ESERCIZI

# Rette, piani e figure nello spazio

## RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

*teoria a pagina 1*

### Comprensione

**1** Descrivi le posizioni reciproche di:
**a.** due rette nello spazio
**b.** due piani nello spazio.

**2** Se due rette $a$ e $b$ sono sghembe, è vero che una terza retta $c$ sghemba con $a$ lo è anche con $b$? Analizza le situazioni che si possono presentare.

**3** Se due rette $a$ e $b$ sono complanari ed una terza retta $c$ è complanare con $a$, è sempre vero che $b$ e $c$ sono complanari?

**4** Completa le seguenti proposizioni in modo che siano vere.
**a.** Se due piani hanno in comune tre punti, allora ...............................................
**b.** Se due piani hanno in comune due punti, allora ..............................................
**c.** Se due piani hanno in comune un punto, allora ...............................................

**5** Dati una retta $r$ ed un suo punto $P$, quante perpendicolari si possono tracciare da $P$ ad $r$? Qual è la caratteristica di tali rette? Quando si dice che una retta è perpendicolare ad un piano? Dopo aver giustificato le tue risposte, dai la definizione di perpendicolarità fra rette e piani.

**6** Qual è il criterio che permette di stabilire se una retta è perpendicolare ad un piano? Perché non si può usare la definizione?

**7** Enuncia il teorema delle tre perpendicolari e illustralo con un disegno.

**8** Che cos'è la proiezione ortogonale di un punto su un piano? Se da un punto $P$ esterno ad un piano $\alpha$ si conducono il segmento di perpendicolare ed alcuni segmenti obliqui, quali considerazioni si possono fare relativamente a tali segmenti e alle loro proiezioni?

**9** Come si definisce l'angolo fra una retta ed un piano?

**10** Completa le seguenti proposizioni in modo che risultino vere.
**a.** Due rette che sono perpendicolari ad uno stesso piano sono ............................
**b.** Se due rette sono parallele, un piano che è perpendicolare all'una è ................
**c.** Date due rette parallele $r$ e $s$ e considerati un piano passante per $r$ ed uno passante per $s$ che si intersecano lungo una terza retta $t$, si ha che ......................
**d.** La relazione di parallelismo fra rette possiede le proprietà ......................, quindi definisce il concetto di .....................

**11** Stabilisci se le seguenti proposizioni sono vere o false.
**a.** Tre rette fra loro parallele appartengono sempre allo stesso piano. V F

**b.** Sia $\alpha$ un piano passante per una retta $r$ e $\beta$ un piano passante per una retta $s$ e sia $r \parallel s$, allora $\alpha$ è sempre parallelo a $\beta$. V F

**c.** I due piani $\alpha$ e $\beta$ della proposizione precedente o sono paralleli o si intersecano lungo una retta parallela a $r$ e a $s$. V F

**12** Dopo aver dato la definizione di parallelismo fra una retta e un piano e indicato quali sono le proprietà di questa relazione, spiega come si determina la distanza fra retta e piano.

## Applicazione

**13** Quanti piani individuano tre rette non complanari che passano per uno stesso punto $O$?

**14** I punti $A$, $B$ e $C$ appartengono contemporaneamente ai due piani $\alpha$ e $\beta$ tra loro secanti; che cosa puoi dire di tali punti?

**15** In quante regioni tre piani dividono lo spazio se:

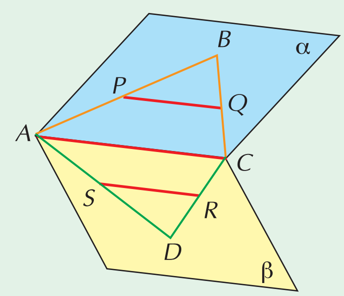
**a.** nessuno dei tre incontra gli altri;
**b.** i primi due non si incontrano ed entrambi incontrano il terzo;
**c.** i tre piani hanno una retta in comune.

**16** ESERCIZIO GUIDATO

Dati quattro punti $A$, $B$, $C$, $D$ non complanari, dimostra che i punti medi $P$, $Q$, $R$, $S$ dei segmenti $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ sono complanari.

I punti $A$, $B$, $C$ individuano un piano $\alpha$; considera il triangolo $ABC$: sai che $PQ$ è ............ ad $AC$; analogamente i punti $A$, $C$, $D$ individuano un piano $\beta$ ed è ...............

I segmenti $PQ$ e $RS$ sono quindi ................. e perciò .................




**17** Dati i punti $A$ e $B$ dello spazio verifica che se quattro punti $P$, $Q$, $R$, $S$ sono tali che: $PA \cong PB$, $QA \cong QB$, $RA \cong RB$, $SA \cong SB$, allora i punti $P$, $Q$, $R$, $S$ sono complanari.

