IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

richiami della teoria

- Un evento (E) si dice **casuale** o **aleatorio**, quando il suo verificarsi dipende unicamente dal caso;
- un evento si dice **certo** quando è possibile stabilire con assoluta certezza il suo verificarsi;
- un evento si dice **impossibile** quando non potrà mai realizzarsi;
- la probabilità $p(E)$ di un evento E è data dal rapporto fra il numero f di casi favorevoli all'evento e il numero complessivo n dei casi possibili. In simboli: $\boldsymbol{p(E) = \frac{f}{n}}$;
- la probabilità di un evento **certo** è uguale a **1**;
- la probabilità di un evento **impossibile** è uguale a **0**;
- la probabilità di un evento **aleatorio** qualsiasi è un numero compreso tra 0 e 1, cioè $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{p} \leq \mathbf{1}$;
- due eventi E_1 e E_2 si dicono **incompatibili** quando il verificarsi del primo esclude il verificarsi del secondo, ovvero i due eventi non possono verificarsi contemporaneamente;
- due eventi E_1 e E_2 si dicono **compatibili** quando il verificarsi del primo non esclude il verificarsi del secondo, ovvero i due eventi si possono verificare contemporaneamente;
- due eventi E_1 e E_2 si dicono **complementari** quando il verificarsi del primo esclude il verificarsi del secondo, ma sicuramente uno dei due eventi si verificherà.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

1 Indica quali tra le seguenti proprietà sono corrette:

a. la probabilità di un evento impossibile è 1;
b. la probabilità di un evento impossibile è 0;
c. la probabilità di un evento certo è 1;
d. la probabilità di un evento certo dipende dall'evento;
e. la probabilità di un evento aleatorio qualsiasi è sempre un numero compreso tra 0 e 1;
f. la probabilità di un evento aleatorio qualsiasi è sempre un numero compreso tra -1 e 1.

APPLICAZIONE

2 *Esercizio Svolto*

Calcola la probabilità che lanciando un dado esca un numero pari, esprimendola in frazione, valore decimale e valore percentuale.

Il dado ha sei facce quindi $n = 6$; il nostro evento ha tre possibilità di verificarsi (esce 2, esce 4, esce 6) dunque $f = 3$

p (valore frazione) $= \dfrac{f}{n} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$;

p (valore decimale) $= 1 : 2 = 0{,}5$;

p (valore percentuale) $= 0{,}5 \cdot 100\% = 50\%$.

3 Calcola la probabilità che estraendo da un sacchetto contenente 10 palline rosse e 5 gialle esca una pallina gialla, esprimendola in frazione, valore decimale e valore percentuale. $\left[\dfrac{1}{3};\ 0{,}\overline{3};\ 33{,}\overline{3}\%\right]$

4 Calcola la probabilità che lanciando un dado esca il numero 6, esprimendola in frazione, valore decimale e valore percentuale. $\left[\dfrac{1}{6};\ 0{,}1\overline{6};\ 16{,}\overline{6}\%\right]$

I teoremi del calcolo della probabilità

richiami della teoria

- La **somma delle probabilità di due eventi complementari** è sempre uguale a 1;
- due eventi complementari sono sempre incompatibili, mentre due eventi incompatibili non sempre sono complementari;
- la **probabilità totale**:
  - **di due o più eventi incompatibili** è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento. In simboli: $\boldsymbol{p_t = p_1 + p_2 + ... + p_n}$;
  - **di due eventi compatibili** è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento diminuita della probabilità comune ai due eventi. In simboli: $\boldsymbol{p_t = p_1 + p_2 - p_c}$.

APPLICAZIONE

5 *Esercizio Svolto*

Calcola la probabilità totale dell'evento E_1: «estrarre da un sacchetto contenente 3 palline rosse, 2 gialle e 5 verdi, indifferentemente, una pallina rossa o una verde».

La probabilità di estrarre una pallina rossa è: $p_1 = \frac{3}{10}$;

La probabilità di estrarre una pallina verde è: $p_2 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$;

La probabilità totale è: $p_3 = \frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$.

