Matrici e sistemi lineari

Obiettivi

- operare con le matrici
- calcolare il determinante di una matrice quadrata
- trovare l'inversa di una matrice quadrata
- determinare il rango di una matrice
- risolvere sistemi lineari

1. Le matrici

Una **matrice** è un insieme di numeri reali organizzati in righe e colonne. Se n è il numero delle righe e m è il numero delle colonne si dice che la matrice è *di tipo* $n \times m$; i numeri che la costituiscono sono gli *elementi* della matrice e si rappresentano in forma generale mediante una lettera minuscola (di solito corrispondente al nome della matrice) munita di un indice costituito da due numeri interi che rappresentano rispettivamente il numero di riga e di colonna dell'elemento:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

In modo breve si scrive anche:

$$A = [a_{ik}] \qquad \text{con} \quad i = 1, 2, ..., n \quad \text{e} \quad k = 1, 2, ..., m$$

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} & -1 & 2 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

è una matrice di 3 righe e 4 colonne quindi è di tipo 3×4 e si ha per esempio che:

$a_{11} = 5 \qquad a_{23} = -1 \qquad a_{32} = 0$

Se tutti gli elementi di una matrice sono uguali a zero, la matrice si dice **nulla**.

Una matrice può anche avere una sola riga e più colonne oppure una sola colonna e più righe come le seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matrici di questo tipo si chiamano rispettivamente **matrice riga** e **matrice colonna**; per riferirsi ad esse si usa spesso anche il termine **vettore riga** o **vettore colonna**.

Quando il numero di righe è uguale a quello delle colonne, la matrice si dice **quadrata** ed il numero n delle righe si dice **ordine** della matrice. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$ è una matrice quadrata di ordine 3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$ è una matrice quadrata di ordine 2

Figura 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

In una matrice quadrata gli elementi in cui l'indice della riga è uguale a quello della colonna costituiscono la **diagonale principale** della matrice: essi sono gli elementi a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... (in rosso nella ***figura 1***); gli elementi che si trovano sull'altra diagonale costituiscono la **diagonale secondaria** della matrice (in blu nella stessa figura).

Se si scambiano le righe di una matrice con le sue colonne si ottiene un'altra matrice che si dice **trasposta** della prima. La trasposta di una matrice A si indica con il simbolo A^T. È evidente che se A è di tipo $n \times m$, allora A^T è di tipo $m \times n$.

Per esempio:

se $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ allora $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Una matrice quadrata che ha tutti gli elementi nulli tranne quelli che si trovano sulla diagonale principale, si dice **matrice diagonale**; se invece sono nulli tutti gli elementi che si trovano al di sopra oppure al di sotto della diagonale principale, la matrice si dice **matrice triangolare**. Per esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ è una matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$ sono matrici triangolari

2. LE OPERAZIONI CON LE MATRICI

2.1 Addizione e sottrazione

Due matrici $A = [a_{ik}]$ e $B = [b_{ik}]$ si possono sommare solo se sono dello stesso tipo; in questo caso:

> la **matrice somma** $C = A + B$ è la matrice dello stesso tipo che si ottiene sommando gli elementi corrispondenti delle due matrici:
> $$C = [a_{ik} + b_{ik}]$$

Per esempio, le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

sono entrambe di tipo 2×3, si ha che:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+1 & 1+4 & -2-3 \\ -5+7 & 4-2 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

LE PROPRIETÀ DELL'ADDIZIONE

L'addizione tra matrici dello stesso tipo gode delle seguenti proprietà:

- è commutativa, cioè $A + B = B + A$
- è associativa, cioè $(A + B) + C = A + (B + C)$
- ha come elemento neutro la matrice nulla, cioè $A + 0 = A$, dove con il simbolo 0 abbiamo indicato la matrice dello stesso tipo di A i cui elementi sono tutti nulli.

Chiamiamo poi **opposta** di una matrice M la matrice M' i cui elementi sono gli opposti di quelli di M:

se $M = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ la matrice opposta è $M' = \begin{bmatrix} -2 & 9 & -5 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

Aver definito la matrice opposta ci permette di costruire la matrice differenza di due matrici A e B:

> la **matrice differenza** $D = A - B$ è la matrice che si ottiene sommando A con l'opposta di B.

In pratica, per calcolare la matrice differenza si sottraggono gli elementi corrispondenti delle due matrici: $D = [a_{ik} - b_{ik}]$

Riprendendo le due matrici A e B precedenti:

$$A - B = \begin{bmatrix} 3-1 & 1-4 & -2+3 \\ -5-7 & 4+2 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -12 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

2.2 Prodotto di una matrice per un numero reale

> Si definisce prodotto di una matrice $A = [a_{ik}]$ per un numero reale h la matrice che ha per elementi quelli di A, ciascuno moltiplicato per h.

Ad esempio, assegnati $h = 5$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, calcoliamo il loro prodotto in base alla definizione data. Si ha che

$$h \cdot A = A \cdot h = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot (-2) & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 15 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Viceversa, se tutti gli elementi di una matrice hanno un fattore comune, questo può essere messo in evidenza; per esempio:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO

Considerate due matrici dello stesso tipo A e B e due numeri reali h e r, il prodotto così definito gode delle seguenti proprietà, che sono di semplice dimostrazione, ma che ci limitiamo ad enunciare:

- $r(hA) = (rh)A$ proprietà associativa
- $r(A + B) = rA + rB$ proprietà distributiva rispetto alla somma di matrici
- $(r + h)A = rA + hA$ proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Indica in quali dei seguenti casi è possibile eseguire la somma e la differenza delle due matrici.
a. A di tipo 3×2, B di tipo 2×3
b. A di tipo 2×4, B di tipo 2×4
c. A quadrata di ordine 2, B quadrata di ordine 3
d. A e B entrambe quadrate di ordine 4.

2. Indica quale tra le seguenti è la trasposta della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

3. Se $k = -\dfrac{1}{2}$ e $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, la matrice $B = k \cdot A$ è quella che ha come elementi quelli di A:
a. divisi per 2 **b.** moltiplicati per 2
c. divisi per 2 e cambiati di segno **d.** moltiplicati per 2 e cambiati di segno.

2.3 Il prodotto tra matrici

Un'azienda vende tre dei suoi prodotti, che indichiamo con A, B, C, in due confezioni diverse che hanno due prezzi distinti $P1$ e $P2$; questi dati possono essere rappresentati in una tabella come la seguente dalla quale si ricava la matrice A a lato:

	A	*B*	*C*
*P*1	100	90	150
*P*2	104	92	155

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 90 & 150 \\ 104 & 92 & 155 \end{bmatrix}$$

All'azienda arrivano delle richieste di preventivo per le due tipologie di confezioni da parte di due clienti, che indichiamo con $C1$ e $C2$; i dati dell'ordine si possono rappresentare anch'essi in una tabella dalla quale si ottiene la matrice B :

	*C*1	*C*2
A	35	12
B	28	24
C	72	32

$$B = \begin{bmatrix} 35 & 12 \\ 28 & 24 \\ 72 & 32 \end{bmatrix}$$

Per calcolare l'importo del preventivo per ciascun cliente a seconda della confezione dobbiamo eseguire questi calcoli:

Figura 2

$$A = [100 \quad 90 \quad 150] \qquad B = \begin{bmatrix} 35 \\ 28 \\ 72 \end{bmatrix}$$

- prezzo $P1$ per il cliente $C1$ $\quad\rightarrow\quad$ prima riga della matrice A e prima colonna della matrice B:

$$[100 \quad 90 \quad 150] \times \begin{bmatrix} 35 \\ 28 \\ 72 \end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad 100 \cdot 35 + 90 \cdot 28 + 150 \cdot 72 = 16\,820$$

- prezzo $P1$ per il cliente $C2$ $\quad\rightarrow\quad$ prima riga della matrice A e seconda colonna della matrice B:

$$[100 \quad 90 \quad 150] \times \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 32 \end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad 100 \cdot 12 + 90 \cdot 24 + 150 \cdot 32 = 8160$$

- prezzo $P2$ per il cliente $C1$ $\quad\rightarrow\quad$ seconda riga della matrice A e prima colonna della matrice B:

$$[104 \quad 92 \quad 155] \times \begin{bmatrix} 35 \\ 28 \\ 72 \end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad 104 \cdot 35 + 92 \cdot 28 + 155 \cdot 72 = 17\,376$$

- prezzo $P2$ per il cliente $C2$ $\quad\rightarrow\quad$ seconda riga della matrice A e seconda colonna della matrice B:

$$[104 \quad 92 \quad 155] \times \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 32 \end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad 104 \cdot 12 + 92 \cdot 24 + 155 \cdot 32 = 8416$$

I risultati ottenuti possono essere rappresentati in una terza tabella alla quale è associata la matrice C a lato:

	C1	C2
P1	16820	8160
P2	17376	8416

$$C = \begin{bmatrix} 16820 & 8160 \\ 17376 & 8416 \end{bmatrix}$$

Quella che abbiamo eseguito in questo esempio è la moltiplicazione della matrice A per la matrice B; la matrice C che abbiamo ottenuto è il prodotto righe per colonne di A e B.

Affinché il prodotto tra due matrici A e B possa essere eseguito occorre che il numero di colonne della matrice A (il primo fattore del prodotto) sia uguale al numero di righe della matrice B (il secondo fattore del prodotto); si dice in questo caso che le due matrici sono **conformabili**.
In generale:

$A \cdot B = C$
$(3,5) \quad (5,2) \quad (3,2)$
sono uguali
↓
è possibile eseguire il prodotto

$C \cdot D$
$(3,2) \quad (5,3)$
non sono uguali
↓
non è possibile eseguire il prodotto

LA REGOLA

il prodotto di due matrici conformabili A e C, la prima di tipo $n \times p$, la seconda di tipo $p \times m$, è una matrice C di tipo $n \times m$ nella quale l'elemento c_{ik} si ottiene in questo modo:
- si moltiplicano i termini corrispondenti della riga i-sima e della colonna k-esima
- si sommano i prodotti ottenuti.

ESEMPI

1. Moltiplichiamo le seguenti matrici quadrate

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Le colonne di A sono 2 come le righe di B, quindi, essendo le due matrici conformabili, possiamo determinare la matrice prodotto C. In pratica due matrici quadrate dello stesso ordine sono sempre conformabili.
L'elemento c_{11} si ottiene moltiplicando ciascun termine della prima riga di A per il corrispondente della prima colonna di B e sommando i risultati ottenuti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad c_{11} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

Per determinare l'elemento c_{12} si devono moltiplicare ancora i termini della prima riga di A per i corrispondenti della seconda colonna di B e sommare i risultati ottenuti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad c_{12} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 11$$

Per determinare l'elemento c_{21}, dobbiamo considerare i prodotti fra i termini della seconda riga di A e i termini corrispondenti della prima colonna di B, e sommare i risultati ottenuti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad c_{21} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$$

Infine, per scrivere l'ultimo termine, cioé l'elemento c_{22}, dobbiamo considerare i prodotti fra i termini della seconda riga di A e quelli corrispondenti della seconda colonna di B, quindi sommare i risultati ottenuti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad c_{22} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = -6$$

Otteniamo così la matrice prodotto $C = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

2. Calcoliamo il prodotto delle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

La matrice A è di tipo (3,3), la matrice B è di tipo (3,2); le due matrici sono conformabili ed il loro prodotto è una matrice C di tipo (3,2). Calcoliamo gli elementi della matrice C:

$$c_{11} = \text{prima riga} \cdot \text{prima colonna} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -3$$

$$c_{12} = \text{prima riga} \cdot \text{seconda colonna} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + (-1)(-3) + 0 \cdot 5 = 6 + 3 = 9$$

$$c_{21} = \text{seconda riga} \cdot \text{prima colonna} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = -2$$

$$c_{22} = \text{seconda riga} \cdot \text{seconda colonna} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 = 4 - 3 - 5 = -4$$

$$c_{31} = \text{terza riga} \cdot \text{prima colonna} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$c_{32} = \text{terza riga} \cdot \text{seconda colonna} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 = -16$$

Allora $C = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & -4 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}$

3. Calcoliamo il prodotto di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice A è di tipo (2,3), la matrice B è di tipo (3,2); le due matrici sono conformabili ed il loro prodotto è una matrice C di tipo (2,2).

Seguendo la definizione, calcoliamo ciascun elemento della matrice prodotto:

$c_{11} = 1(-1) + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 11$

$c_{12} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4(-2) = -8$

$c_{21} = 2(-1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 0$

$c_{22} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0(-2) = 1$

Si ha così che $C = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

In questo particolare caso, è possibile eseguire anche il prodotto $B \cdot A$, infatti il numero di colonne di B è uguale al numero di righe di A. Eseguendo il prodotto troviamo la matrice

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

che è una matrice diversa da C. Deduciamo allora che **il prodotto fra matrici non è commutativo**.

4. Moltiplichiamo le matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

Otteniamo che $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Il risultato del prodotto è la matrice nulla, anche se né A né B sono nulle. Questo significa che, nell'insieme delle matrici conformabili, **non vale la legge di annullamento del prodotto**.

LA MATRICE IDENTICA

Consideriamo una qualsiasi matrice quadrata, per esempio la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e moltiplichiamola, a destra e a sinistra, per la matrice $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $A \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 & 2 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
- $I \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot (-5) + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

In entrambi i casi abbiamo ottenuto di nuovo la matrice A.
Una matrice come la I funziona quindi da elemento neutro per la moltiplicazione.