**18** Tenendo presente quanto dimostrato all'esercizio precedente, sai dire qual è nello spazio il luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento?

**19** Un triangolo $ABC$ appartiene a un piano $\alpha$; conduci per $A$ la perpendicolare ad $\alpha$ e prendi su di essa un punto $P$; descrivi le caratteristiche dei triangoli $PAC$ e $PAB$; se il triangolo $ABC$ fosse isoscele di base $BC$ che cosa si potrebbe dire del triangolo $PBC$?

**20** Calcola le misure delle proiezioni su un piano $\alpha$ di un segmento $AB$ lungo 10cm nei seguenti casi:

**a.** $AB$ è parallelo ad $\alpha$
**b.** $AB$ forma con $\alpha$ un angolo di 30°
**c.** $AB$ forma con $\alpha$ un angolo di 45°
**d.** $AB$ forma con $\alpha$ un angolo di 60°
**e.** $AB$ è perpendicolare ad $\alpha$.

**21** Date tre rette $r$, $s$ e $t$ tali che $r \parallel s$ e $s \parallel t$ e non complanari, esiste una retta che le incontra tutte e tre? Giustifica la tua risposta.
(Suggerimento: osserva che se esistesse una retta $v$ che interseca tutte e tre le rette, $v$ dovrebbe appartenere al piano di ................)

**22** Descrivi la procedura per tracciare un piano parallelo a due rette incidenti.

## Diedri, perpendicolarità nello spazio e angoloidi

teoria a pagina 7

### Comprensione

**23** Dai la definizione di angolo diedro e spiega quando:
**a.** un diedro si dice piatto
**b.** un diedro si dice concavo oppure convesso
**c.** due diedri sono consecutivi
**d.** due diedri sono adiacenti.

**24** Un diedro concavo può anche essere definito come l'unione di due semispazi; come può essere definito in modo analogo un diedro convesso?

**25** Definisci il semipiano bisettore e spiega che cosa significa che due diedri sono complementari.

**26** Dopo aver definito la sezione di un diedro, specifica:
**a.** quando la sezione è normale
**b.** qual è la caratteristica delle sezioni normali
**c.** come si misura un diedro.

**27** Completa le seguenti proposizioni in modo che risultino vere.
**a.** Se una retta $r$ è perpendicolare ad un piano $\alpha$, tutti i piani che passano per $r$ sono ..............
**b.** Se una retta $r$ è perpendicolare ad un piano $\alpha$, tutti i piani perpendicolari a $r$ sono ..............
**c.** Se due rette sono parallele, ogni piano perpendicolare alla prima è ...........................

**28** Dai la definizione di angoloide ed enuncia le sue proprietà, dimostrando in particolare quella relativa ai triedri.

### Applicazione

**29** Sia $\gamma$ il semipiano bisettore del diedro $\alpha\beta$; una retta $r$ perpendicolare a $\gamma$ in un punto $C$ incontra $\alpha$ in $A$ e $\beta$ in $B$. Dimostra che $AC \cong CB$.

**30** Individua le caratteristiche di un diedro che è dato da:
**a.** la somma di un diedro retto con un diedro acuto;
**b.** la somma di un diedro retto con un diedro ottuso;
**c.** il doppio di un diedro acuto;
**d.** il doppio di un diedro ottuso;
**e.** la metà di un diedro ottuso.

**31** Quanti diedri ottusi si possono al massimo sommare per avere un diedro minore o uguale di un diedro giro?

**32** Sia $ABC$ un triangolo equilatero di lato $\ell$; dal vertice $A$ traccia la perpendicolare al piano del triangolo e su essa fissa il punto $D$ tale che $\overline{AD} = \ell$ e congiungi $D$ con $B$ e con $C$. Quali sono le ampiezze dei diedri di spigoli $DA$, $CA$ e $AB$? $[60°, 90°, 90°]$

## Poliedri e solidi di rotazione

teoria a pagina 9

### Comprensione

**33** Dopo aver definito una superficie poliedrica e un poliedro, illustra la relazione di Eulero.

**34** I poliedri regolari sono solo cinque; spiega qual è la giustificazione di questa affermazione e dai la descrizione di ciascuno di essi.

**35** Definisci il prisma e indica le sue caratteristiche. Quando un prisma prende il nome di *parallelepipedo*? Enuncia le proprietà di questo solido e dimostrale.

**36** Dopo aver definito la piramide, spiega:
**a.** quando una piramide è retta e quando è regolare
**b.** quali sono le caratteristiche di una piramide retta.

**37** Definisci il cilindro e successivamente:
**a.** enuncia le sue proprietà
**b.** spiega quando un cilindro si dice equilatero
**c.** definisci le posizioni reciproche di un cilindro e di un piano.

