Matematica in laboratorio

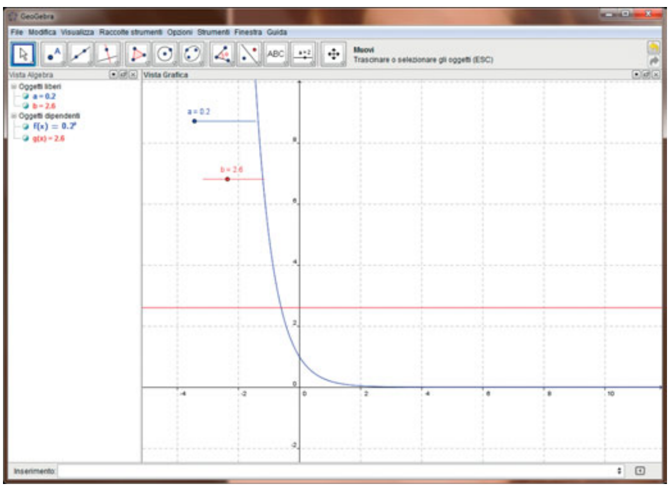
1. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

Usiamo GeoGebra

Quante soluzioni ammette un'equazione della forma $a^x = b$?
Per rispondere a questa domanda costruiamo i grafici delle equazioni $y = a^x$ e $y = b$.
A questo scopo, costruiamo uno slider a variabile tra 0.2 e 2 con passo 0,4 e uno slider b variabile tra -1 e 8 con passo 0,1 e scriviamo le equazioni delle due funzioni nella riga di inserimento.
Facciamo adesso variare manualmente o anche in modo automatico uno slider alla volta e osserviamo che cosa accade.
La conclusione che possiamo trarre è la seguente:

qualunque sia il valore di *a*, le due curve si intersecano in un solo punto solo se $b > 0$

Qualunque equazione della forma indicata ha dunque una sola soluzione a condizione che sia $b > 0$.



La risoluzione di un'equazione esponenziale, che sia di tipo elementare o più complessa, avviene solo attraverso il comando di intersezione di due curve in quanto GeoGebra non possiede un comando specifico per la risoluzione delle equazioni.
Risolviamo per esempio le seguenti equazioni.

- $4^x - 2^x = 1$

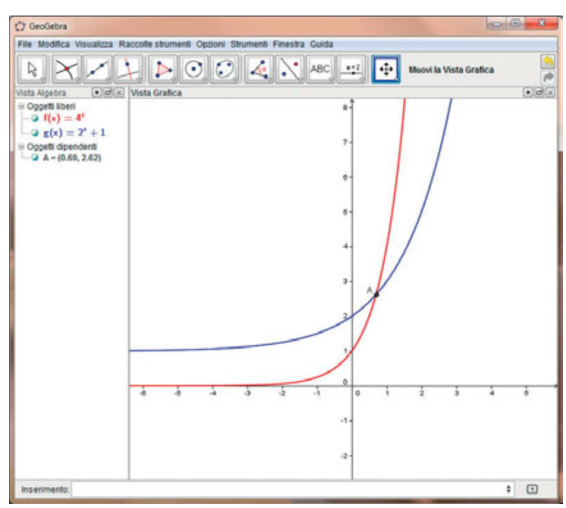
  Anche se non è indispensabile, visto che GeoGebra può disegnare il grafico di qualsiasi funzione, conviene innanzi tutto riscriverla in una forma che ci permetta di riconoscere le curve usate:

  $4^x = 2^x + 1$

  Costruiamo quindi i grafici delle due funzioni

  $f(x) = 4^x \qquad$ e $\qquad g(x) = 2^x + 1$

  Usiamo il comando 2-*Intersezione di due oggetti* e clicchiamo sui due grafici.
  Vengono restituite le coordinate del punto di intersezione; l'ascissa rappresenta la soluzione dell'equazione ed è $x = 0{,}69$.



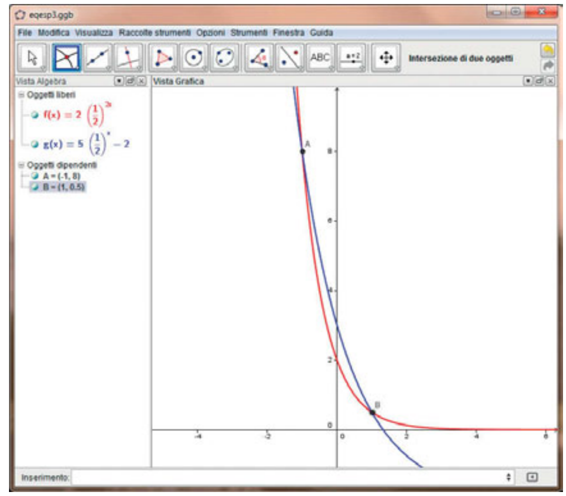
- $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 2$