Si dice **matrice identica** una matrice quadrata di ordine n che ha tutti gli elementi uguali a zero tranne quelli che appartengono alla diagonale principale che sono uguali a 1.
La matrice identica rappresenta l'elemento neutro della moltiplicazione tra matrici, cioè:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Si dimostra che la moltiplicazione tra matrici gode delle seguenti proprietà:

Le proprietà della moltiplicazione

- è associativa, cioè $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- è distributiva a destra rispetto all'addizione, cioè $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- è distributiva a sinistra rispetto all'addizione, cioè $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

Ricordiamo che invece:

- non vale la proprietà commutativa: $A \cdot B$ non è uguale a $B \cdot A$ (rivedi l'esempio 3 precedente)
- non vale la legge di annullamento del prodotto: il prodotto di due matrici può essere la matrice nulla anche se nessuna delle due è nulla (rivedi l'esempio 4 precedente).

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Due matrici sono conformabili se:
a. sono dello stesso tipo
b. hanno lo stesso numero di righe
c. la prima ha tante colonne quante sono le righe della seconda
d. la prima ha tante righe quante sono le colonne della seconda

2. Una matrice A è di tipo 4×3; una matrice B è di tipo 3×1. la matrice $A \cdot B$:
a. è di tipo 4×1 **b.** è di tipo 3×3 **c.** è di tipo 4×3 **d.** non si può calcolare

3. Il determinante di una matrice quadrata

3.1 Il calcolo di un determinante

Ad ogni matrice quadrata A di ordine n è possibile associare un numero reale che si chiama **determinante di *A*** e che si indica con il simbolo

$$\det A \qquad \text{oppure} \qquad |A|$$

Attenzione all'uso dei simboli: $[a_{ik}]$ indica la matrice, quindi la tabella di numeri, $|a_{ik}|$ indica il determinante della matrice che è un solo numero reale.

Vedremo nel corso di questo paragrafo che il calcolo del determinante di una matrice di ordine n si può sempre ricondurre al calcolo del determinante di una matrice di ordine $n-1$; iniziamo quindi a stabilire come calcolare il determinante di una matrice di ordine 1 e di ordine 2.

Matrici di ordine 1

Il determinante di una matrice di ordine 1 è il numero stesso:

se $\quad A = [a_{11}] \quad$ allora $\quad \det A = a_{11}$

Per esempio: se $A = [3]$ allora $\det A = 3$

Matrici di ordine 2

Il determinante di una matrice di ordine 2 è la differenza fra il prodotto degli elementi che appartengono alla diagonale principale ed il prodotto degli elementi che appartengono alla diagonale secondaria:

se $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad$ allora $\quad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Per esempio:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\det A = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 14$
- $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\det B = 0 \cdot (-1) - 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

MATRICI DI ORDINE MAGGIORE DI 2

Per calcolare il determinante di una matrice di ordine maggiore di 2 si segue un algoritmo che riconduce al calcolo di più determinanti di ordine 2. Vediamo dapprima un esempio.

Consideriamo la matrice di ordine 3 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Preso un elemento qualsiasi della matrice, ad esempio l'elemento a_{23}, se sopprimiamo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento, cioè la seconda riga e la terza colonna, otteniamo ancora una matrice quadrata di ordine inferiore di una unità rispetto alla matrice data

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{diventa} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Al determinante della matrice così ottenuta si dà il nome di **minore complementare** dell'elemento a_{23}.
L'algoritmo che descriveremo ora per calcolare il determinante della matrice A si basa sul calcolo dei minori complementari di una matrice. Segui con attenzione i passi indicati.

- Consideriamo una qualunque riga (o colonna) della matrice, ad esempio la prima riga, e fissiamo la nostra attenzione sul primo numero, l'elemento $a_{11} = 2$.

- Costruiamo il minore complementare di tale elemento

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ diventa } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ il determinante vale } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

- Moltiplichiamo il minore complementare così ottenuto per il termine di posto a_{11} : $\quad 2 \cdot 7 = 14$

- Fissiamo ora la nostra attenzione sul secondo numero della riga scelta, l'elemento $a_{12} = 1$

- Costruiamo il minore complementare di tale elemento

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ diventa } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ il determinante vale } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

- Moltiplichiamo il minore complementare così ottenuto per il termine di posto a_{12} : $\quad 1 \cdot 1 = 1$

- Ripetiamo lo stesso algoritmo considerando il terzo ed ultimo numero della riga scelta, l'elemento $a_{13} = 3$

- Costruiamo il minore complementare di tale elemento

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ diventa } \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ il determinante vale } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

- Moltiplichiamo il minore complementare così ottenuto per il termine di posto a_{13} : $\quad 3 \cdot 2 = 6$

- Sommiamo adesso i valori ottenuti, e che abbiamo evidenziato in colore, prendendoli con il proprio segno se l'elemento a_{ik} relativo ha la somma degli indici che è pari, con il segno opposto se la somma degli indici è dispari. In questo modo il primo valore, che si riferisce all'elemento a_{11} ($1 + 1$ è pari), deve essere considerato con il proprio segno; il secondo valore, che si riferisce all'elemento a_{12} ($1 + 2$ è dispari) deve essere considerato con segno opposto; il terzo valore, che si riferisce all'elemento a_{13} ($1 + 3$ è pari) deve essere considerato con il proprio segno.
  Si ottiene così

$$\underset{\substack{\downarrow \\ a_{11}}}{(+14)} + \underset{\substack{\downarrow \\ a_{12}}}{(-1)} + \underset{\substack{\downarrow \\ a_{13}}}{(+6)} = 19$$

- Diciamo allora che $\det A = 19$.

Questo algoritmo può essere esteso al calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine n qualsiasi, anche se, nei nostri esempi, ci limiteremo a matrici di ordine 3 o 4.
Diamo quindi alcune definizioni che precisano il significato dei termini usati (osserva contemporaneamente l'esempio a lato).

- Si chiama **minore complementare** dell'elemento a_{ik} il determinante della matrice che si ottiene da quella considerata sopprimendo la riga i-esima e la colonna k-esima.
- L'elemento a_{ik} si dice di **classe pari** se $i + k$ è un numero pari, si dice di **classe dispari** se $i + k$ è un numero dispari.
- Si chiama **complemento algebrico** dell'elemento a_{ik}, e si indica di solito con il simbolo A_{ik}, il minore complementare di a_{ik} se questo è di classe pari, il suo opposto se a_{ik} è di classe dispari.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- minore complementare di a_{23}:
  $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$
- complemento algebrico di a_{23}:
  $A_{23} = -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$

Valgono poi i seguenti teoremi che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema. La somma dei prodotti dei termini di una riga o di una colonna di una matrice per i relativi complementi algebrici ha un valore che non dipende dalla riga o dalla colonna considerate.

Questo significa che la scelta della riga o della colonna per l'applicazione dell'algoritmo è arbitraria: qualunque sia la scelta, il risultato non cambia. L'algoritmo che abbiamo applicato è poi giustificato dal seguente teorema:

Teorema (di Laplace). Il determinante di una matrice quadrata di ordine n è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.

LA REGOLA

Vediamo qualche altro esempio.

ESEMPI

Calcoliamo i determinanti delle matrici assegnate.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Visto che la scelta della riga o della colonna non cambia il risultato finale, scegliamo come linea la terza riga che ha un elemento nullo; seguendo la definizione, dobbiamo moltiplicare ciascuno dei suoi elementi per il relativo complemento algebrico e quindi sommare i prodotti ottenuti.

- $a_{31} = 0$; qualunque sia il complemento algebrico di questo elemento, il suo prodotto con a_{31}, è nullo; non eseguiremo quindi questo calcolo
- $a_{32} = 1$, è di classe dispari, ed è $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1$
- $a_{33} = 2$, è di classe pari, ed è $A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8$

Abbiamo quindi che: $\det A = a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 = 17$

Proviamo adesso a calcolare lo stesso determinante scegliendo come linea la prima colonna (l'ultimo elemento è zero, non calcoleremo quindi il corrispondente minore complementare). Scriviamo sinteticamente:

$$\det A = \underbrace{1}_{\substack{a_{11} \text{ è di} \\ \text{classe pari}}} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \underbrace{- 3}_{\substack{a_{21} \text{ è di} \\ \text{classe dispari}}} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 3 \cdot (-3) = 8 + 9 = 17$$

Come previsto dai teoremi enunciati, il calcolo del determinante di una matrice non dipende dalla linea scelta.

2. $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

In questo caso conviene fissare la terza colonna perché ben due dei suoi termini sono nulli. Allora il valore del determinante è dato da

$\det B = 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-4 - 3) = -28$

3. Calcoliamo ora il determinante di una matrice di ordine 4:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Scegliamo la seconda colonna che ha due elementi nulli. Sviluppiamo il determinante

$$\det C = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Dobbiamo adesso sviluppare i determinanti di ordine 3 ottenuti; per evitare scritture troppo lunghe, calcoliamo separatamente i due determinanti: ci serviremo della seconda riga per calcolare il primo, della seconda colonna per calcolare il secondo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -5 \cdot (6-4) + 1 \cdot (-3-24) = -37$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9-48) - 1 \cdot (8-12) = -110$$

Allora $\det C = -1 \cdot (-37) - 2 \cdot (-110) = 257$.

La regola di Sarrus

Per calcolare il **determinante di una matrice del terzo ordine**, e solo in questo caso, esiste una regola pratica che è spesso più rapida di quella che implica la determinazione dei complementi algebrici.
Tale regola si deve al matematico Pierre Frederic Sarrus e consiste in una schematizzazione delle operazioni che si devono compiere per calcolare il valore di un determinante di ordine 3.

Sia dunque data la matrice: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Procedendo nel modo consueto, supponendo di fissare, ad esempio, la prima riga, otteniamo che

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Il calcolo ora scritto prevede di svolgere le seguenti operazioni

$$a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22}) =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{31} \cdot a_{22}$$

cioè, riorganizzando i termini

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Tale sequenza può essere riprodotta facilmente considerando la matrice che si ottiene scrivendo nell'ordine, a destra di quella data, le sue prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

La matrice ottenuta è rettangolare ed in essa possiamo evidenziare tre diagonali principali e tre diagonali secondarie. Se calcoliamo la somma dei prodotti degli elementi che si trovano sulle diagonali principali e la somma dei prodotti degli elementi che si trovano sulle diagonali secondarie e poi calcoliamo la differenza fra i due valori ottenuti, ritroviamo proprio il determinante della matrice A. Per le matrici di ordine 3 è quindi possibile usare questo metodo alternativo.

ESEMPI

Calcoliamo con la regola di Sarrus i determinanti delle seguenti matrici.

1. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Riscriviamo le prime due colonne sulla destra della matrice data: $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

Applicando la regola di Sarrus si ottiene che

$$\det A = \underbrace{[-3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1]}_{\text{somma dei prodotti lungo le diagonali principali}} - \underbrace{[2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 \cdot 0]}_{\text{somma dei prodotti lungo le diagonali secondarie}} = -2 - [-2] = 0$$

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Affianchiamo alla matrice le prime due colonne $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

Si ha dunque

$$\det B = [2 \cdot 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 1] - [3 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \cdot (-1)] = -26$$

3. Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice è di ordine 4, quindi non è possibile usare la regola di Sarrus per calcolare il determinante. Osserviamo però che poiché l'ultima riga ha tre elementi nulli, il calcolo di det A si riduce al calcolo del complemento algebrico dell'unico elemento non nullo di quella riga. Si ha infatti che

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Applicando la regola di Sarrus alla matrice di ordine 3 ottenuta abbiamo $\left[\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{matrix}$

$$\det A = [1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 3] - [(-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0] = -11$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

Calcola il determinante delle seguenti matrici.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (Suggerimento: usa il metodo dei complementi algebrici scegliendo la terza colonna)

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (Suggerimento: applica la regola di Sarrus)

3.2 Le proprietà dei determinanti

Di seguito elenchiamo le principali proprietà dei determinanti.

- Se una matrice A ha nulli tutti gli elementi di una riga oppure di una colonna, allora $\det A = 0$.

La proprietà è evidente se pensiamo al metodo di calcolo di un determinante.

Per esempio, se $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ allora

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

- Una matrice A e la sua trasposta A^T hanno lo stesso determinante.

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \det A = 25 \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \det\ A^T = 25$$

■ Scambiando tra loro due righe o due colonne di una matrice A, si ottiene una matrice il cui determinante è l'opposto di quello di A.

Riprendiamo per esempio la stessa matrice A precedente il cui determinante è uguale a 25:

- scambiando le prime due righe otteniamo

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{ed è} \qquad \det A' = -25$$

- scambiando la prima e la terza colonna otteniamo:

$$A'' \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ed è} \qquad \det A' = -25$$

E' poi evidente che se si esegue un numero pari di scambi il determinante, cambiando segno un numero pari di volte, rimane invariato; eseguendo invece un numero dispari di scambi, esso cambia segno.

■ Se una matrice ha due righe, oppure due colonne, che sono proporzionali, il suo determinante è nullo.

Per esempio, la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ ha la seconda colonna che si ottiene moltiplicando per -2 gli elementi della prima e si ha che $\det A = 0$.