**38** Definisci il cono e indica le sue proprietà.

**39** Completa le seguenti proposizioni in modo che risultino vere:
**a.** un cilindro retto è equilatero se la sua sezione con un piano passante per l'asse è ........................
**b.** un cono retto è equilatero se la sua sezione con un piano passante per l'asse è ............................
**c.** l'apotema di un cono equilatero è congruente ............................

**40** Una superficie sferica si ottiene facendo ruotare:
**a.** un semicerchio attorno al diametro di una rotazione completa
**b.** una circonferenza attorno a un diametro di una rotazione di ampiezza $\pi$
**c.** una semicirconferenza attorno al diametro di una rotazione di ampiezza $2\pi$.

**41** Sia $S$ una sfera di centro $O$ e raggio $r$; si può dire che:
**a.** un piano $\alpha$ è tangente a $S$ se la distanza di $O$ da $\alpha$ è uguale a $r$ V F
**b.** un'altra sfera $S'$ di centro $O'$ e raggio $r'$ è tangente a $S$ se la distanza $OO'$ è minore di $r + r'$ V F
**c.** un piano $\alpha$ la cui distanza da $O$ è minore di $r$ taglia $S$ lungo una circonferenza di raggio $r' \leq r$ V F
**d.** un piano $\alpha$ interseca $S$ lungo una circonferenza di raggio $r$ solo se passa per $O$. V F

## *Applicazione*

**42** Qual è la figura geometrica sezione di un parallelepipedo con un piano che incontra i suoi spigoli laterali?

**43** Dimostra che le diagonali di un parallelepipedo retto avente per base un rombo sono congruenti a due a due.

**44** In una piramide a base quadrata uno spigolo è perpendicolare al piano della base; dimostra che le facce laterali sono tutte triangoli rettangoli.

**45** Una piramide regolare a base quadrata ha gli spigoli tutti uguali fra loro; indicata con $\ell$ la loro lunghezza, esprimi la lunghezza dell'apotema e dell'altezza della piramide in funzione di $\ell$. $\left[\frac{\ell\sqrt{3}}{2}; \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right]$

**46** Data una superficie cilindrica ed un punto $P$ a essa esterno, quanti piani ad essa tangenti si possono condurre da $P$?

**47** Descrivi la procedura per individuare il centro di una superficie sferica che passa per quattro punti assegnati.

**48** Dimostra che, tracciando in una sfera due piani paralleli aventi la stessa distanza dal centro, si ottengono cerchi congruenti.

## MISURE DI SUPERFICI E DI VOLUMI

### Comprensione

**49** Spiega che cos'è lo sviluppo piano di un solido e descrivi gli sviluppi di un prisma retto e di una piramide retta.

**50** Enuncia le regole per il calcolo della misura della superficie totale di un prisma e di una piramide retti. Spiega poi come si calcola la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo.

**51** Il principio di Cavalieri afferma che due solidi sono equivalenti se:
**a.** in qualunque modo essi vengano intersecati da un piano, le sezioni ottenute sono congruenti
**b.** esiste un piano $\alpha$ tale che tutti i piani ad esso paralleli tagliano i due solidi lungo sezioni equivalenti
**c.** esiste un piano $\alpha$ tale che tutti i piani ad esso paralleli tagliano i due solidi lungo sezioni congruenti.

**52** Completa le seguenti proposizioni.
**a.** Un prisma e un parallelepipedo aventi altezze congruenti sono equivalenti se ....................
**b.** Una piramide e un prisma aventi basi equivalenti sono equivalenti se .................
**c.** Un cilindro e un cono aventi altezze congruenti sono equivalenti se .......................

### Applicazione

#### Misure di superfici

**53** Un parallelepipedo rettangolo ha per base un quadrato di lato $\ell$; se la diagonale del parallelepipedo misura $2\ell$, calcola la superficie totale del solido. $\left[S = 2\ell^2\left(1+2\sqrt{2}\right)\right]$

**54** Una piramide triangolare regolare ha lo spigolo di base lungo 12 cm. Sapendo che l'altezza della piramide è la metà dell'apotema, calcola l'area della superficie totale del solido. $\left[S = \left(72+36\sqrt{3}\right)\text{cm}^2\right]$

**55** **ESERCIZIO GUIDATO**

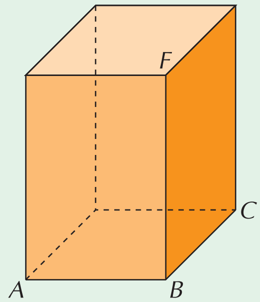
In un parallelepipedo rettangolo gli spigoli di base $AB$ e $BC$ e l'altezza $BF$ sono proporzionali ai numeri 3, 4 e 5 e la loro somma è 60cm; calcola la misura della superficie totale del solido. Condotto il piano che passa per due spigoli opposti e incontra le basi lungo una diagonale, calcola la superficie totale di ciascuno dei due prismi che si ottengono.