6 Calcola la probabilità che lanciando un dado esca un numero divisibile per 3 o un numero minore di 3. $\left[\frac{2}{3}\right]$

7 Calcola la probabilità che estraendo una carta da un mazzo di 40 carte italiane sia un quattro o un sei. $\left[\frac{1}{5}\right]$

8 *Esercizio Svolto*

Dai 90 numeri della tombola si estrae un numero:

a. considera l'evento E_1: «esce un numero minore o uguale a 30» e calcolane la probabilità;
b. determina l'evento complementare e calcolane la probabilità;
c. calcola la probabilità totale dei due eventi complementari.

a. La probabilità che venga estratto un numero minore o uguale a 30 è $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$;

b. L'evento complementare è: E_c: «esce un numero maggiore di 30»: la probabilità è $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$;

c. La probabilità totale è $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

9 Un sacchetto contiene 10 palline rosse, 8 nere e 4 bianche:

a. considera l'evento E_1 : «estrarre una pallina nera» e calcolane la probabilità;
b. considera l'evento complementare di E_1 e calcolane la probabilità. $\left[\textbf{a. } \frac{4}{11}; \textbf{ b. } \frac{7}{11}\right]$

10 Da un mazzo di 40 carte se ne estrae una:
a. considera l'evento E_1: «esce una carta di fiori» e calcolane la probabilità;
b. determina l'evento complementare e calcolane la probabilità;
c. calcola la probabilità totale dei due eventi complementari.
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{1}{4};\ \mathbf{b.}\ \frac{3}{4};\ \mathbf{c.}\ 1\right]$

11 *Esercizio Svolto*

Da un mazzo di 40 carte calcola la probabilità dei seguenti eventi:
a. E_1 : «esce un 5 o una figura»;
b. E_2 : «esce un 7 oppure una carta di fiori».

a. L'evento E_1 è composto di due eventi «esce un 5» ed «esce una figura», fra loro incompatibili. In questo caso dunque la probabilità totale si ottiene addizionando la probabilità dei due eventi semplici:

p_1 (esce un 5) $= \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $\qquad$ p_2 (esce una figura) $= \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

Pertanto $p(E_1) = p_1 + p_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

b. L'evento E_2 è composto dai due eventi «esce un 7» ed «esce una carta di fiori» che sono però compatibili (potrebbe verificarsi anche l'evento «esce il 7 di fiori»). Calcoliamo le rispettive probabilità:

p_1 (esce un 7) $= \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $\qquad$ p_2 (esce una carta di fiori) $= \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

p_c (esce il 7 di fiori) $= \frac{1}{40}$

Pertanto $p(E_2) = p_1 + p_2 - p_c = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$.

12 Nel lancio di un dado calcola la probabilità che si verifichi l'evento «esce un 5 o un numero pari».
$\left[\frac{2}{3}\right]$

13 Nel lancio di un dado calcola la probabilità che si verifichi l'evento «esce un 3 o un numero dispari».
$\left[\frac{1}{2}\right]$

14 Calcola la probabilità dell'evento E : «esce un numero primo o un numero dispari» nel lancio di un dado.
$\left[\frac{2}{3}\right]$

Risolvi i seguenti problemi riassuntivi sulla probabilità.

● **15** Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte determina:
a. la probabilità che la carta estratta sia inferiore a 3;
b. la probabilità che la carta estratta sia di denari o sia il 5 di coppe;
c. la probabilità complementare dell'evento E : «esce una figura»;
d. la probabilità che la carta estratta sia di fiori o una figura.
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{1}{5};\ \mathbf{b.}\ \frac{11}{40};\ \mathbf{c.}\ \frac{7}{10};\ \mathbf{d.}\ \frac{19}{40}\right]$

● **16** Estraendo da un contenitore contenente 3 biro rosse, 2 biro blu, 5 biro nere e 4 matite calcola la probabilità:
a. che esca una matita;
b. che esca una biro blu o una nera;
c. dell'evento complementare del punto **a.**
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{2}{7};\ \mathbf{b.}\ \frac{1}{2};\ \mathbf{c.}\ \frac{5}{7}\right]$

17 Estraendo un numero al lotto (90 numeri), qual è la probabilità che:
a. sia un numero minore di 31;
b. non sia multiplo di 10;
c. sia multiplo di 3 o il numero 5.
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{1}{3};\ \mathbf{b.}\ \frac{9}{10};\ \mathbf{c.}\ \frac{31}{90}\right]$