■ Se si moltiplicano o si dividono gli elementi di una riga, oppure di una colonna, di una matrice A per uno stesso numero k non nullo, anche il determinante viene moltiplicato o diviso per k.

Per esempio, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e moltiplichiamo per 2 gli elementi della prima riga otteniamo la matrice $A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e si ha che:

$\det A = -12 \qquad K = 2 \qquad \det A' = -24$

Conseguenza immediata di questa proprietà è che, se A è una matrice di ordine n:

$$\boxed{\det(kA) = k^n \det A}$$

■ Il determinante di una matrice A non cambia se ad una riga, oppure ad una colonna, si sostituisce la somma della riga stessa con un'altra moltiplicata per un fattore k.

Per esempio, se A è la matrice precedente e alla prima riga aggiungiamo la seconda moltiplicata per 2 troviamo la matrice:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{ed è} \qquad \det A' = -12$$

LA COMBINAZIONE LINEARE

Per enunciare la prossima proprietà dobbiamo premettere una definizione. Data una matrice $A = [a_{ik}]$, consideriamo una riga i qualsiasi e moltiplichiamo i suoi elementi per un numero p, una riga j qualsiasi e moltiplichiamo i suoi elementi per un numero q, sommiamo poi le due righe ottenute; degli elementi che si ottengono in questo modo si dice che costituiscono una **combinazione lineare** delle due righe e si scrive:

$$p \cdot [a_{ik}] + q \cdot [a_{jk}]$$

La stessa procedura può essere applicata anche a due colonne.

Per esempio, data la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, costruiamo la seguente combinazione lineare tra le prime due righe assumendo $p = 2$ e $q = -3$:

$$2 \cdot [5 \quad 2 \quad -7] - 3 \cdot [0 \quad 3 \quad -1] = [10 \quad 4 \quad -14] + [0 \quad -9 \quad 3] = [10 \quad -5 \quad -11]$$

Vale la seguente proprietà:

- Se in una matrice quadrata A una riga (oppure una colonna) è combinazione lineare di altre righe (o colonne), allora $\det A = 0$.

Per esempio, nella matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ la terza riga è la somma della prima con il doppio della seconda:

$$[2 \quad -1 \quad 5] + 2 \cdot [-1 \quad 2 \quad -4] = [0 \quad 3 \quad -3]$$

ed è $\det A = 0$.

- Il determinante di una matrice diagonale o di una matrice triangolare è uguale al prodotto dei termini che appartengono alla diagonale principale.

Per esempio, sviluppando i seguenti determinanti con la regola di Laplace otteniamo:

$$\text{se } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2 \cdot 1) = -8$$

$$\text{se } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det B = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2 \cdot 4) = 24$$

■ Se A e B sono due matrici di ordine n e C è la matrice prodotto $C = A \cdot B$, allora $\det C = \det A \cdot \det B$.

Per esempio, consideriamo le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{il cui determinante è} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{il cui determinante è} \quad \det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

Calcoliamo la matrice prodotto ed il relativo determinante

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ed il suo determinante è} \quad \det C = \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -12 & -4 \end{vmatrix} = -80$$

Si ha quindi che $\det A \cdot \det B = \det C$, infatti $16 \cdot (-5) = -80$.

Da ultimo enunciamo il seguente teorema.

■ Se in una matrice quadrata si moltiplicano gli elementi di una riga (o di una colonna) per i complementi algebrici di quelli di una riga (o colonna) parallela, la somma dei prodotti ottenuti è zero.

Per esempio, consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ di ordine 3 e moltiplichiamo gli elementi della seconda riga per i complementi algebrici della terza:

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-6) - 3 \cdot 7 + 5 \cdot 3 = 6 - 21 + 15 = 0$$

Le proprietà che abbiamo visto permettono a volte di calcolare il determinante di una matrice in modo più rapido; osserva gli esempi che seguono.

ESEMPI

1. Calcoliamo $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

Osservando con attenzione, notiamo che la terza riga è il doppio della prima, allora le due righe sono proporzionali e possiamo concludere immediatamente, senza eseguire ulteriori calcoli, che $\det A = 0$.

2. Calcoliamo $\det B = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -3 \\ 48 & 0 & -3 \\ 36 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

Tutti gli elementi della prima colonna sono multipli di 12, quindi possiamo scrivere il determinante nella forma:

$$\det B = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Sostituiamo ora alla prima riga quella che si ottiene sommando la prima con la terza riga

$$\det B = 12 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

otteniamo così che due termini della seconda colonna sono nulli.
Possiamo quindi calcolare il valore del determinante in modo semplice, valutando i complementi algebrici degli elementi della seconda colonna, quindi del solo termine a_{32} che è di posto dispari:

$$\det B = 12 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 12(-12+16) = 48$$

3. Calcoliamo $\det A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ \frac{1}{3} & -2 & 4 \end{vmatrix}$

La prima colonna contiene delle frazioni che non facilitano sicuramente il calcolo; possiamo però riscrivere il determinante senza frazioni, moltiplicando la prima colonna per il minimo comune multiplo dei denominatori. Per non modificare il valore del determinante, dobbiamo poi dividerlo per quello stesso numero; nel nostro caso $m.c.m.(2,3) = 6$, quindi:

$$\det A = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 12 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Scriviamo poi al posto della prima colonna quella ottenuta come somma della prima con la seconda

$$\det A = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 7 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Possiamo ora calcolare il determinante utilizzando gli elementi della prima colonna che sono tutti nulli eccetto il secondo; si ha quindi (a_{21} è di posto dispari):

$$\det A = \frac{1}{6} \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{7}{6}(12+2) = -\frac{49}{3}$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. In quali dei seguenti modi si può calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$?

a. $-2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

b. $2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

c. $4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

d. $3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

2. La regola di Sarrus per il calcolo del determinante si può applicare:

a. a qualsiasi matrice quadrata
b. solo a una matrice di ordine 3
c. a qualsiasi matrice di ordine $n > 3$
d. a qualsiasi matrice di ordine $n \geq 3$.

3. In quali dei seguenti casi è nullo il determinante di una matrice quadrata A?

a. Se i termini della diagonale principale sono nulli.
b. Se la matrice è diagonale.
c. Se una colonna è combinazione lineare delle altre.
d. Se una riga è doppia di un'altra.

4. La matrice inversa

Data una matrice quadrata A di ordine n, si dice **matrice inversa** di A la matrice A^{-1}, se esiste, tale che il suo prodotto per A sia la matrice identica.
In simboli: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Vogliamo ora stabilire delle condizioni che ci assicurino quando, data una matrice A, esiste la sua inversa; inoltre, una volta che sia stata accertata la sua esistenza, vogliamo trovare un algoritmo per calcolarla.
Cominciamo col dire che chiameremo **singolare** una matrice il cui determinante è nullo; di conseguenza chiameremo **non singolare** una matrice che ha il determinante non nullo. Si dimostra che valgono i seguenti teoremi.

Teorema. Se una matrice A è non singolare, allora esiste sempre ed è unica la sua matrice inversa A^{-1}.

Si dice in questo caso che la matrice A è **invertibile**.

Teorema. Se una matrice è singolare, allora non esiste la sua inversa.

Infatti, se una matrice A avente determinante nullo possedesse l'inversa, si avrebbe che

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{e quindi} \quad \det A \cdot \det A^{-1} = \det I \quad \text{cioè} \quad \det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Ma ciò è impossibile essendo per ipotesi $\det A = 0$; dobbiamo quindi concludere che A non possiede l'inversa.

I due teoremi ora enunciati ci dicono che:

condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata A di ordine n abbia l'inversa è che A sia non singolare.

Verificato quindi che A è una matrice non singolare, per trovare la matrice inversa A^{-1} si devono seguire questi passi:

- calcolare i complementi algebrici A_{ik} degli elementi di A;
- scrivere la matrice A' dei complementi algebrici ottenuti;
- costruire la trasposta A'^T della matrice A';
- dividere ciascun elemento di A'^T per il determinante di A.

Si dimostra poi facilmente che:

- $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Infatti, essendo $A \cdot A^{-1} = I$ si ha che $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I$, cioè, ricordando le proprietà dei determinanti, $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$.

ESEMPI

1. Calcoliamo l'inversa di $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Si ha che $\det A = 15 + 4 = 19$. Poiché la matrice è non singolare, esiste ed è unica la matrice inversa.

- Calcoliamo i complementi algebrici $A_{11} = 5$ $\quad A_{12} = -4$ $\quad A_{21} = 1$ $\quad A_{22} = 3$
- Costruiamo la matrice dei complementi algebrici e quindi la sua trasposta

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A'^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

- Dividendo per il determinante di A si ha infine $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{19} & \dfrac{1}{19} \\ -\dfrac{4}{19} & \dfrac{3}{19} \end{bmatrix}$

2. Determiniamo, se è possibile, la matrice inversa di $B = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$

Calcoliamo il determinante della matrice data: $\det B = \begin{vmatrix} -9 & 3 \\ -15 & 5 \end{vmatrix} = -45 + 45 = 0$

La matrice è singolare, non esiste la sua inversa.

3. Determiniamo, se esiste, l'inversa della matrice quadrata di ordine 3: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice è triangolare e si ha che:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) \cdot 1 = -4$$

Poiché il determinante non è nullo esiste la matrice inversa. Seguiamo ora l'algoritmo.

- Calcoliamo i complementi algebrici degli elementi di A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

- Scriviamo la matrice dei complementi algebrici: $A' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
- Costruiamo A'^T: $A'^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$
- Dividiamo ciascuno dei suoi termini per il determinante di A: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. Calcoliamo l'inversa di una matrice diagonale di ordine 3.

Sia $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ed è $\det A = abc$ con $a, b, c \neq 0$.

La matrice dei complementi algebrici è: $A' = \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}$ e coincide con la sua trasposta.

Dividendo per $\det A$ otteniamo che $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$

L'inversa di una matrice diagonale A è quindi quella che si ottiene da A considerando i reciproci dei suoi elementi non nulli.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Indica quali delle seguenti matrici possiedono l'inversa:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. L'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ è la matrice:

a. $\begin{bmatrix} 36 & -9 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

5. Il rango di una matrice

Consideriamo una qualsiasi matrice di tipo (n,m) e, scelte alcune sue righe ed alcune sue colonne, consideriamo la matrice i cui elementi costituiscono l'intersezione delle linee fissate.

Ad esempio, data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

- se scegliamo la seconda, la terza e la quarta colonna e la prima e la seconda riga

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

  l'intersezione delle linee forma la matrice $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

- se scegliamo la seconda e la quarta colonna e le ultime due righe

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

  l'intersezione forma la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

- se scegliamo la prima e le ultime due colonne e tutte e tre le righe

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

  l'intersezione forma la matrice $D = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -2 & 3 & -5 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

Una matrice così ottenuta si dice che è una sottomatrice della matrice A.

In generale, si dice **sottomatrice** di una matrice A di tipo (n,m), una qualunque matrice i cui elementi si ottengono, nell'ordine in cui si presentano, intersecando k righe e h colonne di A (con $k \leq n \quad \wedge \quad h \leq m$).

Se la sottomatrice considerata è quadrata di ordine p, definiamo **minore di ordine p** della matrice A il determinante della sottomatrice scelta.

Della matrice precedente abbiamo scritto due sottomatrici quadrate, la C di ordine 2, la D di ordine 3; possiamo allora dire che due dei suoi minori sono

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 38 \qquad \det D = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -2 & 3 & -5 \\ 0 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 45 + 48 = 12$$

E' evidente che l'ordine p di un minore di A, se A è di tipo (n,m), è minore o tutt'al più uguale al più piccolo fra n e m. Se, ad esempio, una matrice è di tipo $(5,3)$, potremo costruire minori di ordine 1, 2, 3 e non oltre; se una matrice è di tipo $(4,7)$, potremo costruire minori di ordine 1, 2, 3, 4 e non oltre.

Si chiama **rango** o **caratteristica** di una matrice A, e si indica con il simbolo $r(A)$, il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A.

Dalla definizione data discende immediatamente che:

- una matrice ha rango 0 se e solo se è la matrice nulla;
- se una matrice A è quadrata di ordine n, il suo rango è n se e solo se la matrice è non singolare, cioè se $\det A \neq 0$;
- una matrice ha rango r quando esiste un minore non nullo di ordine r, mentre sono tutti nulli i minori di ordine $r+1$.

Tenendo presenti le osservazioni fatte, determiniamo il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice è di tipo $(4,5)$, quindi il suo rango, che al massimo può essere 4, è proprio 4 se esiste un minore di ordine 4 non nullo, è 3 se esiste un minore di ordine 3 non nullo e quelli di ordine 4 sono tutti nulli e così via. Estraiamo da essa una matrice quadrata di ordine 4. Ad esempio la matrice formata dalle prime tre colonne e dalla quinta:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $\det A' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (21) = -42$

Allora, poiché esiste un minore del quarto ordine che non è nullo, possiamo concludere che $r(A) = 4$.

ESEMPI

Calcoliamo il rango delle seguenti matrici.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

La matrice quadrata più grande che possiamo estrarre da A è di ordine 3; cominciamo quindi a considerare i minori di questo ordine, ad esempio quello associato alla matrice formata dalla prime due e dalla quarta colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 + 21 = 31$$

Poiché abbiamo trovato un minore di ordine 3 che non è nullo, possiamo dire che $r(A) = 3$.