I dati del problema indicano che: $\overline{AB} : 3 = \overline{BC} : 4 = \overline{BF} : 5$

Applicando la proprietà del comporre otteniamo:

$$\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BF}\right) : (3+4+5) = \overline{AB} : 3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 60 : 12 = \overline{AB} : 3 \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = 15$$




Utilizzando la stessa proporzione puoi trovare le altre due dimensioni del parallelepipedo. $\left[2350\text{cm}^2;\ 1800\text{cm}^3\right]$

**56** L'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo è $888a^2$. Calcola la misura delle sue dimensioni sapendo che sono proporzionali ai numeri $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{16}{15}$, trova poi anche la lunghezza della diagonale. $\left[12a,\ 9a,\ 16a,\ d = \sqrt{481}\,a\right]$

**57** In un prisma quadrangolare regolare l'area della superficie totale è $264\ell^2$ mentre la somma di tutti i suoi spigoli è $80\ell$. Determina le dimensioni del solido. $\left[6\ell,\ 8\ell;\ \frac{22}{3}\ell,\ \frac{16}{3}\ell\right]$

**58** Una piramide quadrangolare regolare ha lo spigolo di base che è lungo $6\ell$, mentre lo spigolo delle facce laterali è lungo $9\ell$; calcola la lunghezza dello spigolo $s$ di un cubo che ha la stessa superficie della piramide e la lunghezza della sua diagonale. $\left[s = \ell\sqrt{6(2\sqrt{2}+1)};\ d = 3\ell\sqrt{4\sqrt{2}+2}\right]$

**59** La sezione di un cilindro con un piano passante per il suo asse ha area $80\text{cm}^2$; si sa inoltre che il rapporto fra l'altezza ed il raggio del cilindro è $\frac{5}{2}$. Calcola la superficie totale del cilindro. $[S = 112\pi\text{cm}^2]$

**60** L'altezza di un cono circolare retto è la metà dell'apotema di lunghezza $a$; calcola, in funzione di $a$, la misura della superficie totale del cono e quella del cilindro in esso inscritto che ha altezza pari ad $\frac{1}{3}$ di quella del cono. $\left[\frac{\pi}{4}a^2(3+2\sqrt{3});\ \frac{\pi}{9}a^2(6+\sqrt{3})\right]$

**61** L'apotema di un cono di vertice $V$ è lungo 30cm e la sua altezza è i $\frac{4}{3}$ del raggio di base; determina a quale distanza da $V$ si deve condurre un piano parallelo alla base del cono in modo che il cilindro in esso inscritto e avente per base il cerchio sezione abbia superficie laterale uguale a $162\pi\text{cm}^2$. $[18\text{cm} \vee 6\text{cm}]$

**62** Un cono retto ha il raggio di base di lunghezza $6\ell$ e l'altezza di lunghezza $8\ell$; trova:
**a.** l'area della superficie della sfera in esso inscritta
**b.** il raggio del cerchio individuato dai punti di tangenza della sfera con la superficie laterale del cono.
$\left[\mathbf{a}.\ 36\pi\ell^2;\ \mathbf{b}.\ \frac{12}{5}\ell\right]$

## *Misure di volumi*

**63** Un prisma retto ha per base un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 5cm e 12cm e la sua altezza è congruente all'ipotenusa del triangolo di base. Calcola la misura della superficie totale ed il volume del solido. $[450\text{cm}^2;\ 390\text{cm}^3]$

**64** La diagonale di un cubo misura $d$; esprimi la misura della superficie totale e del volume del cubo in funzione di $d$. $\left[2d^2;\ \frac{\sqrt{3}d^3}{9}\right]$

**65** L'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo è $5440a^2$ e le sue dimensioni sono proporzionali ai numeri 10, 5, 8. Calcola la misura del volume e della diagonale.
(Suggerimento: indica con $10x$, $5x$, $8x$ le dimensioni del parallelepipedo, calcola l'espressione della superficie totale e imponi che sia uguale al valore dato) $[25600a^3;\ 12\sqrt{21}a]$

**66** L'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo è $246\text{dm}^2$ e la sua altezza è 3dm; le dimensioni del rettangolo di base differiscono di 1dm. Calcola il volume del solido. $[216\text{dm}^3]$