  Disegniamo i grafici delle due funzioni

  $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ e $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 2$

  Dal grafico deduciamo che l'equazione ha due soluzioni.
  Attiviamo il comando di intersezione: viene individuato un solo punto; per trovare anche l'altro dobbiamo utilizzare il comando una seconda volta andando a cliccare sulle due funzioni nelle vicinanze del punto.
  Troviamo così che le due soluzioni sono

  $x = -1 \qquad x = 1$



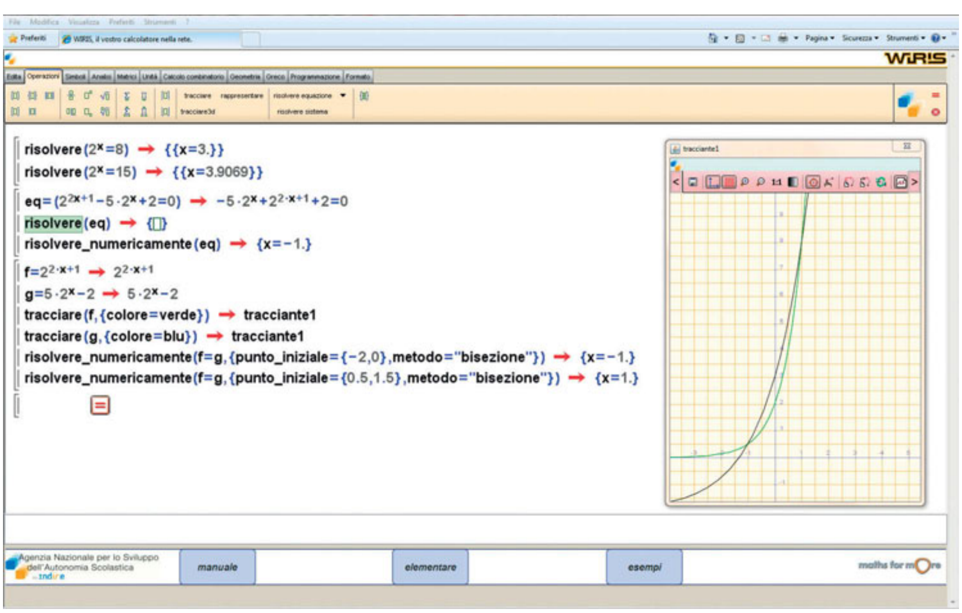
Usiamo Wiris

Con il comando **risolvere** di Wiris si possono risolvere solo equazioni esponenziali elementari e nella figura che segue puoi vedere qualche esempio nel primo blocco.
Ma già con equazioni di tipo leggermente più complesso ciò non è possibile; si tratta infatti di un sofware "didattico" il cui scopo non è quello di risolvere equazioni, ma far capire il significato di ciò che si sta facendo.
Nel secondo blocco vedi un esempio nella risoluzione dell'equazione

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^{x} + 2 = 0$$

Usando il comando **risolvere** non si ottiene alcun risultato; usando il comando **risolvere_numericamente** si ottiene un solo risultato, mentre se provi a risolvere manualmente l'equazione trovi due soluzioni.
In casi come questo i due comandi non danno i risultati desiderati.
Nel terzo blocco vedi come si deve affrontare il problema:

- si separano i termini dell'equazione in modo da disegnare due curve note; nel nostro caso $f = 2^{2x+1}$ e $g = 5 \cdot 2^{x} - 2$
- si tracciano i due grafici
- si individua un intervallo che contiene ciascuna delle due radici
- si usa il comando **risolvere_numericamente** specificando l'intervallo e indicando il metodo di risoluzione.