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 24 & -9 & 18 \end{bmatrix}$

Anche in questo caso il rango della matrice è al massimo 3. Tuttavia, osserviamo che la terza riga è il triplo della prima; questo significa che qualunque minore di ordine 3, che deve necessariamente contenere la prima e la terza riga, è nullo.
Dobbiamo perciò concludere che la matrice B ha rango inferiore a 3. Passiamo allora a considerare i minori di ordine 2; scegliamo la sottomatrice formata dalla prime due righe e colonne e calcoliamone il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Avendo trovato un minore di ordine 2 che non è nullo, possiamo concludere che $r(B) = 2$.

Il teorema di Kronecker

La determinazione del rango di una matrice può essere laboriosa nel caso di matrici che hanno un alto numero di righe e colonne. In questi casi ci viene in aiuto un teorema che costituisce un utile e comodo algoritmo di calcolo.
Consideriamo una matrice A di tipo $n \times m$ ed un suo minore C di ordine p con p più piccolo sia di n che di m.
Per esempio, se A è di tipo 5×7, si può considerare un minore di ordine 1, 2, 3 oppure 4 ma non di ordine 5.
Si può ottenere un altro minore di ordine $p+1$ accostando alla matrice C associata a p un'altra riga e un'altra colonna scelte tra quelle che non costituiscono C. Si dice in questo caso che si è **orlato** il minore di ordine p.

Per esempio, data la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 6 \\ -4 & 8 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

e considerato il suo minore di ordine 2 ottenuto prendendo le prime due righe e colonne (evidenziato in blu), un minore di ordine 3 si può ottenere da questo accostando, ad esempio, la quarta colonna e la terza riga (evidenziate in giallo)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Possiamo adesso enunciare il seguente teorema.

Teorema (di Kronecker). Una matrice A è di rango h se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- si può estrarre da essa un minore Ψ non nullo di ordine h
- sono nulli tutti i minori di ordine $h+1$ della matrice A, ottenuti orlando Ψ con una riga e una colonna qualsiasi di A.

Calcoliamo, ad esempio, il rango della matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ usando il teorema enunciato. Poiché non tutti i suoi elementi sono nulli, essa ha sicuramente un minore di ordine $h = 1$ non nullo, ad esempio, se consideriamo l'elemento a_{11}, si ha che

$$\Psi = |-1| = -1 \neq 0$$

Dobbiamo quindi esaminare come sono i minori di ordine $h = 2$ ottenuti orlando Ψ con una riga e una colonna di A. Osserviamo subito che possiamo orlare Ψ in due modi diversi: accostando la seconda riga e la seconda colonna oppure la seconda riga e la terza colonna.
In generale, se la matrice A ha n righe ed m colonne, è possibile orlare un minore di ordine h in $(m-h)(n-h)$ modi diversi.

Nel nostro caso abbiamo due possibilità:

- utilizzando la seconda riga e la seconda colonna $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
- utilizzando la seconda riga e la terza colonna $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

Il primo dei due minori considerati è diverso da zero, quindi è possibile estrarre dalla matrice un minore di ordine 2 non nullo.
Poiché non è possibile costruire minori di ordine 3, dobbiamo concludere che il rango della matrice è 2.

L'ALGORITMO DA APPLICARE

Il teorema di Kronecker ci fornisce quindi un algoritmo per calcolare il rango di una matrice. Data dunque una matrice A di tipo (n,m), si deve

- individuare un minore Ψ_1 non nullo di ordine h (se la matrice non è nulla, esiste almeno un minore non nullo di ordine 1);
- considerare, uno alla volta, i minori Ψ_2 di ordine $h+1$ che si ottengono orlando Ψ_1;
- se sono tutti nulli, allora il rango della matrice è h, altrimenti è almeno $h+1$ e bisogna ripetere il procedimento passando ad esaminare i minori Ψ_3 di ordine $h+2$ che si ottengono orlando Ψ_2 e così via.

ESEMPI

1. Determiniamo il rango della matrice: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Osservandola, si nota subito che è diverso da 0 il minore del secondo ordine ($h = 2$) formato dall'intersezione delle prime due righe con le prime due colonne

$$\Psi_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Il rango della matrice è almeno 2. Calcoliamo adesso i minori di ordine 3 che si ottengono orlando Ψ_1 con una riga e una colonna qualsiasi di A. Essi sono in numero di $(4-2)(5-2) = 6$; tuttavia non è necessario calcolarli tutti possiamo fermarci quando se ne trova uno non nullo. Orliamo Ψ_1 con la terza riga e la terza colonna della matrice:

$$\Psi_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 23$$

La matrice ha almeno rango 3. Calcoliamo tutti i minori di ordine 4 che si ottengono orlando Ψ_2; sono due e si ottengono orlando Ψ_2 con la quarta riga e la quarta colonna oppure con la quarta riga e la quinta colonna di A:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Poiché in entrambi i casi le ultime due righe sono proporzionali, essi sono entrambi nulli. Possiamo quindi concludere che $r(A) = 3$.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Una matrice di ordine 5 ha determinante nullo. Di essa si può dire che:
a. ha rango minore di 5
b. ha rango 4
c. ha rango maggiore di 1
d. tutte le precedenti affermazioni sono false.

2. Il rango della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$:

a. è 1 **b.** è 2 **c.** è 3.

6. I SISTEMI LINEARI: DEFINIZIONI E STRUTTURA

Date n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si dice **lineare** un sistema in cui tutte le equazioni sono di primo grado rispetto ad esse.

Un sistema lineare di m equazioni nelle precedenti n incognite è scritto in **forma normale** se si presenta nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

In tale sistema, il termine a_{ik} sta ad indicare il coefficiente della variabile x_k che appartiene alla i-esima equazione; il termine b_i indica il termine noto appartenente alla medesima equazione. Ad esempio il termine a_{23} è il coefficiente della variabile x_3, che appartiene alla seconda equazione, il cui termine noto è b_2, il termine a_{42} è il coefficiente della variabile x_2, che appartiene alla quarta equazione, il cui termine noto è b_4.
Se, $\forall i$ è $b_i = 0$ cioè se tutti i termini noti sono nulli, il sistema si dice **omogeneo**.
Determinare una soluzione del sistema, significa determinare una ***n*-pla ordinata** (leggi "ennupla") di valori, cioè n numeri $(s_1, s_2, ..., s_n)$, uno per ogni variabile del sistema, che soddisfano tutte le sue equazioni.
Se il sistema ammette almeno una soluzione, si dice che esso è **possibile** e che le sue equazioni sono **compatibili**; se invece il sistema non ammette soluzioni, si dice che esso è **impossibile** e che le sue equazioni sono **incompatibili**.
Inoltre, dato un sistema possibile, diremo che esso è **determinato** se ammette una sola soluzione, **indeterminato** se ne ammette infinite.

Di ogni sistema lineare in forma normale si possono mettere in evidenza i coefficienti a_{ik} organizzandoli in una matrice A di tipo $m \times n$ nella quale nella prima riga si scrivono i coefficienti della prima equazione, nella seconda riga quelli della seconda equazione e così via; tale matrice prende il nome di **matrice dei coefficienti** o anche **matrice incompleta**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Analogamente si possono organizzare i termini noti delle equazioni in una matrice colonna formata da m righe:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

e le incognite in una matrice colonna di n righe:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

In questo modo il sistema precedente può essere scritto in forma matriciale nella forma:

$$A \cdot X = B$$

Per esempio, il sistema $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \\ 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 22 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

può essere scritto in forma matriciale nel seguente modo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice dei coefficienti}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\text{matrice delle incognite}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 22 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\text{matrice dei termini noti}}$$

Questo modo di scrivere un sistema lineare è comodo perché, come vedremo nei prossimi paragrafi, l'analisi delle matrici coinvolte consente sia di stabilire se un sistema è possibile o meno, sia di ricavare la soluzione in modo semplice.

7. La risoluzione nel caso in cui $n = m$

7.1 Il metodo della matrice inversa

Se in un sistema lineare il numero n di equazioni è uguale al numero m delle incognite, la matrice A dei coefficienti è quadrata di ordine n e si dimostra che vale il seguente teorema.

Teorema. Se A è non singolare, cioè se $\det A \neq 0$, esiste sempre ed è unica la soluzione del sistema $A \cdot X = B$ ed è:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Infatti, se $\det A \neq 0$, la matrice A possiede l'inversa e moltiplicando entrambi i membri dell'equazione $A \cdot X = B$ per A^{-1} otteniamo:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

ed essendo $A^{-1} \cdot A = I$ si ha subito che $X = A^{-1} \cdot B$.

Per risolvere un sistema lineare con un numero di equazioni pari al numero delle incognite basta quindi calcolare la matrice inversa di quella dei coefficienti e applicare il teorema; osserva gli esempi che seguono.

ESEMPI

1. Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ che è di tre equazioni in tre incognite.

Scriviamo la matrice dei coefficienti e calcoliamo il suo determinante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{ed è} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

Poiché la matrice non è singolare, possiamo calcolare la sua inversa; si ha che

$A_{11} = 1$ $\quad A_{12} = -6$ $\quad A_{13} = -3$

$A_{21} = -1$ $\quad A_{22} = -4$ $\quad A_{23} = -2$

$A_{31} = 2$ $\quad A_{32} = 3$ $\quad A_{33} = -1$

quindi $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Possiamo adesso ricavare la matrice delle incognite $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

da cui $\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 1 \end{cases}$

Scriviamo la matrice dei coefficienti e calcoliamo il suo determinante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{ed è} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

La matrice A è singolare, quindi non possiede l'inversa; il metodo non è perciò applicabile e non possiamo trovare la soluzione del sistema, ammesso che questa esista.
Tuttavia, essendo il sistema di due equazioni in due incognite, puoi provare a risolverlo con uno dei metodi a te noti e ti accorgerai che è impossibile.

3. Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

Scriviamo la matrice dei coefficienti e calcoliamone il determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det A = -4$$

La matrice non è singolare, il sistema ha una sola soluzione.

La matrice inversa è: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$

Troviamo la soluzione del sistema: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

7.2 Il metodo di Cramer

Abbiamo già studiato questo metodo nel primo biennio per i sistemi lineari di due equazioni in due incognite; lo stesso metodo si può estendere al caso generale di n equazioni in altrettante incognite.

Regola di Cramer. Dato un sistema di n equazioni in n incognite e detta A la matrice dei coefficienti, se $\det A \neq 0$, il sistema ammette una e una sola soluzione data dalla n-pla di valori

$$x_1 = \frac{\det D_1}{\det A}, \qquad x_2 = \frac{\det D_2}{\det A}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad x_n = \frac{\det D_n}{\det A}$$

in cui D_i rappresenta la matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sopprimendo l'i-esima colonna e sostituendola con quella dei termini noti.

Applichiamo questa regola negli esempi che seguono.

ESEMPI

1. Risolviamo il sistema: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Scriviamo la matrice dei coefficienti di cui conosciamo già il valore del determinante $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ed è $\qquad \det A = -1$

Calcoliamo ora i determinanti delle matrici D_1, D_2, D_3 che si ottengono da A sostituendo una colonna con quella dei termini noti (i passaggi si riferiscono al calcolo del determinante con la regola di Sarrus)

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 4 - 2 = -1 \qquad \det D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 8 - 2 - 4 = 1$$

$$\det D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 8 - 1 = -1$$

La terna di valori soluzione del sistema si ottiene dal rapporto fra i valori dei determinanti ora calcolati ed il determinante della matrice dei coefficienti

$$x_1 = \frac{\det D_1}{\det A} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad x_2 = \frac{\det D_2}{\det A} = \frac{1}{-1} = -1 \qquad x_3 = \frac{\det D_3}{\det A} = \frac{-1}{-1} = 1$$

2. Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

Il sistema assegnato ha quattro equazioni e quattro incognite. Scriviamo innanzi tutto la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per calcolare il suo determinante scegliamo la prima riga; si ha così

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

cioè $\quad \det A = 2 \cdot (-3) - 2 - 3 + 2 = -9 \neq 0$

Dobbiamo ora calcolare altri quattro determinanti di matrici del quarto ordine, ciascuna delle quali si ottiene sostituendo l'i-esima colonna con quella dei termini noti; abbiamo così

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\det D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -13$$

$$\det D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\det D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13$$

Possiamo adesso ricavare le soluzioni del sistema

$$x_1 = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{-13}{-9} = \frac{13}{9} \qquad x_3 = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3} \qquad x_4 = \frac{13}{-9} = -\frac{13}{9}$$

7.3 L'algoritmo di Gauss

La risoluzione di un sistema lineare di n equazioni in n incognite si può fare agevolmente anche applicando il principio di riduzione che ricordiamo di seguito.

Principio di riduzione. Se in un sistema si sostituisce una combinazione lineare di due o più equazioni al posto di una di esse si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

Vogliamo applicare questo principio in modo da eliminare una variabile alla volta dalle equazioni del sistema fino a giungere ad uno di semplice risoluzione. Vediamo come procedere attraverso un esempio.