**67** Un prisma retto ha per base un triangolo equilatero e l'altezza del prisma è i $\frac{3}{4}$ del lato di base; se il volume del solido è $12\sqrt{3}\ \text{cm}^3$, calcola le misure dei suoi spigoli e quella dell'area della superficie totale. $\left[\text{lato di base} = 4\text{cm};\ \text{altezza} = 3\text{cm};\ S = (36+8\sqrt{3})\text{cm}^2\right]$

**68** Un parallelepipedo retto ha per base un rombo ed ha il volume di $1536\sqrt{3}\text{cm}^3$; la diagonale maggiore del parallelepipedo è lunga 32cm e forma un angolo di 60° con il piano di base. Calcola la superficie totale del solido. $[(192+640\sqrt{3})\text{cm}^2]$

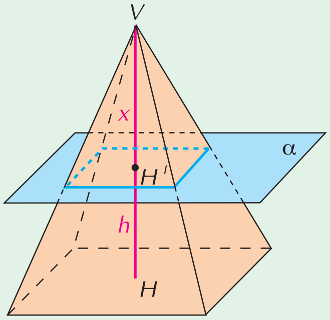
**69** Un prisma regolare a base esagonale ha la superficie totale pari a $72\sqrt{3}\text{m}^2$ e la sua superficie laterale è uguale a quella di una base. Calcola il volume del solido. $[72\text{m}^3]$

**70** Il volume di un parallelepipedo a base quadrata è $3456\text{cm}^3$ e di esso si sa che l'altezza è doppia dello spigolo di base. Un piano inclinato di $30°$ rispetto al piano di base, in modo che il poligono sezione sia un rettangolo, lo divide in due solidi i cui volumi hanno rapporto $\dfrac{4+\sqrt{3}}{8-\sqrt{3}}$. Calcola le superfici totali dei due solidi che si ottengono. $\left[(528+192\sqrt{3})\text{cm}^2;\ 912\text{cm}^2\right]$

**71** Una piramide triangolare regolare ha l'altezza congruente allo spigolo di base e la sua superficie totale è $9\sqrt{3}(1+\sqrt{13})\text{cm}^2$. Calcola la misura dello spigolo di base ed il volume della piramide. $[\text{spigolo} = 6\text{cm};\ V = 18\sqrt{3}\text{cm}^3]$

**72** **ESERCIZIO GUIDATO**

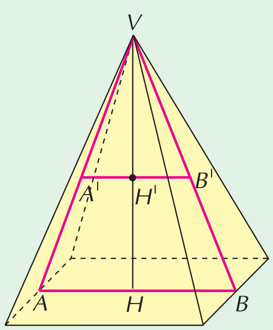
Una piramide quadrangolare regolare avente il lato di base di 6 cm ha altezza $h = 12$ cm; determina a quale distanza dal vertice deve essere condotto un piano $\alpha$ parallelo alla base in modo che le due parti in cui resta divisa la piramide siano equivalenti.




Indichiamo con $x$ l'altezza $VH'$ della piramide staccata dal piano $\alpha$. Sezionando il solido con un piano passante per $V$, perpendicolare al piano di base e parallelo a uno dei lati della base otteniamo i due triangoli isosceli $VAB$ e $VA'B'$ che sono simili. Possiamo quindi scrivere la proporzione:

$AB : A'B' = VH : VH' \quad \rightarrow \quad 6 : A'B' = 12 : x$

da cui ricaviamo che $A'B' = \dfrac{6x}{12} = \dfrac{1}{2}x$.




Il volume della piramide data è: $V_1 = \dfrac{36 \cdot 12}{3} = 144$.

Il volume della piramide staccata da $\alpha$ è: $V_2 = \dfrac{1}{4}x^2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}x^3$.

Il volume $V_3$ della parte rimanente è la differenza fra i due e quindi $V_3 = 144 - \dfrac{1}{12}x^3$.

Dovendo essere $V_2 = V_3$ otteniamo l'equazione: $\dfrac{1}{12}x^3 = 144 - \dfrac{1}{12}x^3 \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{6}x^3 = 144 \quad \rightarrow$
$\rightarrow \quad x^3 = 864 \quad \rightarrow \quad x = 6\sqrt[3]{4}$

**73** Sia $ABC$ un triangolo equilatero di lato $\ell$; traccia per il vertice $B$ la retta perpendicolare al piano del triangolo e prendi su di essa un punto $V$ in modo che l'angolo $VAB$ sia di $30°$. Calcola il volume e l'area della superficie totale della piramide che si ottiene congiungendo $V$ con i vertici del triangolo. $\left[S = \dfrac{7+\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}\ell^2;\ V = \dfrac{1}{12}\ell^3\right]$

**74** In una piramide quadrangolare regolare il lato di base è $\dfrac{10}{13}$ dell'apotema e la differenza tra la superficie laterale e quella di base è $160a^2$. Calcola il volume della piramide. $[V = 400a^3]$

