APPROFONDIMENTO

Le derivate e le Scienze

Velocità e accelerazione

Un punto materiale si muove di moto rettilineo con equazione oraria $s = f(t)$. Sappiamo che la sua velocità media e la sua accelerazione media nell'intervallo di tempo Δt sono date da

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{e} \qquad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La velocità e l'accelerazione istantanea sono invece date da

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t)$$

Per esempio, se vogliamo determinare la velocità e l'accelerazione di un punto che si muove di moto rettilineo con equazione oraria $s = \frac{1}{2}t^2 - 3t$ in un istante t, dobbiamo determinare la derivata prima dello spazio rispetto al tempo per determinare la velocità e la derivata seconda per determinare l'accelerazione:

$$v = s' = t - 3 \qquad a = s'' = v' = 1$$

Forza ed energia potenziale

Quando un corpo si muove lungo una linea retta sotto l'azione di una forza conservativa, l'energia potenziale U è una funzione della sua posizione x e la derivata di tale funzione, cambiata di segno, è uguale alla forza che agisce sul corpo; vale cioè la relazione

$$F(x) = -U'(x)$$

Se consideriamo una molla fissata ad una parete, assumiamo come asse x quello della direzione dell'allungamento e scegliamo come origine l'estremo libero della molla nella sua posizione di riposo, si ha una situazione in cui vale la legge sopra enunciata. Sappiamo che l'energia potenziale della molla dipende dal suo allungamento secondo la relazione

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

dove k è la costante di allungamento. La forza agente F ha dunque modulo

$$F(x) = -U'(x) = -kx$$

e ritroviamo così la legge di Hooke.

Intensità di corrente

In Fisica si definisce l'intensità di corrente come la quantità di carica ΔQ che passa attraverso la sezione di un conduttore nell'intervallo di tempo Δt:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Se il flusso di carica non è costante nel tempo, il suo valore, istante per istante, è espresso da una funzione $Q(t)$; l'intensità di corrente deve in questo caso essere definita da:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t}$$

cioè i è la derivata della funzione $Q(t)$.

Legge di induzione elettromagnetica

Un magnete che si muove rispetto ad una spira genera in essa una corrente indotta; situazioni analoghe si hanno anche quando una spira è posta nelle vicinanze di un circuito in cui la corrente non è costante nel tempo oppure quando una spira e un circuito sono in movimento uno rispetto all'altro. Michael Faraday in Inghilterra e Joseph Henry negli Stati Uniti, intorno al 1831, eseguirono molti esperimenti a questo riguardo e Faraday fu il primo ad intuire che la causa della comparsa di una corrente elettrica laddove non esiste una forza elettromotrice in grado di generarla è dovuta alla variazione del flusso del campo magnetico che attraversa la spira.
La legge dell'induzione di Faraday si esprime con la relazione

$$f_i = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

dove f_i rappresenta la *forza elettromotrice indotta* e $\Phi_B(t)$ è il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito e variabile nel tempo, cioè f_i è la derivata della funzione $\Phi_B(t)$.

Esercizi

1 La legge del moto di una particella è data dalla funzione $s = 3t^3 - 2$, dove t indica il tempo in secondi e s la distanza in metri rispetto ad un osservatore O. Determina la velocità della particella all'istante $t = 2$ motivando il procedimento seguito per ottenere il risultato. [$v = 36$ m/s]

2 Un corpo si muove lungo una retta orientata secondo la legge $s = t^2\, e^{-2t}$. Determina in quali istanti la velocità e l'accelerazione sono nulle. $\left[v = 0 \text{ per } t = 0 \vee t = 1;\ a = 0 \text{ per } t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right]$

3 La legge del moto di una particella che si muove di moto rettilineo è data dalla relazione $s = 3 \sin(t + \pi)$. Rappresenta graficamente tale legge e determina l'espressione analitica, in funzione del tempo, della velocità e dell'accelerazione della particella. Calcola infine la posizione, la velocità e l'accelerazione all'istante $t = 0$. [$s(0) = 0$; $v(0) = -3$; $a(0) = 0$]

4 La funzione $q(t) = \ln(2 + \sin t) + 4$ rappresenta, in Coulomb, la quantità di carica che attraversa al variare del tempo t, espresso in secondi, la sezione di un filo. Esprimi, in funzione di t, l'intensità della corrente che percorre il filo e calcolane il valore all'istante $t = 0$. $\left[i(t) = \frac{\cos t}{2 + \sin t};\ i(0) = 0{,}5A\right]$

5 In una bobina, di induttanza $L = 6mH$ e resistenza trascurabile, circola una corrente i che varia nel tempo secondo la legge $i(t) = 0{,}2 \sin\left(0{,}1t - \frac{\pi}{2}\right)$ e la cui intensità è espressa in Ampére. Calcola, in funzione del tempo t, la forza elettromotrice autoindotta. $\left[e_i(t) = 0{,}12 \cos\left(0{,}1t - \frac{\pi}{2}\right) mV\right]$

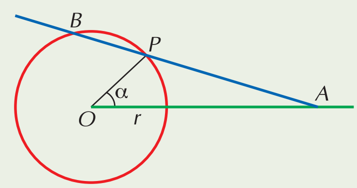
6 Un corpo C si muove lungo una retta orientata con la legge oraria $s(t) = t^3 - 3t + 5$. Determina:

a. le funzioni $v(t)$ e $a(t)$ che esprimono la velocità e l'accelerazione del corpo in funzione del tempo;
b. l'istante t_1 in cui il corpo si ferma; [$t_1 = 1$]
c. l'istante t_2 in cui l'accelerazione è nulla; [$t_2 = 0$]
d. il verso ed il modulo della velocità di C nell'istante iniziale $t = 0$. [$v = 3$; moto retrogrado]