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 & \textbf{A} \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 & \textbf{B} \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 & \textbf{C} \end{cases}$

I passo

Eliminiamo la variabile x_1 da tutte le equazioni tranne la prima; per fare ciò eseguiamo queste operazioni:

- calcoliamo $A - 2B$ e scriviamo il risultato al posto della seconda equazione:

$$\underbrace{2x_1 + x_2 - 3x_3}_{A} - 2\underbrace{(x_1 + 3x_2 - x_3)}_{B} = \underbrace{1}_{A} - 2\underbrace{(-1)}_{B} \quad \rightarrow \quad -5x_2 - x_3 = 3$$

- calcoliamo $3A - 2C$ e scriviamo il risultato al posto della terza equazione:

$$3\underbrace{(2x_1 + x_2 - 3x_3)}_{A} - 2\underbrace{(3x_1 + x_2 - x_3)}_{C} = 3 \cdot \underbrace{1}_{A} - 2\underbrace{(0)}_{C} \quad \rightarrow \quad x_2 - 7x_3 = 3$$

Otteniamo in questo modo il sistema: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 & \\ -5x_2 - x_3 = 3 & \textbf{B} \\ x_2 - 7x_3 = 3 & \textbf{C} \end{cases}$

II passo

Eliminiamo la variabile x_2 dalla terza equazione:

- calcoliamo $B+5C$ e scriviamo il risultato al posto della terza equazione:

$$-5x_2 - x_3 + 5(x_2 - 7x_3) = 3 + 5 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad -36x_3 = 18$$

Otteniamo il sistema: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 - x_3 = 3 \\ \qquad -36x_3 = 18 \end{cases}$

Aver eseguito queste operazioni ci permette ora di trovare agevolmente la soluzione del sistema ricavando la variabile x_3 dall'ultima equazione e procedendo a ritroso per sostituzione:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -5x_2 - x_3 = 3 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 \\ -5x_2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ricaviamo x_2 dalla seconda equazione e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Troviamo infine la soluzione del sistema risolvendo anche la prima equazione:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Questa procedura di calcolo può essere generalizzata in modo da costruire un algoritmo eseguibile anche da un computer; tale algoritmo è noto come **algoritmo di Gauss** (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855).
Applichiamolo per risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite nella sua forma generale; i passi descritti sono gli stessi che abbiamo applicato al sistema nell'esempio precedente e la procedura si può applicare ad un sistema con un qualunque numero n di equazioni in n incognite.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

- Eliminiamo la variabile x_1 da tutte le equazioni tranne la prima. Per fare ciò:
  - moltiplichiamo la prima equazione per a_{21} e la seconda per a_{11} e poi sottraiamo le due equazioni ottenute, scrivendo il risultato al posto della seconda equazione

- moltiplichiamo la prima equazione per a_{31} e la terza per a_{11} e poi sottraiamo le due equazioni ottenute, scrivendo il risultato al posto della terza equazione
- il sistema che ne risulta è privo della variabile x_1 nella seconda e terza equazione ed assume la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

- Eliminiamo la variabile x_2 dalla terza equazione, trascurando la prima. Per fare ciò
  - moltiplichiamo la seconda equazione per a'_{32} e la terza per a'_{22} e poi sottraiamo le due equazioni ottenute, scrivendo il risultato al posto della terza equazione
  - il sistema che ne risulta è privo della variabile x_2 nella terza equazione ed assume la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}$$

- Dalla terza equazione si ricava che $x_3 = \dfrac{b''_3}{a''_{33}}$ e, procedendo a ritroso, si possono determinare i valori delle altre variabili.

Se nel corso di questo algoritmo una di queste equazioni diventa impossibile oppure indeterminata, per esempio troviamo che $3 = 0$ oppure $0 = 0$, allora è inutile continuare perché il sistema è impossibile nel primo caso, indeterminato nel secondo.

ESEMPI

Risolviamo con il metodo di Gauss i seguenti sistemi.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

Eliminiamo la variabile x_1. Moltiplichiamo la prima equazione per -3 e la seconda per 2

$\begin{cases} -6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -9 \\ -6x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$ sottraendo otteniamo $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad 8x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

Moltiplichiamo la terza equazione per 2

$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad 8x_2 + x_3 = 17 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$ sottraendo otteniamo $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad 8x_2 + x_3 = 17 \\ \qquad 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

Moltiplichiamo la terza equazione per 4

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \phantom{2x_1 + {}} 8x_2 + x_3 = 17 \\ \phantom{2x_1 + {}} 8x_2 - 4x_3 = 12 \end{cases} \qquad \text{sottraendo otteniamo} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \phantom{2x_1 + {}} 8x_2 + x_3 = 17 \\ \phantom{2x_1 + 8x_2 + {}} 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Ricaviamo infine $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 8x_2 + x_3 = 17 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_2 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

Osserviamo che la prima equazione del sistema non contiene alcune variabili; è allora opportuno spostarla di posto riscrivendola per ultima

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Procediamo nel modo solito. In questo esempio abbrevieremo la scrittura indicando a lato dell'equazione il fattore per cui abbiamo moltiplicato

fattore 2 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{cases}$

fattore 3 $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 18 \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 19 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{cases}$

fattore 5
fattore 3 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 15x_2 - 15x_3 + 10x_4 = 35 \\ 15x_2 - 15x_3 + 21x_4 = 57 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ 11x_4 = 22 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{cases}$

Riscriviamo il sistema scambiando le ultime due equazioni e risolvendo poi l'ultima

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_2 - x_4 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases} \qquad \text{ricaviamo allora che} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Nella risoluzione di un sistema di tre equazioni in tre incognite con il metodo di Cramer si trova che: det $A = 1$ det $D_1 = 0$ det $D_2 = 4$ det $D_3 = 0$

Il sistema è:

a. determinato con soluzione $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0$

b. determinato con soluzione $x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1$

c. indeterminato

d. impossibile.

2. Si vuole risolvere il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 & \text{A} \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 & \text{B} \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 & \text{C} \end{cases}$ con l'algoritmo di Gauss; per eliminare la variabile x_1 dalla seconda e dalla terza equazione si devono eseguire le seguenti operazioni:

a. $A - 2B$ e $5A + 2C$

b. $A - 2B$ e $2A - 5C$

c. $A - 2B$ e $5A - 2C$

d. $2A - B$ e $5A - 2C$

8. La risoluzione dei sistemi: il caso generale

Se il numero delle equazioni di un sistema è diverso dal numero delle incognite, la matrice dei coefficienti non è quadrata e non è possibile applicare nessuno dei metodi appena visti; in questo paragrafo ci proponiamo di stabilire delle condizioni che stabiliscano in quali ipotesi un sistema di questo tipo ammette soluzione. Consideriamo dunque il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti (**matrice incompleta**) è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Consideriamo adesso la matrice C che si ottiene orlando A con la colonna B dei termini noti:

$$C = [A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Il simbolo $[A \mid B]$ indica che C deriva dall'accostamento delle matrici A e B.

Essa prende il nome di **matrice completa**.

Le due matrici A e C hanno lo stesso numero di righe, quindi il rango di A è necessariamente minore o uguale al rango di C; si dimostra che vale il seguente teorema.

Teorema (di Rouché-Capelli). Un sistema di equazioni lineari ammette soluzione se e soltanto se la matrice completa ha lo stesso rango della matrice dei coefficienti del sistema.

LA CONDIZIONE DI RISOLVIBILITÀ

Questo teorema ci garantisce che:

- se A e C hanno lo stesso rango, il sistema è possibile;
- se A e C hanno rango diverso, il sistema è impossibile.

I esempio. Consideriamo il sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$

nel quale:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Determiniamo il rango di A:

- consideriamo il minore ottenuto intersecando le prime due righe e colonne:
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \quad \rightarrow \quad r(A)$ è almeno 2
- orliamo il minore con la terza riga e la terza colonna:
  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \quad \rightarrow \quad r(A) = 3$$

Anche la matrice C ha rango 3 perché contiene lo stesso minore non nullo di A. Dunque la matrice incompleta e quella completa hanno lo stesso rango ed il sistema è quindi possibile.

II esempio. Consideriamo il sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

dove $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha rango 2 perché il minore M formato dalle prime due righe e colonne ha determinante non nullo, ma sono nulli tutti i minori di ordine 3 che si ottengono orlando M:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{ma} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La matrice C ha invece rango 3 perché il minore che si ottiene orlando M con l'ultima colonna e la terza riga ha un determinante non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Il sistema è dunque impossibile.

Il metodo di risoluzione

Accertata la risolvibilità di un sistema, dobbiamo vedere come trovare le sue soluzioni; riprendiamo allora il sistema del primo esempio che è un sistema possibile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$$

Poiché sappiamo che il minore ottenuto intersecando la terza riga e la terza colonna ha un determinante non nullo, riscriviamo il sistema utilizzando le tre equazioni e isolando le prime tre variabili (corrispondenti ai coefficienti delle prime tre colonne):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 - x_4 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2x_4 - 3 \end{cases}$$

Per risolverlo possiamo usare uno qualunque dei metodi illustrati per i sistemi di n equazioni in n incognite; visto che sappiamo già che il determinante della matrice dei coefficienti vale -6, usiamo il metodo di Cramer.
Calcoliamo allora i determinanti delle matrici D_i; applicando la regola di Sarrus otteniamo:

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & 1 & 1 \\ 7 - x_4 & -2 & 3 \\ 2x_4 - 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4x_4 + (7 - x_4) + 3(2x_4 - 3) + 2(2x_4 - 3) + 3x_4 + 2(7 - x_4) = 6(x_4 + 1)$$

$$\det D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -x_4 & 1 \\ 1 & 7 - x_4 & 3 \\ -2 & 2x_4 - 3 & -2 \end{vmatrix} = -2(7 - x_4) + 6x_4 + (2x_4 - 3) + 2(7 - x_4) - 3(2x_4 - 3) - 2x_4 = 6$$

$$\det D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x_4 \\ 1 & -2 & 7 - x_4 \\ -2 & 1 & 2x_4 - 3 \end{vmatrix} = -2(2x_4 - 3) - 2(7 - x_4) - x_4 + 4x_4 - (7 - x_4) - (2x_4 - 3) = -12$$

Si ha allora che $\quad x_1 = \dfrac{6(x_4 + 1)}{-6} = -(x_4 + 1) \qquad x_2 = \dfrac{6}{-6} = -1 \qquad x_3 = \dfrac{-12}{-6} = 2 \qquad x_4 = x_4$

Le soluzioni trovate sono espresse in funzione della quarta variabile x_4 e sono quindi in numero infinito, una soluzione per ogni possibile valore di x_4; per esempio:

- se $x_4 = 2$ si ha la soluzione $(-3, -1, 2, 2)$
- se $x_4 = -1$ si ha la soluzione $(0, -1, 2, -1)$

e così via.

Poiché le soluzioni dipendono da una sola delle incognite, la x_4, si dice che il sistema ha ∞^1 soluzioni; in questa scrittura l'esponente del simbolo di infinito indica appunto che le soluzioni dipendono da una sola delle incognite.

Generalizziamo il metodo visto nell'esempio.

LA PROCEDURA DI RISOLUZIONE

Dato un sistema di m equazioni in n incognite che sia possibile, sia h il rango della matrice A dei coefficienti e sia M la matrice del minore non nullo di ordine h che si è valutato per stabilire il rango di A. Procediamo in questo modo:

- consideriamo le h equazioni corrispondenti alle righe della matrice M e trascuriamo le altre eventuali $m - h$, se il sistema ha un numero di equazioni superiore al numero delle incognite;
- scriviamo il sistema formato da tali equazioni considerando come incognite le h variabili corrispondenti alle colonne di M e trasportando al secondo membro le altre eventuali $n - h$ che si considerano come parametri, se il sistema ha un numero di equazioni inferiore al numero delle incognite;
- il sistema così ottenuto è di h equazioni in h incognite e può essere risolto con uno dei metodi visti nei paragrafi precedenti.

In particolare poi:

- se è $h < n$, cioè se il sistema ha un numero di equazioni inferiore a quello delle incognite, il sistema è **indeterminato**. Le infinite soluzioni si ottengono facendo variare i parametri, che sono pari a $n - h$. Si dice allora che **il sistema ha ∞^{n-h} soluzioni**
- se è $h = n$, cioè se il numero di equazioni è uguale al numero di incognite, il sistema ha una sola soluzione perché non ci sono variabili da considerare come parametri.

Osserviamo che, per quanto detto al primo punto precedente, non è possibile che sia $h > n$, cioè che il sistema che effettivamente risolviamo abbia un numero di equazioni maggiore del numero delle incognite, perché in questo caso dobbiamo considerare il sistema che si ottiene trascurando le equazioni i cui coefficienti non hanno contribuito alla costruzione della matrice incompleta (vedi esempio 2).

ESEMPI

Dopo aver stabilito se i seguenti sistemi sono possibili, determiniamo le loro soluzioni.

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

Il sistema è di due equazioni in tre incognite. Individuiamo il rango della matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il minore di ordine 2 formato dalle prime due colonne $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 14 \neq 0.$

Pertanto $r(A) = 2$.

Anche la matrice completa $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 6 & 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ ha lo stesso rango perché contiene lo stesso minore di A. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è possibile.