**75** Un cubo è diviso in due parti da un piano passante per la diagonale di tre facce aventi un vertice in comune. Calcola l'area della superficie totale ed il volume della piramide triangolare così ottenuta in funzione dello spigolo $\ell$ del cubo. $\left[V = \dfrac{1}{6}\ell^3;\ S = \dfrac{1}{2}\ell^2(3+\sqrt{3})\right]$

**76** Tenendo presente che se in una piramide a base quadrata uno spigolo è perpendicolare al piano della base le sue facce sono triangoli rettangoli, calcola il volume della piramide sapendo che il lato di base è $\ell$ e che la sua superficie totale è $(3+\sqrt{5})\ell^2$.

$\left[V=\frac{2}{3}\ell^3\right]$

**77** L'angolo di semiapertura di un cono è 30° ed il suo apotema è lungo 12cm. Calcola la superficie totale del cono e quella del cilindro in esso inscritto che ha volume pari a $\frac{4}{9}$ di quello del cono.

$\left[S_t(\text{cono})=108\pi\text{cm}^2;\ S_t(\text{cilindro})=16\pi(2+\sqrt{3})\text{cm}^2\right]$

**78** Il rapporto fra l'area della superficie totale e quella laterale di un cilindro è $\frac{17}{12}$ e l'area di base è $25\pi\text{cm}^2$. Calcola il volume del cilindro.

$[V=300\pi\text{cm}^3]$

**79** L'area di base di un cono circolare retto è $225\pi\text{cm}^2$ e l'altezza è 20cm; calcola il volume e la superficie totale del cono.

$[S=600\pi\text{cm}^2;\ V=1\,500\pi\text{cm}^3]$

**80** Lo sviluppo piano di un cono circolare retto è un settore circolare di raggio $r$ e ampiezza 60°. Trova il volume del cono.

$\left[V=\frac{\sqrt{35}}{648}\pi r^3\right]$

**81** Un cono circolare retto ha la superficie laterale che è doppia della superficie di base e la sua altezza misura $6\sqrt{3}$cm. Dopo aver dimostrato che il cono è equilatero, calcola la sua superficie totale ed il suo volume.

$[S=108\pi\text{cm}^2;\ V=72\sqrt{3}\pi\text{cm}^3]$

**82** L'altezza di un cono circolare retto è doppia del raggio $r$ di una sfera ed i due solidi sono equivalenti. Calcola la misura del raggio di base del cono e quella della sua superficie totale.

$\left[\text{raggio}=r\sqrt{2};\ S=2\pi r^2(1+\sqrt{3})\right]$

**83** Un cilindro retto ha la superficie laterale che è di $108\pi\text{cm}^2$ e il rapporto fra la sua altezza e il raggio di base è 6. Un prisma retto è circoscritto al cilindro ed ha per base il triangolo equilatero circoscritto alla circonferenza di base del cilindro. Trova la misura del volume del prisma svuotato del volume del cilindro.

$[162(3\sqrt{3}-\pi)\text{cm}^3]$

## ESERCIZI RIASSUNTIVI

**84** La lunghezza del meridiano terrestre è circa 40000km; trova l'area della superficie ed il volume della Terra.

$\left[S=\frac{16\cdot10^{14}}{\pi}\text{m}^2\approx5{,}093\cdot10^{14}\text{m}^2;\ V=\frac{32}{3}\frac{10^{21}}{\pi^2}\text{m}^3=1{,}0808\cdot10^{21}\text{m}^3\right]$

**85** La differenza fra i volumi di due sfere è $\frac{64}{3}\pi\text{cm}^3$ ed il rapporto fra i raggi è $\frac{3}{5}$. Calcola l'area della superficie delle due sfere.

$\left[S_1=\frac{400}{7\sqrt[3]{7}}\pi;\ S_2=\frac{144}{7\sqrt[3]{7}}\pi\right]$

**86** Una piramide retta a base quadrata ha gli angoli diedri formati dalla base con le facce laterali che sono ampi 60° e di essa si sa che il lato di base è $24a$. Determina a quale distanza dal vertice occorre condurre un piano parallelo alla base in modo che la superficie laterale della piramide che si stacca sia uguale a quella che rimane.

$[\text{distanza del vertice dal piano}=6a\sqrt{6}]$

**87** In una piramide esagonale regolare la superficie totale è $162\sqrt{3}a^2$ e ogni faccia forma un angolo di 60° col piano di base. Calcola il volume della piramide. Un piano parallelo alla base e a distanza $x$ dal vertice individua un esagono regolare di area $6\sqrt{3}a^2$. Calcola il volume del prisma inscritto nella piramide che ha per basi il poligono sezione e la sua proiezione ortogonale sulla base della piramide.

