La dimostrazione del teorema sul riconoscimento di un parallelogramma

Teorema. Un quadrilatero è un parallelogramma se:

- ha i lati opposti paralleli, oppure
- ha i lati opposti congruenti, oppure
- ha gli angoli adiacenti supplementari, oppure
- ha gli angoli opposti congruenti, oppure
- ha le diagonali che si incontrano nel punto medio, oppure
- ha una coppia di lati opposti congruenti e paralleli.

Dimostrazione.

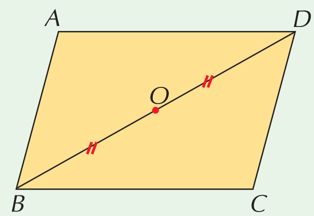
- Dato il quadrilatero $ABCD$, supponiamo che sia $AB \parallel DC$ e $AD \parallel BC$ e indichiamo con O il punto medio della diagonale BD (***figura 1a***).
  Nella simmetria di centro O, a D corrisponde B e alla retta DC corrisponde la parallela per B che, per l'unicità della parallela e per l'ipotesi fatta, è la retta AB. Analogamente alla retta BC corrisponde la parallela per D, cioè la retta AD.
  Quindi, all'intersezione delle rette BC e DC, cioè a C, corrisponde l'intersezione delle rette AD e AB, cioè A.
  In definitiva: $B = \sigma_O(D)$, $A = \sigma_O(C)$; il quadrilatero $ABCD$ ha un centro di simmetria ed è perciò un parallelogramma.

- Supponiamo che sia $AD \cong BC$ e $AB \cong DC$ e consideriamo i triangoli ABD e CDB (***figura 1b***) che sono congruenti per il terzo criterio; in particolare si ha che $\widehat{ADB} \cong \widehat{DBC}$ e quindi $AD \parallel BC$ perché tali angoli sono alterni interni e congruenti, $\widehat{ABD} \cong \widehat{CDB}$ e quindi $AB \parallel DC$.
  In base alla dimostrazione precedente, il quadrilatero $ABCD$ avendo i lati opposti paralleli, è un parallelogramma.

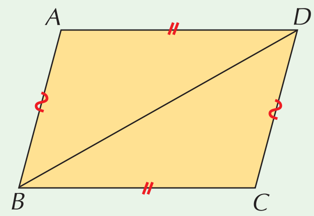
- Supponiamo che sia $\widehat{ABC}$ supplementare di $\widehat{BAD}$ (***figura 1c***); allora le rette AD e BC sono parallele perché formano angoli coniugati interni supplementari. Se poi $\widehat{BAD}$ è supplementare di $\widehat{ADC}$, anche le rette AB e DC sono parallele ed il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma.

- Supponiamo che gli angoli opposti del quadrilatero siano congruenti, cioè che sia $\widehat{BAD} \cong \widehat{DCB}$ e $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADC}$ (riferisciti ancora alla ***figura 1c***); allora $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} \cong \widehat{ADC} + \widehat{BCD}$ perché somme di angoli congruenti e, essendo la somma degli angoli interni di un quadrilatero congruente a due angoli piatti, $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} \cong \widehat{ADC} + \widehat{BCD} \cong \pi$.
  Le rette AD e BC, formando con la trasversale AB una coppia di angoli coniugati interni supplementari, sono quindi parallele ed analogamente $AB \parallel DC$. Il quadrilatero $ABCD$ è quindi un parallelogramma.

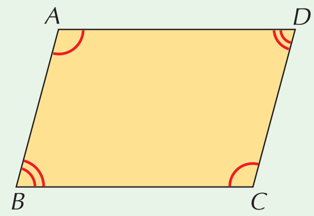
Figura 1



a.



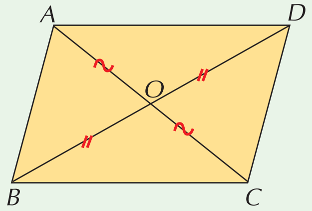
b.



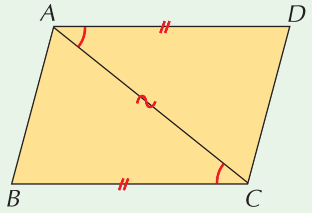
c.

- Supponiamo che, indicato con O il punto di intersezione delle diagonali (***figura 1d***) si abbia che $AO \cong OC$ e $BO \cong OD$; O è dunque il centro di simmetria del quadrilatero $ABCD$ che è perciò un parallelogramma.
- Supponiamo infine che sia $AD \parallel BC$ e contemporaneamente $AD \cong BC$ (***figura 1e***); i triangoli ADC e ABC sono congruenti per il primo criterio di congruenza ($AD \cong BC$, $AC \cong AC$, $\widehat{DAC} \cong \widehat{BCA}$ perché alterni interni) e quindi anche $AB \cong DC$. Avendo i lati opposti ordinatamente congruenti il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma. ◀

Figura 1



d.



e.