7 Un corpo di massa $m = 5$kg si muove lungo una retta orientata con la legge oraria $s(t) = \ln(t + 2) + (t + 2)^2$. Determina direzione intensità e verso della quantità di moto $\vec{Q}$ del corpo all'istante $t = 2$. $\left[Q = \frac{165}{4}\right]$

8 **ESERCIZIO GUIDATO**

Un punto P si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di centro O e raggio r con velocità angolare ω; esso è inoltre vincolato ad un'asta AB che ruota attorno ad un punto A che dista $3r$ da O. Sapendo che all'istante $t = 0$ il punto P si trova su OA, determina la legge oraria del moto di P sull'asta AB. Calcola poi le funzioni $v(t)$ e $a(t)$ che danno rispettivamente la velocità e l'accelerazione di P.



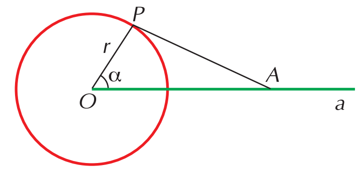
Osserva innanzi tutto che, essendo ω la velocità angolare di P nel suo moto lungo la circonferenza, si ha che $\alpha = \omega t$.
Assumendo A come origine del sistema di riferimento sull'asta AB, indica con x la posizione di P rispetto ad A, sia cioè $\overline{PA} = x$. Applicando il teorema di Carnot al triangolo OAP trovi che:

$\overline{PA} =$ .... e ponendo $\alpha = \omega t$ ottieni....................

La legge oraria di movimento è dunque $x(t) =$ ....

Derivando rispetto a x trovi poi $v(t)$ e $a(t)$. $\left[x(t) = r\sqrt{10 - 6\cos\omega t}\right]$

9 Un punto P di una ruota di raggio r è collegato ad una biella PA di lunghezza $2r$ il cui estremo A scorre lungo una semiretta a di origine O. Determina la legge oraria di A nel caso in cui P ruoti con velocità angolare ω costante supponendo che, all'istante $t = 0$, P si trovi sulla semiretta a. Stabilisci inoltre in quale posizione si trova P quando la velocità di A è nulla. $[OA = r \ \vee \ OA = 3r]$



(Suggerimento: fissato O come origine, devi trovare OA in funzione di t; tieni presente che $\alpha = \omega t$)

10 La quantità di carica Q che attraversa la sezione di un conduttore è data dall'equazione $Q(t) = 3\ln^2\left(t + \frac{3}{2}\right) - 2\ln\left[\ln\left(t + \frac{3}{2}\right)\right]$. Determina l'intensità i della corrente elettrica che attraversa il filo all'istante $t = 1$. $\left[i = \frac{12}{5}\ln\frac{5}{2} - \frac{4}{5\ln\frac{5}{2}}\right]$

11 La posizione di una particella che si muove lungo una retta dipende dal tempo secondo la relazione $x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$ dove v_0 e k sono costanti. Dimostra che la velocità della particella è $v = v_0\, e^{-kt}$ e che l'accelerazione è $a = -kv$. Stabilisci poi quando la velocità tende a diventare nulla.

12 Un corpo viene lanciato verso l'alto a partire dal suolo con una velocità di 15m/sec. Determina le espressioni della velocità e dell'accelerazione del corpo; stabilisci poi l'altezza massima raggiunta prima di ricadere a terra. $[\approx 11{,}48\text{m}]$

13 Due veicoli si muovono su due traiettorie rettilinee secondo le leggi $s_1(t) = t^2 - 3$ e $s_2(t) = 8t - t^2$. Calcola la posizione di ciascun veicolo nell'istante in cui raggiungono la stessa velocità. $[s_1 = 1;\ s_2 = 12]$

14 Un pendolo oscilla con periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ dove g è l'accelerazione di gravità e ℓ è lunghezza del pendolo. Determina come varia il periodo al variare di ℓ. $\left[\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right]$

15 Un aereo in volo lascia cadere un proiettile da una quota di 3062,5m. Calcola la velocità con cui il proiettile tocca il suolo. $[v = 245\text{m/sec}]$

16 Un punto P si muove su un piano percorrendo una traiettoria individuata dall'equazione $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 5x + 1}$. Determina la direzione della velocità di P nel punto di ascissa 2.

$\left[\alpha = \text{arctan}\left(-\dfrac{3}{25}\right) \approx -6{,}8°\right]$

17 L'accelerazione di un moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla è $a = 14\text{m/s}^2$. Determina lo spazio s percorso fra gli istanti $t_1 = 6\text{s}$ e $t_2 = 6{,}5\text{s}$. Quale errore assoluto si commette se per calcolare s si usa il differenziale? $[ds = 42\text{m};\ 1{,}75\text{m}]$

18 L'energia cinetica di una particella di massa m che si muove di moto rettilineo con velocità v è $T = \dfrac{1}{2}mv^2$. Calcola la variazione di energia quando la velocità varia da v_0 a $v_0 + h$. $[mv_0h]$