$\left[162\sqrt{3}a^3;\ 36\sqrt{3}a^3\right]$

**88** Lo sviluppo piano della superficie laterale di un cono circolare retto di vertice $V$ e avente raggio di base $r$ dà origine ad un semicerchio; calcola la misura della superficie totale del cono. Determina poi un punto $P$ sull'altezza $VO$ del cono in modo che il cilindro di altezza $PO$ e base coincidente con quella del cono abbia superficie totale uguale a quella del cono.

$\left[S_{t(\text{cono})} = 3\pi r^2;\ \overline{PO} = \frac{r}{2}\right]$

**89** Un cono circolare retto ha la base coincidente con quella di una semisfera ed è situato nel semispazio opposto a quello della semisfera; inoltre si sa che le generatrici del cono formano un angolo di 60° con il piano della base. Un piano passante per l'asse del cono determina una superficie sezione di area $\frac{\pi + 2\sqrt{3}}{32}$ rispetto ad una certa unità di misura $u^2$. Calcola il volume del solido e quello del cilindro ad esso circoscritto.

$\left[\frac{\pi}{192}\left(2+\sqrt{3}\right)u^3;\ \frac{\pi}{64}\left(1+\sqrt{3}\right)u^3\right]$

**90** Un cono circolare retto è generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo di area 96cm$^2$ attorno ad un cateto; il volume del cono è $1024\pi$cm$^3$. Calcola l'area della sua superficie laterale.

$\left[r = 16\text{cm};\ h = 12\text{cm};\ S_\ell = 320\pi\text{cm}^2\right]$

**91** Sono dati una sfera di raggio $r$, il cilindro equilatero ed il cono equilatero in essa inscritti. Verifica che il volume del cilindro è medio proporzionale fra il volume del cono e quello della sfera.

**92** Un cono di vertice $V$ è inscritto in una semisfera di raggio $r$ e la sua base coincide con quella della semisfera. Un piano parallelo alla base e posto a distanza $x$ da $V$ interseca la sfera ed il cono individuando una corona circolare. Determina il valore di $x$ in modo che il rapporto fra l'area della corona circolare e quella del cerchio di base del cono sia uguale a $\frac{1}{4}$.

$\left[\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}r\right]$

**93** Un oggetto ha la forma di un cubo di lato $\ell$ con un foro a forma di piramide avente la base coincidente con quella del cubo e vertice nel suo centro. Calcola il volume del solido e la sua superficie totale.

$\left[V = \frac{5}{6}\ell^3;\ S_t = \left(5+\sqrt{2}\right)\ell^2\right]$

**94** Un parallelogramma $ABCD$ è la base di un parallelepipedo retto; sia $P$ il punto del lato $AB$ tale che $AP \cong 2PB$. Sia $\alpha$ il piano passante per $PC$ e perpendicolare al piano del parallelogramma. Calcola il rapporto fra i volumi dei due solidi in cui il parallelepipedo resta diviso da $\alpha$.
(Suggerimento: assegna delle lunghezze arbitrarie allo spigolo $AB$, all'altezza del parallelogramma e all'altezza del prisma)

[5]

**95** È dato un cono di raggio $r$ ed altezza $3r$; inscrivi in esso un cilindro che abbia l'area della superficie totale uguale a 2 volte l'area di base del cono.

$\left[\text{raggio del cilindro } \frac{1}{2}r\right]$

**96** Un cono ha l'altezza congruente al raggio di base di misura $a$. Determina la lunghezza del segmento di cui si deve diminuire l'altezza ed aumentare il raggio di base in modo che il cono ottenuto sia equivalente a quello dato; calcola poi le aree delle superfici totali dei due solidi e stabilisci quale dei due ha area maggiore.

$\left[\frac{1}{2}a\left(\sqrt{5}-1\right);\ \text{il secondo}\right]$

**97** In un trapezio la base maggiore è il doppio di quella minore. Considera i due solidi che si ottengono facendo ruotare il trapezio prima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore. Calcola il rapporto fra i volumi dei due solidi.