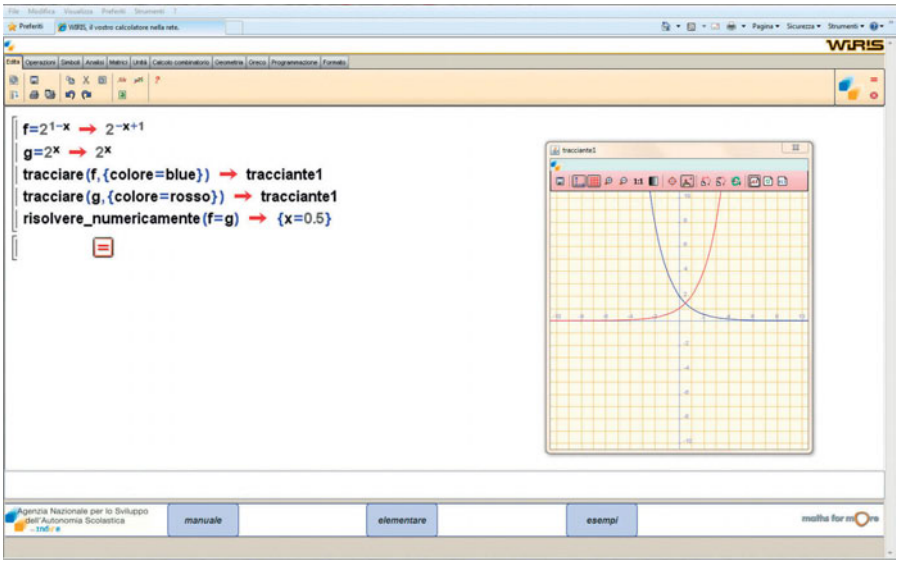


2. Le disequazioni esponenziali

Nè con GeoGebra, nè con Wiris esiste un comando per risolvere disequazioni di tipo esponenziale.
La procedura da seguire è quindi quella già indicata per la risoluzione delle equazioni; in questo caso, però, l'intervallo delle soluzioni deve essere scelto in base alla posizione reciproca dei grafici ottenuti.
Nella figura che segue puoi vedere la procedura di risoluzione con Wiris della disequazione

$$2^{1-x} > 2^x$$

In essa è stata disegnata la curva $f = 2^{1-x}$ in colore blu, la curva $g = 2^x$ in rosso; l'ascissa del punto di intersezione è $x = 0.5$ e poiché si richiede per quali valori di x la curva blu si mantiene al di sopra della curva rossa, la soluzione della disequazione è rappresentata dall'intervallo $x < 0.5$.



3. Le equazioni e le disequazioni logaritmiche

Anche per la risoluzione di equazioni e disequazioni di tipo logaritmico valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per quelle di tipo esponenziale; non esistono quindi comandi specifici per trovare le soluzioni.

Sia usando GeoGebra, sia usando Wiris, dobbiamo scrivere l'equazione o la disequazione nella forma

$$\log_a f(x) \gtreqless \log_a g(x)$$

e confrontare i grafici delle funzioni ai due membri.

Usiamo GeoGebra

La funzione $\log_a x$ si scrive in modo diverso a seconda del tipo di logaritmo:

- $\ln(x)$ indica il logaritmo naturale
- $\lg(x)$ indica il logaritmo in base 10
- $\mathrm{ld}(x)$ indica il logaritmo in base 2
- $\log(a, x)$ indica il logaritmo in base a

Risolviamo allora l'equazione $\log_2(3x-2) = \log_2(x+1)$

Determiniamo dapprima il dominio dell'equazione che è la soluzione del sistema $\begin{cases} 3x-2>0 \\ x+1>0 \end{cases}$

Per indicare che due o più disequazioni devono essere verificate contemporaneamente, nella riga di inserimento scriviamo:

$$(3x - 2 > 0) \wedge (x + 1 > 0)$$

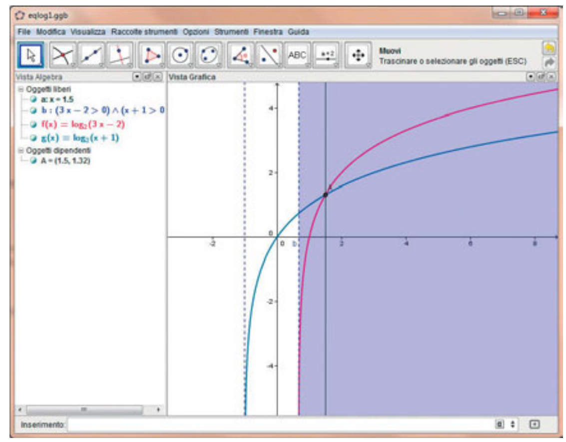
L'insieme delle soluzioni, che è $x > \frac{2}{3}$, viene raffigurato tramite il semipiano in colore.

Costruiamo adesso i grafici delle due funzioni:

$$f(x) = ld(3x - 2)$$
$$g(x) = ld(x + 1)$$

Il loro punto di intersezione A trovato con il comando 2-*Intersezione di due oggetti* ha ascissa 1.5.
Verifichiamo che questo valore è anche la soluzione dell'equazione che si ottiene uguagliando gli argomenti dei due logaritmi; scriviamo quindi nella riga di inserimento l'equazione

$$3x - 2 = x + 1$$



La soluzione è la stessa e graficamente è rappresentata dalla retta parallela all'asse y passante per il punto A.
In modo del tutto analogo puoi procedere per risolvere una disequazione. Per esempio volendo risolvere la disequazione

$$\log_2(3x - 2) < \log_2(x + 1)$$

sfruttiamo la stessa rappresentazione grafica precedente.
La prima curva (in rosso) è minore della seconda (in blu) per tutti i valori di x che appartengono al dominio e che sono minori di 1.5; quindi l'intervallo $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$.