18 Il gioco della roulette consiste nel puntare una certa quantità di denaro su uno dei 37 numeri (da 0 a 36). Sapendo che il numero 0 è verde e che gli altri numeri sono 18 rossi e 18 neri, calcola la probabilità dei seguenti eventi:
a. «esce un numero pari»;
b. «esce un numero rosso»;
c. «esce un numero giallo»;
d. «esce un numero verde»;
e. «esce un numero dispari o divisibile per 7»;
f. «esce un numero divisibile per 2 o verde».
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{18}{37};\ \mathbf{b.}\ \frac{18}{37};\ \mathbf{c.}\ 0;\ \mathbf{d.}\ \frac{1}{37};\ \mathbf{e.}\ \frac{20}{37};\ \mathbf{f.}\ \frac{19}{37}\right]$

19 Le pagine di una rivista sono numerate da 1 a 50; calcola la probabilità che, aprendo una pagina a caso si verifichino i seguenti eventi:
a. E_1 : «esce una pagina il cui numero è un multiplo di 5»;
b. E_2 : «esce una pagina il cui numero ha come somma delle cifre il numero 5».
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{1}{5};\ \mathbf{b.}\ \frac{3}{25}\right]$

20 Estraendo un dolce da un sacchetto contenente 10 caramelle, 13 cioccolatini e 9 biscotti, calcola la probabilità:
a. di estrarre una caramella;
b. di estrarre una caramella o un cioccolatino;
c. complementare dell'evento **a.**
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{5}{16};\ \mathbf{b.}\ \frac{23}{32};\ \mathbf{c.}\ \frac{11}{16}\right]$

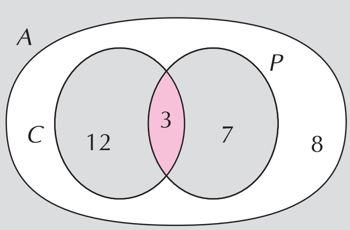
21 Estraendo un solido da un sacchetto contenente 10 sfere rosse, 15 sfere blu e 10 cubi rossi, calcola la probabilità di estrarre:
a. un solido rosso;
b. un solido rosso o una sfera.
$\left[\mathbf{a.}\ \frac{4}{7};\ \mathbf{b.}\ 1\right]$

22 Qual è la probabilità che nel gioco del Lotto, alla prima estrazione sulla ruota di Roma, si ottenga un numero minore di 21 oppure divisibile per 10.
$\left[\frac{3}{10}\right]$

23 ***Esercizio Guidato***

In un gruppo di 30 amici, 15 giocano a calcio, 10 giocano a pallavolo e 3 praticano entrambi gli sport. Rappresenta questa situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn e calcola la probabilità che un amico scelto a caso:
a. giochi a calcio;
b. non giochi a pallavolo;
c. non pratichi sport.

Rappresentiamo la situazione descritta con un diagramma chiamando A lo spazio campionario (insieme di tutti gli amici del gruppo), C l'insieme degli amici che giocano a calcio e P l'insieme di quelli che giocano a pallavolo e segnalando all'interno degli insiemi il numero degli elementi che contengono.



a. $p(C) = \dfrac{\dots\dots}{30} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

b. $p(non\ P) = 1 - \dfrac{\dots\dots}{30} = 1 - \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

c. $p(non\ C \cup P) = 1 - p(C \cup P) = 1 - [p(C) + p(P) - p(C \cap P)] = 1 - \left(\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} + \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} - \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}\right) = 1 - \dfrac{22}{30} = \dfrac{4}{15}$

È molto più semplice, dopo aver rappresentato la situazione, osservare che il numero di alunni che non pratica i due sport è 8 e che quindi questo è il numero dei casi a noi favorevoli.

24 In un gruppo di 24 ragazzi, 15 ascoltano la musica rock, 5 ascoltano la musica classica e 2 ascoltano tutti e due i tipi di musica. Rappresenta questa situazione mediante un diagramma di Eulero-Venn e calcola la probabilità che un ragazzo scelto a caso:

a. ascolti la musica classica;

b. non ascolti la musica rock;

c. non ascolti musica rock o classica.