Per determinare le sue soluzioni, poiché il minore diverso da zero è quello individuato dalla prime due colonne di A, relative alle variabili x_1 e x_2, sceglieremo x_3 come parametro. Dobbiamo quindi risolvere il sistema di due equazioni nelle due incognite x_1 e x_2

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3 - 3x_3 \\ 6x_1 + 4x_2 = 11 - 3x_3 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di Cramer; sappiamo già che $\det A = 14$, calcoliamo i determinanti delle matrici D_i

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} -3 - 3x_3 & -1 \\ 11 - 3x_3 & 4 \end{vmatrix} = 4(-3 - 3x_3) + (11 - 3x_3) = -1 - 15x_3$$

$$\det D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 - 3x_3 \\ 6 & 11 - 3x_3 \end{vmatrix} = 2(11 - 3x_3) + 6(3 + 3x_3) = 12x_3 + 40 = 4(3x_3 + 10)$$

Il sistema ammette come soluzione la terna

$$x_1 = -\frac{1 + 15x_3}{14}, \qquad x_2 = \frac{4(3x_3 + 10)}{14} = \frac{2(3x_3 + 10)}{7}, \qquad x_3 = x_3$$

Esso ha quindi ∞^1 soluzioni.

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 = -8 \end{cases}$

Il sistema ha tre equazioni e due incognite; vediamo se è possibile: consideriamo le matrici incompleta e completa del sistema e stabiliamo il loro rango

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ la matrice ha rango 2, infatti $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ la matrice ha rango 2, infatti $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 0$ ma $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è allora possibile ed ha una sola soluzione. Per determinarla, poiché il minore diverso da zero è individuato dalle prime due equazioni, risolviamo il sistema da esse formato $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

Con il metodo di eliminazione si ottiene $\begin{cases} 3x_1 = 6 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Osserva che la soluzione trovata soddisfa anche la terza equazione; il sistema è dunque determinato.

3. $\begin{cases} -9x_1 - 6x_2 + x_3 = -15 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -10x_1 - x_2 + 3x_3 = -9 \end{cases}$

Il sistema è di tre equazioni in tre incognite. In questo caso, la matrice dei coefficienti è singolare; infatti si ha che

$$\det A = \begin{vmatrix} -9 & -6 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -10 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ma} \qquad \begin{vmatrix} -9 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \qquad \text{quindi } r(A) = 2$$

Sappiamo che, quando ciò accade, il sistema ammette infinite soluzioni oppure è impossibile. Per stabilirlo, calcoliamo il rango della matrice completa C

$$C = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 1 & -15 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \\ -10 & -1 & 3 & -9 \end{bmatrix} \qquad \text{ha rango 3, infatti} \qquad \begin{vmatrix} -9 & -6 & -15 \\ 5 & 2 & 3 \\ -10 & -1 & -9 \end{vmatrix} = -180 \neq 0$$

Allora il sistema è impossibile, perché la matrice completa ha rango diverso da quello della matrice incompleta.

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Stabiliamo se il sistema è possibile:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{essendo} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad r(A) = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

anche C ha rango 2 poiché contiene lo stesso minore non nullo di A

Il sistema è possibile ed ha ∞^2 soluzioni; riscriviamolo isolando le prime due variabili:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 + 1 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

Le soluzioni trovate, come previsto, sono ∞^2 perché dipendono dalle due variabili x_3 e x_4.

APPROFONDIMENTI

I SISTEMI OMOGENEI

Un sistema è omogeneo se tutti i termini noti sono nulli; esso si presenta quindi nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

in cui ci sono m equazioni e n incognite.

In questo caso la matrice incompleta A e quella completa C hanno lo stesso rango in quanto C si ottiene orlando A con una colonna di zeri. Il sistema è quindi sempre possibile.
Una soluzione è evidentemente quella in cui tutte le variabili sono contemporaneamente nulle:

$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 0 \quad \wedge \quad ..... \quad x_n = 0$$

Si dimostra poi che:

- se $r(A) = n$, cioè il rango di A è uguale al numero n delle incognite, allora esiste solo la soluzione nulla
- se $r(A) = h$ con $h < n$, allora esistono infinite soluzioni che dipendono da $n - h$ parametri.

I esempio:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 9 \qquad \rightarrow \qquad r(A) = 4$$

Poiché $n = 4$, il sistema ammette come unica soluzione quella nulla ed è: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

II esempio:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Avendo 4 equazioni e 5 incognite, il sistema ammette altre soluzioni oltre quella nulla; per conoscere la loro numerosità e trovarle, consideriamo la matrice A dei coefficienti e determiniamone il rango.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Minore formato dalle prime due righe e due colonne: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ il rango è almeno 2
- Orliamo con la terza riga e la terza colonna: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$
- Orliamo con la quarta colonna e la terza riga: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 10$ il rango è almeno 3
- Orliamo aggiungendo la quarta riga e la quinta colonna: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

La matrice A ha quindi rango 3.

Poiché $n = 5$ e $h = 3$, il sistema ammette ∞^2 soluzioni che troviamo risolvendo il sistema nelle tre incognite x_1, x_2, x_4 formato dalle prime tre equazioni:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2x_3 + x_5 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_4 = -x_3 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di Cramer usando il minore non nullo precedente:

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2x_3 + x_5 & 1 & 0 \\ -x_3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 10x_3 + 6x_5$$

$$\det D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2x_3 + x_5 & 0 \\ 3 & -x_3 & -2 \end{vmatrix} = 10x_3 + 4x_5$$

$$\det D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2x_3 + x_5 \\ 3 & -4 & -x_3 \end{vmatrix} = x_5$$

Otteniamo le ∞^2 soluzioni: $\quad x_1 = \dfrac{5x_3 + 3x_5}{5} \quad \wedge \quad x_2 = \dfrac{5x_3 + 2x_5}{5} \quad \wedge \quad x_4 = \dfrac{x_5}{10}$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. In un sistema di 3 equazioni e 4 incognite la matrice dei coefficienti ha rango 2 e quella completa ha rango 3; del sistema si può dire che:

a. è possibile e ha ∞^1 soluzioni
b. è possibile e ha ∞^2 soluzioni
c. è impossibile
d. tutte le precedenti affermazioni sono false

2. In un sistema di m equazioni in n incognite la matrice dei coefficienti e quella completa hanno entrambe rango 3; considera le seguenti affermazioni:

① il sistema non è mai impossibile
② il sistema è possibile e ha ∞^1 soluzioni se $m = 4$ e $n = 3$
③ è possibile e ha ∞^2 soluzioni se $m = 4$ e $n = 5$
④ è possibile e ha ∞^1 soluzioni se $m = 3$ e $n = 3$

Di esse sono vere:

a. tutte **b.** tutte tranne la ④ **c.** tutte tranne la ③ **d.** nessuna

I concetti e le regole

Matrici e caratteristiche

Una **matrice** è una tabella di numeri reali organizzati per righe e colonne; ciascun elemento della matrice si indica con il simbolo a_{ik} dove l'indice i rappresenta il numero di riga e l'indice k il numero di colonna cui appartiene l'elemento.
Se una matrice ha n righe e m colonne si dice che è di tipo (n,m); nel caso particolare in cui $n = m$ la matrice si dice quadrata di ordine n.

Data una matrice A se si scambiano fra loro le righe con le colonne, si ottiene la matrice $\boldsymbol{A^T}$ che si dice **trasposta** di A.
Una matrice quadrata A del tipo $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ che ha nulli tutti gli elementi tranne quelli della diagonale principale, si dice matrice **diagonale**; se in particolare i numeri a, b, c sono uguali a 1, la matrice si dice **identica** e si indica con la lettera I.

Le operazioni con le matrici

Con le matrici si possono eseguire le seguenti operazioni:

- la somma e la differenza, se le due matrici sono dello stesso tipo; ciascun elemento della matrice somma o differenza si ottiene sommando o sottraendo gli elementi corrispondenti:
  $A = [a_{ik}]$ e $B = [b_{ik}]$ $\rightarrow$ $A \pm B = [a_{ik} \pm b_{ik}]$
- il prodotto per un numero reale k: $k \cdot A = [k \cdot a_{ik}]$
- il prodotto righe per colonne se le matrici sono conformabili, cioè se A è di tipo (n,p) e B è di tipo (p,m); la matrice prodotto C è di tipo (n,m) e ciascun elemento c_{ik} si ottiene sommando i prodotti dei termini della riga i-esima di A con i corrispondenti termini della colonna k-esima di B.
  Il prodotto fra matrici non è commutativo e non vale la legge di annullamento.

Il calcolo di un determinante

Ad ogni matrice quadrata A si può associare un numero reale che si chiama **determinante** di A che si indica con il simbolo **det *A*** oppure $|\boldsymbol{A}|$.
Il determinante di una matrice di ordine 1 o 2 si calcola con la seguente regola:

- se $A = [a_{11}]$ $\rightarrow$ $\det A = a_{11}$
- se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

(prodotto dei numeri sulla diagonale principale $-$ prodotto dei numeri sulla diagonale secondaria)

Data una matrice quadrata A, si dice **minore complementare** di un elemento a_{ik} il determinante della matrice che si ottiene da A sopprimendo la riga i-esima e la colonna k-esima.
Si chiama poi **complemento algebrico** di a_{ik}, e si indica con il simbolo A_{ik}, il minore complementare stesso se $i + k$ è pari, il suo opposto se $i + k$ è dispari.

Il determinante di una matrice di ordine $n > 2$ si calcola con la seguente procedura:

- si sceglie una riga o una colonna particolare
- si calcola il **complemento algebrico** di ciascun elemento della riga (o colonna) scelta
- si sommano i prodotti degli elementi della riga (o colonna) scelta per i rispettivi complementi algebrici.

In particolare, se la matrice è di ordine 3, si può applicare la regola di Sarrus.

La matrice inversa

Una matrice che ha determinante nullo si dice **singolare**. Quando una matrice A non è singolare, cioè quando $\det A \neq 0$, si può calcolare la sua **inversa A^{-1}**, cioè la matrice tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Per determinare A^{-1} si deve applicare questo algoritmo:

- calcolare i complementi algebrici A_{ik} di ogni elemento a_{ik} di A
- scrivere la matrice A' che ha per elementi gli A_{ik}
- costruire la trasposta A'^{T} di A'
- dividere ciascun termine di A'^{T} per $\det A$.

Rango di una matrice

Data una matrice A di tipo (n,m), si chiama **minore di ordine p** il determinante di una matrice quadrata che si ottiene intersecando p righe e p colonne di A.
Si chiama **rango** della matrice A il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A.
Una matrice ha quindi rango k se esiste una matrice quadrata di ordine k estratta da A che ha determinante diverso da zero e se tutte le matrici quadrate di ordine $k+1$ che si possono estrarre da A hanno determinante nullo.

I sistemi lineari

Un **sistema lineare** è un sistema di m equazioni in n incognite nel quale tutte le variabili sono di primo grado; esso si dice in forma normale se è scritto in questo modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ad ogni sistema lineare si possono associare le seguenti matrici:

- la matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- la matrice colonna delle variabili $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$

- la matrice colonna dei termini noti $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$

In questo modo un sistema lineare può essere scritto in forma matriciale: $A \cdot X = B$

Sistemi possibili e impossibili

Indicata con A la matrice dei coefficenti di un sistema lineare, si dice **matrice completa** la matrice C che si ottiene accostando ad A la colonna B dei termini noti. Può essere scritta sinteticamente nella forma: $C = [A \mid B]$

Un sistema è possibile, cioè ammette soluzioni, se e solo se A e C hanno lo stesso rango (teorema di Rouché-Capelli).

La risoluzione dei sistemi lineari

Se il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite, la matrice dei coefficienti è quadrata di ordine n ed il sistema è possibile se e solo se $\det A \neq 0$.

In queste ipotesi, per risolvere il sistema si può ricorrere:

- al metodo della matrice inversa: calcolata A^{-1}, la matrice delle incognite è $X = A^{-1} \cdot B$
- al metodo di Cramer:

  si trovano le n matrici D_i che si ottengono sopprimendo la colonna i-esima e sostituendola con la colonna dei termini noti

  il valore di ciascuna incognita si ottiene dalla relazione $x_i = \dfrac{\det D_i}{\det A}$
- al metodo di Gauss che consiste nella eliminazione progressiva delle incognite mediante opportune combinazioni lineari delle equazioni del sistema:

  si elimina x_1 da tutte le equazioni tranne la prima

  si elimina x_2 da tutte le equazioni tranne la prima e la seconda

  si elimina x_3 da tutte le equazioni tranne la prima, la seconda e la terza e così via

  poichè l'ultima equazione ha la sola incognita x_n, si ricava il valore di x_n e si procede poi a ritroso con le sostituzioni.

Se il numero m delle equazioni non è uguale al numero n delle incognite, supposto che il sistema sia possibile e che le matrici A e C abbiano rango h, per trovare la soluzione del sistema si procede in questo modo:

- si considerano le h equazioni corrispondenti alle righe della matrice C che sono state utilizzate per determinare il rango
- in tali equazioni si considerano come incognite quelle che corrispondono alle colonne della matrice C che sono state utilizzate per determinare il rango e si trasportano al secondo membro le altre variabili che vengono quindi considerate come parametri
- si risolve il sistema ottenuto che è di h equazioni in h incognite con uno dei metodi visti al caso precedente.

La soluzione trovata è in funzione delle $n - h$ variabili che sono state considerate come parametri.

