Concetti chiave e regole

Il sistema di ascisse sulla retta

Fissato su una retta orientata un sistema di ascisse:

- la misura del segmento di estremi $A(x_A)$ e $B(x_B)$ è: $|x_B - x_A|$
- l'ascissa del punto medio del segmento AB è: $\dfrac{x_A + x_B}{2}$

Il sistema di riferimento cartesiano nel piano

Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$:

- la distanza fra A e B è $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

  in particolare, se A e B hanno la stessa ordinata $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$

  se A e B hanno la stessa ascissa $\overline{AB} = |y_2 - y_1|$

- le coordinate del punto M medio fra A e B sono $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Le isometrie nel piano cartesiano

Un'isometria è una funzione che ad ogni punto del piano fa corrispondere un altro punto in modo che a segmenti congruenti corrispondano segmenti congruenti. In un sistema di assi cartesiani ortogonali, le isometrie più semplici sono le simmetrie rispetto agli assi cartesiani e rispetto a un punto (l'origine o qualsiasi altro punto) e le traslazioni.

Dato un punto $P(x, y)$

- il suo **simmetrico rispetto all'asse** x è il punto $P'(x, -y)$
- il suo **simmetrico rispetto all'asse** y è il punto $P'(-x, y)$
- il suo **simmetrico rispetto all'origine** O è il punto $P'(-x, -y)$
- il suo **simmetrico rispetto al punto** $A(a, b)$ è il punto $P'(2a - x, 2b - y)$
- il suo corrispondente nella **traslazione** di vettore $\vec{v}(v_x, v_y)$ è il punto $P'(x + v_x, y + v_y)$.

L'equazione della retta

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, una retta ha equazione

- $x = h$ se è parallela all'asse y
- $y = k$ se è parallela all'asse x
- $y = mx$ se passa per l'origine
- $y = mx + q$ se non passa per l'origine

La forma implicita dell'equazione di una retta è $ax + by + c = 0$.

In particolare poi:

- $y = x$ è l'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante
- $y = -x$ è l'equazione della bisettrice del secondo e quarto quadrante

Il coefficiente angolare di una retta

Il parametro m rappresenta il coefficiente angolare e si ha che:

- se $m > 0$ la retta forma un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x
- se $m < 0$ la retta forma un angolo ottuso con la direzione positiva dell'asse x
- se $m = 0$ la retta è parallela all'asse x.

Una retta parallela all'asse y non ha coefficiente angolare.

Se sono note le coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di due punti di una retta ed è $x_1 \neq x_2$: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

La condizione di allineamento dei tre punti di coordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), con $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, è espressa dalla relazione $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

Come scrivere l'equazione di una retta

Se di una retta si conoscono le coordinate di un punto (x_0, y_0) ed il coefficiente angolare m, la sua equazione si trova con la formula $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Se di una retta si conoscono le coordinate di due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e se la retta non è parallela agli assi cartesiani, la sua equazione si trova con la formula $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Rette parallele e rette perpendicolari

La condizione di parallelismo fra due rette è $m = m'$; quindi se una retta ha coefficiente angolare m, anche la sua parallela ha coefficiente angolare m.

La condizione di perpendicolarità fra due rette è $m \cdot m' = -1$; quindi se una retta ha coefficiente angolare m, la sua perpendicolare ha coefficiente angolare $-\dfrac{1}{m}$.

Altre considerazioni sulla retta

Per trovare il **punto di intersezione di due rette** si deve risolvere il sistema formato dalle loro equazioni. Le situazioni che si possono presentare sono:

- il sistema è determinato e allora le due rette si intersecano in un punto
- il sistema è indeterminato e allora le due rette coincidono (sono in realtà la stessa retta)
- il sistema è impossibile e allora le due rette sono parallele e non coincidenti.

In particolare, l'ascissa del punto d'intersezione di una retta con l'asse x prende il nome di **zero** della funzione rappresentata dalla retta stessa.

La **distanza d del punto $P(x_0, y_0)$ dalla retta** r di equazione $ax + by + c = 0$ si calcola con la formula

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

I fasci di rette

Un'equazione lineare in x e y che contiene un parametro k rappresenta un fascio di rette. Se il coefficiente angolare di tale fascio dipende da k,il fascio è proprio ed ha centro in un punto C che si ottiene intersecando le due generatrici o due qualunque rette del fascio; se non dipende da k ma è rappresentato da un numero fisso, il fascio è improprio.