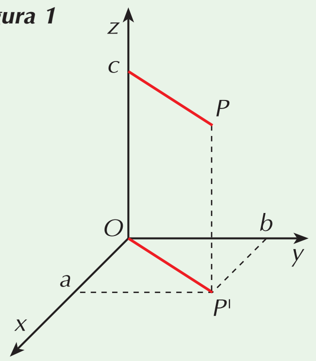
I vettori nello spazio

I vettori con cui abbiamo lavorato finora erano tutti vettori complanari, ma a volte si presenta il problema di dover operare con vettori non appartenenti allo stesso piano; in questo caso la rappresentazione non può essere fatta nel piano cartesiano, ma si deve lavorare nello spazio.

Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio può essere fissato considerando una terna di assi mutuamente perpendicolari che si incontrano in uno stesso punto O, l'origine del sistema di riferimento, e che indichiamo con x, y e z; in genere l'orientamento di tali assi è quello indicato in ***figura 1*** in cui l'asse x, per sovrapporsi all'asse y, deve compiere una rotazione antioraria (sistema *destrorso*).

Fissata un'unità di misura su ciascun asse (se l'unità è la stessa sui tre assi il sistema si dice *monometrico*), ad ogni terna ordinata di numeri (a, b, c) corrisponde un solo punto P dello spazio che si costruisce in questo modo (segui ancora la stessa figura):

Figura 1



- si trova dapprima il punto P' di coordinate (a, b) appartenente al piano individuato dagli assi x e y
- da P' si traccia una retta parallela all'asse z e su di essa si prende il punto P corrispondente al valore c.

Viceversa, ad ogni punto P dello spazio, con una costruzione inversa rispetto alla precedente, si può associare una sola terna di numeri (a, b, c).

Esiste quindi corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e le terne ordinate di numeri reali; se $P(a, b, c)$:

- a è l'**ascissa** di P
- b è l'**ordinata** di P
- c è la **quota** di P

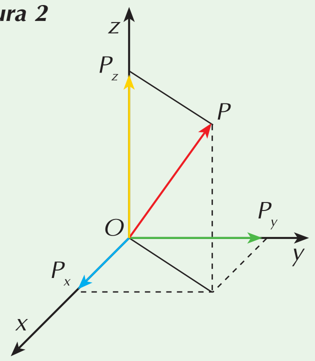
In modo del tutto analogo a quanto visto nel piano, un vettore $\overrightarrow{OP}$ dello spazio avente origine in O si può vedere come somma di tre vettori $\overrightarrow{OP}_x$, $\overrightarrow{OP}_y$, $\overrightarrow{OP}_z$, che sono le sue componenti lungo gli assi cartesiani e i cui moduli sono le coordinate cartesiane spaziali del punto P (***figura 2***):

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_x + \overrightarrow{OP}_y + \overrightarrow{OP}_z$$

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli $OP'P_x$ prima e OPP' poi otteniamo il modulo del vettore $\overrightarrow{OP}$:

$$OP = \sqrt{OP_x^2 + OP_y^2 + OP_z^2}$$

Figura 2



Con una notazione analoga a quella usata nel piano, la scrittura $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ sta poi ad indicare che v_x, v_y e v_z sono i moduli delle componenti cartesiane del vettore $\vec{v}$.

Per esempio, il vettore $\vec{v}(3, 2, -1)$ ha modulo $v = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$.

ESERCIZI

1 Dati i vettori $\vec{a}(1,\ -1,\ -3)$ e $\vec{b}\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 2\right)$, calcola:

a. $\vec{v} = -3\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ $\left[\vec{v}\left(-\frac{10}{3},\ \frac{19}{6},\ \frac{29}{3}\right)\right]$

b. $\vec{w} = \frac{1}{5}\vec{a} - \vec{b}$ $\left[\vec{w}\left(\frac{6}{5},\ -\frac{7}{10},\ -\frac{13}{5}\right)\right]$

2 Dati i vettori $\vec{r}\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right)$ e $\vec{s}\left(1,\ -\frac{1}{3},\ 4\right)$, calcola:

a. $\vec{r} + \vec{s}$ $\left[\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 3\right)\right]$

b. $\vec{r} - \vec{s}$ $\left[\left(-\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ -5\right)\right]$

c. $2\vec{r} + 3\vec{s}$ $[(2,\ 1,\ 10)]$

3 Dati i vettori $\vec{r}(2,\ -1,\ 4)$, $\vec{s}(-5,\ 3,\ -1)$ e $\vec{u}(-1,\ 1,\ 0)$, calcola:

a. $\vec{r} + \vec{s} + \vec{u}$ $[(-4,\ 3,\ 3)]$

b. $\vec{r} + \vec{s} - \vec{u}$ $[(-2,\ 1,\ 3)]$

c. $-2\vec{r} + 3\vec{s} + 5\vec{u}$ $[(-24,\ 16,\ -11)]$

4 Dati i vettori $\vec{v}\left(\sqrt{2},\ -3,\ \frac{3}{4}\right)$, $\vec{w}(3,\ 1,\ 0)$, e $\vec{r}(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$, calcola:

a. $\vec{a} = \vec{v} - 2\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{r}$

b. $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{v} + 2\vec{w} - \frac{3}{4}\vec{r}$

c. $\vec{c} = 2\vec{v} + \vec{w} - \vec{r}$

Calcola infine il vettore $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. $\left[\vec{s}\left(-3,\ -\frac{25}{2},\ \frac{27}{8}\right)\right]$

Determina le componenti dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di cui, di seguito, sono date la somma $\vec{s}$ e la differenza $\vec{d}$.

5 $\vec{s}\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ $\vec{d}\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ $\left[\vec{a}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right);\ \vec{b}(-2,\ 0,\ 1)\right]$

6 $\vec{s}\left(\frac{14}{5},\ -\frac{1}{2},\ -2\right)$ $\vec{d}\left(-\frac{6}{5},\ \frac{3}{2},\ -2\right)$ $\left[\vec{a}\left(\frac{4}{5},\ \frac{1}{2},\ -2\right);\ \vec{b}(2,\ -1,\ 0)\right]$