$\left[\frac{4}{5}\right]$

## Soluzioni esercizi di comprensione

**4** **a.** sono lo stesso piano, **b.** si intersecano lungo la retta per quei due punti, **c.** hanno in comune i punti di una retta che passa per quel punto

**10** **a.** parallele, **b.** perpendicolare all'altra, **c.** $t$ è parallela a $r$ e a $s$, **d.** riflessiva, simmetrica, transitiva, direzione

**11** **a.** F, **b.** F, **c.** V

**27** **a.** perpendicolari ad $\alpha$, **b.** paralleli ad $\alpha$, **c.** perpendicolare alla seconda

**39** **a.** un quadrato, **b.** un triangolo equilatero, **c.** al diametro

**40** **b.**, **c.**

**41** **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** V

**51** **b.**

**52** **a.** hanno basi equivalenti; **b.** l'altezza del prisma è $\frac{1}{3}$ dell'altezza della piramide; **c.** la base del cilindro è $\frac{1}{3}$ della base del cono

# Test Finale

**1** Barra vero o falso.

**a.** Una retta non può avere solo due punti in comune con un piano. V F

**b.** Per un punto $P$ passa una e una sola retta perpendicolare ad un piano assegnato. V F

**c.** Per un punto $P$ passa una e una sola retta parallela ad un piano assegnato. V F

**d.** Due rette definiscono sempre un piano. V F

**e.** Due rette che si intersecano o che sono parallele definiscono sempre un piano. V F

**f.** Per un punto dello spazio esiste uno e un solo piano parallelo ad un piano dato V F

1,5 punti

**2** Assegnato un punto $A$ fisso e un angolo $\alpha$, il luogo dei punti $P$ di un piano $\pi$ tali che $PA$ formi un angolo di ampiezza $\alpha$ con $\pi$ è:

**a.** una retta **b.** una circonferenza **c.** il contorno di un quadrato **d.** il luogo non esiste.

Scegli la risposta corretta.

0,5 punti

**3** Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni.

**a.** Se due diedri hanno sezioni congruenti allora sono congruenti. V F

**b.** Due piani che si intersecano definiscono quattro diedri congruenti a due a due. V F

**c.** Due diedri opposti allo spigolo hanno la stessa sezione normale. V F

**d.** Un triedro è un angoloide che ha tre facce congruenti. V F

**e.** Un triedro non può avere tre facce congruenti. V F

**f.** La sezione di un angoloide con un piano non passante per il suo vertice è sempre un poligono. V F

1,5 punti

**4** Un prisma è retto se:

**a.** due facce laterali consecutive formano diedri retti

**b.** l'altezza è perpendicolare ai piani di base

**c.** le sue facce laterali formano diedri retti con i piani di base.

Scegli la risposta corretta.

0,5 punti

**5** In una piramide:

**a.** l'apotema è l'altezza delle facce laterali ed esiste solo se le facce sono triangoli congruenti V F

**b.** l'apotema è l'altezza delle facce laterali ed esiste solo se il poligono di base è inscrittibile in una circonferenza V F

**c.** l'apotema è l'altezza delle facce laterali ed esiste solo se il poligono di base è circoscrittibile ad una circonferenza V F

**d.** un piano parallelo alla base individua un poligono simile a quello di base. V F

1 punto

**6** Barra vero o falso.

**a.** Un cilindro è equilatero se l'altezza è uguale al diametro di base V F

**b.** Un cilindro è equilatero se l'altezza è uguale al raggio di base. V F

**c.** Un cono retto è originato dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno all'ipotenusa. V F

**d.** In un cono retto l'altezza cade nel centro della circonferenza di base. V F

**e.** In una sfera il cerchio massimo passa per il suo centro. V F

**f.** Una sfera viene divisa da un piano che la interseca in due semisfere. V F

1,5 punti

**7** E' dato un parallelepipedo rettangolo a base quadrata di lato $\ell$ e di altezza $h$; un piano parallelo alle basi lo divide in due parallelepipedi di volume uno doppio rispetto all'altro; si può dire che:

**a.** l'area del poligono sezione misura: ① $\ell^2$ ② $\frac{1}{2}\ell^2$ ③ $2\ell^2$

**b.** il rapporto fra le altezze dei due parallelepipedi è: ① 4 ② 3 ③ 2

**c.** il rapporto fra le due superfici laterali è: ① 4 ② 3 ③ 2

1,5 punti

**8** Un cono e un cilindro hanno lo stesso volume e la stessa altezza; il rapporto fra i loro raggi di base è:

**a.** $\sqrt{2}$ **b.** 2 **c.** $\sqrt{3}$ **d.** 3

1 punto

**9** Le aree $A$ e $A'$ delle superfici di due tetraedri regolari sono tali che $\frac{A}{A'} = 4$; il rapporto fra i loro volumi:

**a.** non si può calcolare **b.** è 16 **c.** è 4 **d.** è 8

1 punto

# Soluzioni

**1** **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** F, **e.** V, **f.** V

**2** **b.**

**3** **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** F, **e.** F, **f.** V

**4** **c.**

**5** **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** V

**6** **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** V, **e.** V, **f.** F

**7** **a.** ①, **b.** ③, **c.** ③

**8** **c.**

**9** **d.**

| **Esercizio** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Punteggio** | | | | | | | | | | |

Valutazione in decimi