I sistemi omogenei

Un sistema di n equazioni in n incognite è **omogeneo** se tutti i termini noti sono nulli. Un sistema di questo tipo è sempre possibile perchè ammette almeno la soluzione nulla, in particolare:

- ha solo la soluzione nulla se il determinante della matrice A dei coefficienti è diverso da zero
- ha infinite soluzioni (che si determinano con i metodi visti in precedenza) se $\det A = 0$.

Matrici e sistemi lineari

LE MATRICI E LE OPERAZIONI

RICORDA

Date due matrici $A = [a_{ik}]$ e $B = [b_{ik}]$:

- se sono dello stesso tipo allora $A \pm B = [a_{ik} \pm b_{ik}]$
- $\forall h \in R$: $\quad k \cdot A = [k \cdot a_{ik}]$
- se sono conformabili, A di tipo $r \times s$ e B di tipo $s \times t$, allora $A \cdot B$ è una matrice C di tipo $r \times t$ i cui elementi c_{ik} sono dati dalla somma dei prodotti dei termini che appartengono alla riga i–sima di A per i termini corrispondenti che appartengono alla colonna k-esima di B.

Comprensione

1 Completa le richieste considerando le matrici:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

a. sono matrici quadrate ....
b. la matrice B è di tipo ....
c. la matrice C è una matrice ....
d. sono matrici di ordine 2 ....

2 Dopo aver spiegato il significato di matrice nulla, diagonale, triangolare, completa inserendo il termine adatto:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ è una matrice ....

b. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ è una matrice ....

c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice ....

3 Se una matrice A è di tipo 2×5, la sua trasposta A^T è di tipo:

a. 2×5 **b.** 5×5 **c.** 2×2 **d.** 5×2

4 Date le seguenti matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, indica fra quelle indicate la risposta corretta:

a. $A + B$ è ① $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b. $A - 2B$ è ① $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

5 Dopo aver spiegato quando due matrici si dicono conformabili, indica fra le seguenti la risposta corretta:

a. se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ allora $A \cdot B$ è: ① $\begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}$

b. se $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ allora $A \cdot B$ è: ① $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

6 Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni.
Date le matrici A e B, tali che A sia conformabile con B:

a. se $A \cdot B = 0$, allora $A = 0 \ \vee \ B = 0$; V F

b. considerata la matrice nulla conformabile con A, allora $A \cdot 0 = 0$; V F

c. se anche B è conformabile con A, allora $A \cdot B = B \cdot A$. V F

7 Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a. Una matrice identica è una matrice quadrata in cui gli elementi della diagonale principale valgono tutti 1. V F

b. Una matrice identica è una matrice quadrata che ha tutti gli elementi che valgono 0 tranne quelli sulla diagonale principale che valgono 1. V F

c. La matrice identica è l'elemento neutro della moltiplicazione. V F

Applicazione

8 Scrivi una matrice triangolare del terzo ordine e una matrice diagonale del quarto ordine.

9 Indica il tipo delle seguenti matrici e scrivi le loro trasposte:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcola, quando è possibile, la somma delle seguenti coppie di matrici.

10 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Le matrici sono dello stesso tipo; possiamo eseguire la somma:

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+1 & 1-1 & -4+2 \\ -3+5 & 0-4 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

11 $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right]$

12 $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right]$

13 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ [non eseguibile]

14 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & \frac{13}{3} \\ \frac{1}{2} & 7 \end{bmatrix}\right]$

15 $A = \begin{bmatrix} 30 & 25 & 18 \\ 24 & 40 & 10 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 26 & 20 & 24 \\ 23 & 36 & 12 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 56 & 45 & 42 \\ 47 & 76 & 22 \end{bmatrix}\right]$

16 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ [non eseguibile]

17 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right]$

18 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 7 \\ 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right]$

19 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & -8 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}\right]$

Calcola, quando è possibile, la differenza A – B delle seguenti coppie di matrici.

20 **ESERCIZIO GUIDA**

$A = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 5 & -10 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 2 & 8 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

Le matrici sono dello stesso tipo; possiamo eseguire la differenza:

$$A - B = \begin{bmatrix} 12-9 & -3+5 \\ 5-2 & -10-8 \\ 4+6 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -18 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

21 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}\right]$

22 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right]$

23 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $[[2 \quad 3 \quad 3]]$

24 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right]$

25 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ [non eseguibile]

26 $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right]$

27 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}\right]$

28 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right]$

29 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right]$

30 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\right]$

31 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right]$

Dati il numero reale h e la matrice A, calcola il prodotto $h \cdot A$.

32 **ESERCIZIO GUIDA**

$h = -3$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Calcoliamo il prodotto $h \cdot A$ moltiplicando ciascun elemento di A per -3. Abbiamo che

$$h \cdot A = -3 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 \cdot 1 & -3 \cdot 3 & -3 \cdot (-1) \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 5 & -3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 3 \\ 0 & -15 & -6 \end{bmatrix}$$

33 $h = 7$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 7 & -21 \\ \frac{7}{2} & 35 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right]$

34 $h = \frac{1}{2}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -2 & 10 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 & 3 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ -1 & 5 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right]$

35 $h = 0$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$

36 $h = -\frac{3}{2}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{6}{21} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\right]$

Esegui le seguenti operazioni tra matrici.

37 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

a. $A + B$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right]$

b. $A - B$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & -3 \end{bmatrix}\right]$

c. $2A - 3B$ $\left[\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 10 & -8 & -10 \end{bmatrix}\right]$

38 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$

a. $A - B$ $\left[\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}\right]$

b. $5A - 2B$ $\left[\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 27 & -34 \end{bmatrix}\right]$

c. $2A + \frac{1}{2}B$ $\left[\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 4 \\ 3 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}\right]$

39 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

a. $2A + B$ $\left[\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$

b. $3A - B$ $\left[\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}\right]$

c. $\frac{1}{2}A - 2B$ $\left[\begin{bmatrix} -\frac{11}{12} \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}\right]$

40 $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -10 & 18 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a. $A + B$ $\left[\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}\right]$

b. $A + B + C$ $\left[\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 15 \end{bmatrix}\right]$

c. $A + 5B + 2C$ $\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$

41 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

a. $2A - B$ $\left[\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right]$

b. $-A + 3B$ $\left[\begin{bmatrix} -7 & 0 & 10 \\ -2 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}\right]$

c. $\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$ $\left[\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\right]$

42 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

a. $A + B - C$ $\left[\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right]$

b. $A - B + 2C$ $\left[\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right]$

c. $2A + B - 3C$ $\left[\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\right]$

Calcola, quando è possibile, i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ tra le matrici di seguito indicate.

43 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice A è di tipo $(2, 4)$ e la B di tipo $(4, 2)$, dunque A è conformabile con B e B è conformabile con A, possiamo perciò calcolare sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1+4+0-1 & -1+6-1+2 \\ 3+8+0+0 & -3+12+2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-4 & -1-2 & 1+0 \\ 2+9 & 4+12 & -2+6 & 2+0 \\ 0+3 & 0+4 & 0+2 & 0+0 \\ -1+6 & -2+8 & 1+4 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 & 1 \\ 11 & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

44 $A = [1 \quad -4 \quad 5] \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $[A \cdot B = [2];\ B \cdot A$ non esiste$]$

45 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad [A \cdot B = [6 \quad 1 \quad -3]$; $B \cdot A$ non esiste$]$

46 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \left[A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right]$

47 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad [A \cdot B = [3 \quad 1 \quad 4 \quad 10]$; $B \cdot A$ non esiste$]$

48 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \left[A \cdot B \text{ non esiste}; B \cdot A = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right]$

49 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad \left[A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}; B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \\ 7 & 16 & 27 \end{bmatrix}\right]$

50 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \left[A \cdot B = \begin{bmatrix} 53 & 29 \\ 50 & 26 \end{bmatrix}; B \cdot A = \begin{bmatrix} 36 & 28 & 48 \\ 9 & 7 & 12 \\ 29 & 19 & 36 \end{bmatrix}\right]$

51 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad \left[A \cdot B = B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right]$

52 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ calcola A^2 e A^3.

(Sugg.: osserva che $A^2 = A \cdot A$ e che $A^3 = A^2 \cdot A$) $\quad \left[A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 12 \end{bmatrix}; A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 18 \\ 18 & 0 & 9 \\ 27 & 18 & -27 \end{bmatrix}\right]$

53 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ calcola A^2, A^3, A^4. $\quad \left[A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}; A^3 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}; A^4 = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}\right]$

54 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ calcola A^2, A^3 e verifica che $\forall\, n \in N$ si ha che $A^n = A$.

55 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$ calcola A^2, A^3 e verifica che $\forall\, n \in N$ si ha che $A^n = 0$.

Date le matrici A, B, C calcola, quando è possibile, $A \cdot (B + C)$ e verifica che vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

56 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 21 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}\right]$

57 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -4 \\ 12 \end{bmatrix}\right]$

58 $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $B = [1 \quad 0]$ $C = [-2 \quad 3]$ $\left[\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right]$

59 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

calcola $A \cdot B \cdot C$. $\left[\begin{bmatrix} 31 & 43 \\ -84 & -104 \end{bmatrix}\right]$

60 Date le matrici

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a. indica il tipo di ciascuna di esse;
b. scrivi la trasposta di B e specificane il tipo;
c. stabilisci se si può calcolare $A + B$, $A + C$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $C \cdot D$.

61 Con riferimento alle matrici dell'esercizio precedente, calcola:
a. $A + 2C$
b. $3A - \frac{1}{2}C$
c. $D \cdot A$

$\left[\mathbf{a.} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{b.} \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 3 & -7 \\ \frac{7}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ -3 & 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}; \ \mathbf{c.} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$

62 Facendo ancora riferimento alle matrici dell'esercizio 60, verifica che:
a. $(B \cdot D)^T = D^T \cdot B^T$;
b. $(A + C) \cdot B = A \cdot B + C \cdot B$.

63 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, trova una matrice X dello stesso tipo tale che $A + X = 2B$. $\left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\right]$

64 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, trova la matrice X tale che $BX = A$. $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\right]$

65 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, trova una matrice X tale che $A^T + X = 2B$. $\left[\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 2 & -7 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\right]$

66 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, trova la matrice X tale che $A \cdot A^T + X = B$. $\left[\begin{bmatrix} -26 & 26 \\ 27 & -48 \end{bmatrix}\right]$

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

Comprensione

67 Il determinante di una matrice è un numero reale. Esso si può calcolare quando:

a. la matrice è rettangolare; V F

b. la matrice è quadrata; V F

c. la matrice non è la matrice nulla; V F

d. la matrice non è la matrice identica. V F

68 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, indica quali sono le considerazioni che è opportuno fare per scegliere la riga o la colonna mediante la quale sviluppare il suo determinante.

69 Barra vero o falso.

a. Se $\det A = 0$, necessariamente la matrice A è la matrice nulla. V F

b. Se $\det A = 0$, necessariamente la matrice A ha una riga oppure una colonna di elementi tutti nulli. V F

c. Se una matrice A ha una riga oppure una colonna di elementi tutti nulli, allora $\det A = 0$. V F

70 Barra vero o falso.

a. Il determinante di una matrice non cambia se si scambiano fra loro due righe o due colonne. V F

b. Il determinante di una matrice non cambia se si scambiano fra loro due righe e due colonne. V F

c. Se una matrice ha due colonne uguali, il suo determinante è nullo. V F

d. Se si moltiplicano le righe (o le colonne) di una matrice per un numero reale $k \neq 0$, anche il determinante della matrice risulta moltiplicato per lo stesso fattore. V F

71 Senza eseguire il calcolo, stabilisci quali fra le seguenti matrici hanno determinante nullo:

a. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

72 Stabilisci come si modifica, in conseguenza delle operazioni indicate in ognuno dei seguenti casi, il determinante k di una matrice quadrata di ordine n $(n \geq 2)$:

a. scambiando tra loro due righe o due colonne; **b.** moltiplicando per -1 due righe;

c. moltiplicando per 3 una colonna; **d.** moltiplicando per 2 tutte le sue righe.

73 Stabilisci quali tra le seguenti operazioni sulla matrice A di ordine n non ne alterano il determinante:

a. aggiungere alla prima riga la seconda moltiplicata per 3;

b. sostituire ad una riga un'altra ad essa proporzionale;

c. sostituire alla prima colonna la somma delle prime due;

d. scambiare fra loro le prime due righe;

e. cambiare segno agli elementi di una colonna.

74 Barra vero o falso considerando che A e B sono matrici di ordine n.

a. Se $\det(A \cdot B) = 0$, allora $\det A = 0 \ \vee \ \det B = 0$. V F

b. Se $\det(A \cdot B) = 0$, allora $A = 0 \ \vee \ B = 0$. V F

c. $\det(A + B) = \det A + \det B$. V F

d. $\det(A \cdot B)^k = [\det A]^k \cdot [\det B]^k$. V F

Applicazione

Calcola il determinante delle seguenti matrici.

75 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

La matrice è di ordine 2; il determinante è il prodotto dei termini lungo la diagonale principale meno il prodotto dei termini lungo la diagonale secondaria:

$$\det A = 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

76 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\left[\frac{7}{2};\ 21;\ -\frac{5}{2}\right]$

77 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 & \frac{1}{7} \\ 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[-7;\ \frac{10}{7};\ 0\right]$

78 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 10 & 11 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ $\left[19;\ -\frac{3}{2};\ 25\right]$

79 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[-3;\ -\frac{13}{4};\ \sqrt{2}\right]$

80 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 5 \\ -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\left[1;\ \frac{1}{3};\ 0\right]$

81 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

La matrice è di ordine 3; il suo deteminante può essere calcolato con il teorema di Laplace oppure con la regola di Sarrus.

