno valori di verità diversi
- l'**implicazione materiale** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \rightarrow b$ che si considera falso solo se a è vero e b è falso
- la **coimplicazione materiale** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \leftrightarrow b$ che si considera vero solo se a e b hanno lo stesso valore di verità.

Le espressioni logiche e l'equivalenza

Con i connettivi si possono costruire espressioni logiche fra enunciati (che sono gli operandi dell'espressione) il cui valore di verità si determina analizzando le possibili combinazioni di Vero e Falso degli operandi.
Quando un'espressione logica è sempre vera al variare del valore di verità dei suoi operandi si parla di **tautologia**; quando è sempre falsa si dice che è una **contraddizione**.
Due espressioni logiche con gli stessi operandi che hanno la stessa tavola di verità si dicono **logicamente equivalenti**; in particolare sono logicamente equivalenti:

- l'implicazione $a \rightarrow b$ e la sua contronominale $\overline{b} \rightarrow \overline{a}$
- le espressioni $\overline{a \wedge b}$ e $\overline{a} \vee \overline{b}$ (prima legge di De Morgan)
- le espressioni $\overline{a \vee b}$ e $\overline{a} \wedge \overline{b}$ (seconda legge di De Morgan)

I predicati e gli enunciati aperti

Un **enunciato aperto** (o **proposizione aperta**) è una frase composta da un predicato che lega tra loro alcuni argomenti che sono variabili.
L'insieme dei valori che possono assumere le variabili costituisce il **dominio** della proposizione aperta; il sottoinsieme del dominio che rende l'enunciato aperto una proposizione vera si dice **insieme di verità**.
Anche con gli enunciati aperti si possono eseguire le stesse operazioni che si eseguono con le proposizioni; in particolare, indicati con la stessa lettera (maiuscola) del proprio enunciato gli insiemi di verità e con D il dominio, si ha che:

- l'insieme di verità della negazione di un enunciato $p(x)$ è l'insieme $\overline{P}$ complementare di P rispetto a D
- l'insieme di verità della congiunzione $p(x) \wedge q(x)$ di due enunciati è l'insieme $P \cap Q$
- l'insieme di verità della disgiunzione inclusiva $p(x) \vee q(x)$ di due enunciati è l'insieme $P \cup Q$.

I quantificatori

Un enunciato aperto esprime spesso una proprietà che alcuni o tutti gli elementi di un insieme possiedono; per esprimere queste proprietà si usano allora i quantificatori:

- il **quantificatore universale**, indicato dal simbolo $\forall$ seguito dal nome della o delle variabili coinvolte, esprime che una proprietà p è vera per tutti i valori che le variabili possono assumere
- il **quantificatore esistenziale**, indicato dal simbolo $\exists$ seguito dal nome della o delle variabili coinvolte, esprime che una proprietà p è vera per almeno uno dei valori che la variabile può assumere.
  Per indicare che una proprietà p non è verificata da nessuno dei valori della variabile si usa la negazione di questo quantificatore: $\nexists x$.