APPROFONDIMENTO

L'insieme delle parti

Consideriamo l'insieme A degli alunni di una classe e pensiamo a tutti i modi possibili di raggruppare questi alunni: potremmo formare gruppi di un solo ragazzo, gruppi di due ragazzi con tutte le combinazioni possibili, gruppi di tre ragazzi con tutte le combinazioni possibili e così via. Possiamo quindi costruire un insieme i cui elementi sono a loro volta altri insiemi, cioè i possibili gruppi che si vengono a formare; ognuno di essi è un sottoinsieme di A.
Un insieme può dunque avere altri insiemi come elementi.

Dato un insieme A, si chiama **insieme delle parti**, e si indica con $\mathscr{P}(A)$, l'insieme che ha per elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A.

Per esempio:

- dato l'insieme $A = \{\text{bianco, nero}\}$, i suoi possibili sottoinsiemi, impropri e propri, sono i seguenti:

  $S_1 = \varnothing$ $\quad S_2 = A = \{\text{bianco, nero}\}$ $\quad S_3 = \{\text{bianco}\}$ $\quad S_4 = \{\text{nero}\}$

  Allora $\mathscr{P}(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

- dato $A = \{1, 2, 3\}$, i suoi possibili sottoinsiemi, oltre a quelli impropri $S_1 = \varnothing$ e $S_2 = A$, sono quelli che possiamo formare con un elemento di A o con due elementi di A e sono:

  $S_3 = \{1\}$ $\quad S_4 = \{2\}$ $\quad S_5 = \{3\}$ $\quad S_6 = \{1, 2\}$ $\quad S_7 = \{1, 3\}$ $\quad S_8 = \{2, 3\}$

  Allora $\mathscr{P}(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$.

- l'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso, quindi $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing\}$.

Il numero degli elementi dell'insieme delle parti di un insieme A, cioè il numero dei sottoinsiemi (propri ed impropri) che si possono costruire a partire da A, dipende dal numero degli elementi di A. Se l'insieme A è vuoto l'insieme delle parti ha un solo elemento, se A ha un elemento l'insieme delle parti ne ha due (l'insieme vuoto e A stesso), se A ha due elementi l'insieme delle parti ne ha quattro, se A ha tre elementi $\mathscr{P}(A)$ ne ha otto.
C'è quindi una relazione fra il numero degli elementi di A ed il numero degli elementi di $\mathscr{P}(A)$:

0 elementi per A	$2^0 = 1$	elemento per $\mathscr{P}(A)$
1 elemento per A	$2^1 = 2$	elementi per $\mathscr{P}(A)$
2 elementi per A	$2^2 = 4$	elementi per $\mathscr{P}(A)$
3 elementi per A	$2^3 = 8$	elementi per $\mathscr{P}(A)$

In generale:

se A ha n elementi, $\mathscr{P}(A)$ ne ha 2^n.

Esercizi

Comprensione

1 Sia $\mathscr{P}(A)$ l'insieme delle parti di A. Quali delle seguenti scritture sono corrette?

a. $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$ **b.** $\varnothing \subset \mathscr{P}(A)$ **c.** $\mathscr{P}(A) \subset A$ **d.** $A \in \mathscr{P}(A)$ **e.** $\{A\} \subset \mathscr{P}(A)$

2 Se un insieme A ha 3 elementi, quanti elementi ha $\mathscr{P}(A)$? E se A ha 5 elementi? Qual è la regola generale per determinare il numero di elementi di $\mathscr{P}(A)$, se A è formato da n elementi?

3 Se $A = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 4\}$, $\mathscr{P}(A)$ ha:

a. 6 elementi **b.** 8 elementi **c.** 3 elementi **d.** 9 elementi

4 $\mathscr{P}(A)$ ha 64 elementi. Quanti sono gli elementi di A?

a. 8 **b.** 6 **c.** 32 **d.** non si può sapere

5 Considerato l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$, stabilisci quali fra le seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

a. $\{x \mid x \text{ è una vocale}\} \subset A$ V F
b. $\{a, b\} \subset \mathscr{P}(A)$ V F
c. $\{a, e\} \in \mathscr{P}(A)$ V F
d. $\{b, c, d\} \subset A$ V F
e. $\varnothing \in A$

Applicazione

6 Dato $A = \{a, b, c\}$ determina l'insieme delle parti di A.

7 Scrivi tutti gli elementi dell'insieme delle parti di $A = \{1, 2\}$. Stabilisci quindi quali delle seguenti relazioni sono corrette:

a. $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$ **b.** $\{1\} \subset \mathscr{P}(A)$ **c.** $0 \notin A$ **d.** $\varnothing \subseteq A$

8 Scrivi l'insieme delle parti dei seguenti insiemi:

a. $A = \{0, 1\}$ **b.** $B = \{0\}$ **c.** $C = \{\}$

9 Dato $A = \{x \mid x \text{ è una vocale dell'alfabeto italiano}\}$, determina $\mathscr{P}(A)$.

10 Considera l'insieme $A = \{1, 3, 5\}$ e l'insieme delle parti di A; quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false? Motiva la tua risposta:

a. $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$ V F
b. $\{3\} \in \mathscr{P}(A)$ V F
c. $\{\varnothing\} \subset \mathscr{P}(A)$ V F
d. $0 \in \varnothing$ V F
e. $\varnothing \subseteq \mathscr{P}(A)$ V F

11 Dato l'insieme $A = \{\text{Paolo, Marco, Carlo, Anna}\}$, scrivi l'insieme delle parti di A.

12 Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\{7\}, \{9\}, \{7, 9\}, \varnothing\}$.