- Con il teorema di Laplace
  Scegliamo la seconda colonna che ha un elemento nullo; il determinante è dato da:

$$-(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-12 + 2) + 2 \cdot (-24 - 3) = -64$$

■ Con la regola di Sarrus

Riscriviamo la matrice affiancata dalla prime due colonne e applichiamo la regola:

$$\left[\begin{array}{rrr}4 & -1 & 3\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 0 & -6\end{array}\right]\begin{array}{rr}4 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 0\end{array}$$

$$\underbrace{[4\cdot 2\cdot(-6)+(-1)\cdot(-2)\cdot 1+3\cdot 2\cdot 0]}_{\text{somma dei prodotti lungo le diagonali principali}}-\underbrace{[3\cdot 2\cdot 1+4\cdot(-2)\cdot 0+(-1)\cdot 2\cdot(-6)]}_{\text{somma dei prodotti lungo le diagonali secondarie}}=-46-18=-64$$

82 $\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ [−10; − 4; − 2]

83 $\begin{bmatrix}7 & 2 & 1\\ 6 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 4 & -2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$ [2; 28; ; − 13]

84 $\begin{bmatrix}-5 & 0 & 2\\ 6 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}36 & 4 & 5\\ 12 & 2 & 3\\ -24 & 5 & -4\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -5 & 0\\ -1 & 4 & 6\end{bmatrix}$ [57; − 384; − 16]

85 **ESERCIZIO GUIDA**

$$B=\begin{bmatrix}2 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -4 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante utilizzando il teorema di Laplace e scegliendo, per semplificare il calcolo, la quarta riga

$$\det B=-1\cdot\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ -4 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-[2(-3+2)+2(2-4)]+2[2(2)-1\cdot(-2)]=6+12=18$$

86 $\begin{bmatrix}5 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 5 & -1\\ 4 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}2 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$ [34; 11]

87 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}2 & -3 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ [−1; 0]

Calcola il determinante delle seguenti matrici, utilizzando le proprietà dei determinanti.

88 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A=\begin{bmatrix}3 & -30 & -3\\ 12 & -20 & 16\\ 0 & 10 & 1\end{bmatrix}$$

Poiché gli elementi della prima riga sono tutti multipli di 3, possiamo scrivere che

$$\det A = 3\begin{vmatrix} 1 & -10 & -1 \\ 12 & -20 & 16 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che tutti gli elementi della seconda colonna sono multipli di 10. Dunque

$$\det A = 3 \cdot 10\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 12 & -2 & 16 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Abbiamo inoltre che gli elementi della seconda riga sono tutti multipli di 2. Perciò

$$\det A = 3 \cdot 10 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 60 \cdot [1(-1-8) - 6(-1+1)] = 60(-9) = -540$$

89 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(Suggerimento: somma la prima riga, moltiplicata per -2, alla terza) [5; 0]

90 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ [−2; 0]

91 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ [7; −20]

92 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{7} & 2 \\ 7 & -\frac{3}{2} & 21 \end{bmatrix}$$

Cerca di trasformare la matrice in modo che i suoi elementi diventino interi. Per fare ciò devi moltiplicare gli elementi della seconda riga per 21 e quelli della terza per 2. Affinché il determinante non cambi devi poi dividere per 42. [0]

93 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}$ $\left[-\frac{15}{4}; 0\right]$

94 $\begin{bmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 8 & 0 & 16 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 11 & -22 & -33 \\ 6 & 44 & 12 \\ 5 & 11 & 9 \end{bmatrix}$ [544; 7854]

95 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 15 & -5 & 20 & 5 \end{bmatrix}$ [132; 140]

96 $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

(Suggerimento: osserva che la prima matrice è triangolare, quindi...) [−15; 600]

97 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$ [−30; −10]

Calcola il determinante delle seguenti matrici dopo averle trasformate in matrici triangolari.

98 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow R_1 \\ \leftarrow R_2 \\ \leftarrow R_3 \end{array}$$

Indichiamo con R_1, R_2, R_3 le righe della matrice. Cerchiamo di far diventare nullo l'elemento di posto (2, 1): al posto della seconda riga scriviamo quella che si ottiene calcolando $R_2 + \frac{1}{2}R_1$ (possiamo aggiungere ad una riga una ad essa parallela moltiplicata per un fattore k); otteniamo così

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow R'_1 \\ \leftarrow R'_2 \\ \leftarrow R'_3 \end{array}$$

Cerchiamo di far diventare nullo l'elemento di posto (3, 2): 36al posto della terza riga scriviamo quella che si ottiene calcolando $R'_3 - 2R'_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

La matrice ottenuta è triangolare. Si ha così che $\det A = 2 \cdot \frac{1}{2}(-9) = -9$.

99 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ [2; −13]

100 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ [21; −27]

Determina per quali valori del parametro k i determinanti delle seguenti matrici assumono il valore indicato.

101 $A = \begin{bmatrix} k & k+1 \\ 2 & k-1 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = -2$ $[k = 0 \lor k = 3]$

102 $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{k} & k \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\det A = 2$ $[k = -4 \ \vee \ k = 2]$

103 $A = \begin{bmatrix} 2^k & 2^{2k+1} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\det A = 0$ $[k = -2]$

104 $A = \begin{bmatrix} \ln k & -1 \\ 2 & \ln(k-1) \end{bmatrix}$ $\det A = 2$ $[k = 2]$

105 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k-1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det A = 10$ $[k = -1 \ \vee \ k = 8]$

LA MATRICE INVERSA

RICORDA

La matrice inversa di una matrice A esiste se e solo se $\det A \neq 0$; per calcolarla si deve:

- costruire la matrice dei complementi algebrici A_{ik} di ciascun elemento a_{ik} di A
- trovarne la trasposta
- dividere ciascun elemento per il determinante di A.

Comprensione

106 Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a. Se una matrice è invertibile allora è non singolare. V F

b. Se una matrice è singolare, allora è invertibile. V F

c. $(A^{-1})^{-1} = A$ V F

d. Se A è invertibile, allora $\det A = \dfrac{1}{\det A^{-1}}$. V F

107 Stabilisci quale tra le alternative proposte può completare la seguente proposizione in modo che risulti vera.

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile:

a. per ogni valore reale di t e coincide con la sua inversa;

b. mai;

c. se e solo se è $t \neq 0$;

d. per ogni valore reale di t e la matrice inversa è $\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

e. se e solo se è $t = 0$.

108 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & h & 0 \end{bmatrix}$, stabilisci quale delle seguenti affermazioni è corretta:

a. A non è mai singolare;

b. A è singolare per ogni valore di h;

c. A è singolare se $h = -\dfrac{3}{2} \vee h = 2$;

d. A è singolare se $h = 0$;

e. nessuna delle proposizioni precedenti è vera.

Applicazione

Determina, quando è possibile, l'inversa delle seguenti matrici.

109 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha che $\det A = -5$, dunque la matrice A è invertibile. Calcoliamo i complementi algebrici

$A_{11} = -1$ $\quad A_{12} = 3$ $\quad A_{13} = -2$

$A_{21} = 2$ $\quad A_{22} = -1$ $\quad A_{23} = -1$

$A_{31} = -1$ $\quad A_{32} = -7$ $\quad A_{33} = 3$

Costruiamo la matrice dei complementi algebrici A' e quindi la sua trasposta A'^T

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix} \qquad A'^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo infine $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A'^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

110 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\quad \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{3}{17} \end{bmatrix}\right]$

111 $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$; $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\text{non invertibile}; \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right]$

112 $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right]$

113 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; $\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad \left[\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{19}{44} & -\frac{7}{22} & -\frac{1}{44} \\ \frac{27}{44} & -\frac{3}{22} & -\frac{13}{44} \\ -\frac{7}{22} & \frac{2}{11} & \frac{5}{22} \end{bmatrix}\right]$

IL RANGO DI UNA MATRICE

RICORDA

Il rango di una matrice A è il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A; per trovarlo si deve:

- individuare un minore Ψ non nullo di ordine h
- considerare i minori di ordine $h+1$ che si ottengono orlando Ψ: se tali minori sono tutti nulli il rango di A è h, se ne esiste uno non nullo si ripete il procedimento di orlatura.

Comprensione

114 Barra vero o falso.

a. Se A è una matrice di ordine n non singolare, il rango di A è n. V F

b. Se A è una matrice di ordine n singolare, il suo rango è minore di n. V F

c. Se una matrice quadrata ha rango r, la matrice è di ordine r. V F

d. Il rango di una matrice non nulla vale almeno 1. V F

115 Di una matrice di ordine n si sa che ha rango $n-1$. Quali informazioni puoi ricavare sul determinante della matrice? Motiva la tua risposta.

116 Una matrice A ha rango 0. Cosa puoi dire di A?

117 Barra vero o falso.
Il rango di una matrice non cambia se:

a. si moltiplica una riga della matrice per un numero negativo V F

b. si elimina una colonna V F

c. si elimina una riga proporzionale ad un'altra V F

d. si scambiano tra loro due colonne. V F

118 Barra vero o falso.

a. Se in una matrice A sono nulli tutti i minori di ordine 2, allora il rango di A è minore di 2. V F

b. Se da una matrice A è possibile estrarre una sottomatrice quadrata del terzo ordine non singolare, allora il rango della matrice è almeno 3. V F

c. Il rango di una matrice di tipo (3, 5) non può essere maggiore di 3. V F

d. Se A è una matrice quadrata di ordine n ed è invertibile, allora il suo rango è n. V F

Applicazione

Determina il rango delle seguenti matrici.

119 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

A è una matrice quadrata ed è $\det A = -8$. Poiché il determinante non è nullo, $r(A) = 3$.

120 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det A = 0$ la matrice ha rango minore di 3. Consideriamo allora il minore del secondo ordine formato dall'intersezione delle prime due righe con le prime due colonne. Poiché

$$\Psi_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{possiamo concludere che} \qquad r(A) = 2$$

121 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ [1; 3]

122 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & -10 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 4 & -\frac{4}{3} & 8 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ [2; 1]

123 **ESERCIZIO GUIDA**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

La matrice è di tipo (3, 4), quindi il suo rango è minore o uguale a 3.
Osserviamo che il minore del secondo ordine formato dall'intersezione della seconda e terza riga con la prima e la seconda colonna è diverso da zero. Infatti

$$\Psi_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Questo significa che il rango della matrice è almeno due. Calcoliamo adesso i minori del terzo ordine che si ottengono orlando Ψ_1 con una riga e una colonna qualsiasi di A.
Orliamo Ψ_1 con la prima riga e la terza colonna di A:

$$\Psi_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché Ψ_2 è uguale a zero, dobbiamo cercare, se esiste, un altro minore del terzo ordine diverso da zero. L'unica orlatura ancora possibile è quella che possiamo realizzare con la prima riga e la quarta colonna; anche in questo caso

$$\Psi_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

Non essendo possibile estrarre altri minori del terzo ordine, concludiamo che $r(A) = 2$

124 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ [2; 3]

125 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ [1; 1]

126 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & -6 \\ 5 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ [3; 2]

127 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 12 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 2 & -1 \\ 5 & 30 & -10 & 5 \end{bmatrix}$ [4; 1]

Determina il rango delle seguenti matrici al variare del parametro in esse contenuto.

128 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo, al variare del parametro a, il rango della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \\ -a & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice ha sicuramente almeno rango 2 perchè il minore $\Psi_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1$ non è nullo.

Orliamolo con la prima colonna e la terza riga e calcoliamo il determinante con la regola di Sarrus:

$$\Psi_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4a + 3 - 3a - 4 - 6 = a - 1$$

Il minore ottenuto è diverso da zero se $a \neq 1$.

Orliamolo con la seconda colonna e la terza riga: $\Psi_3 = \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3a - 8 + 6 - 2a = a - 2$
Il minore è diverso da zero se $a \neq 2$.

Possiamo quindi concludere che il rango della matrice è 3. Infatti:

- se $a = 1$ è nullo il minore Ψ_2, ma per tale valore di a non si annulla Ψ_3
- se $a = 2$ è nullo il minore Ψ_3, ma per tale valore di a non si annulla Ψ_2.

129 $\begin{bmatrix} 2 & a & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & -1 & a \\ 1 & -2a & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $[\forall a \in R,\ r = 3]$

130 $\begin{bmatrix} a & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3a \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $[r = 2 \text{ se } a = 4;\ r = 3 \text{ se } a \neq 4]$

131 $\begin{bmatrix} k & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ k & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\left[r = 2 \text{ se } k = \frac{3}{2};\ r = 3 \text{ se } k \neq \frac{3}{2}\right]$

132 $\begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ $[r=3 \text{ se } k \neq 0 \ \wedge \ k \neq 4;\ r=2 \text{ se } k=0 \ \vee \ k=4]$

133 $\begin{bmatrix} 0 & b & 1 & -2 \\ 1 & b+5 & b & 2-b \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $[r=2 \text{ se } b=-2;\ r=3 \text{ se } b \neq -2]$

134 $\begin{bmatrix} b & 0 & b+1 \\ 1 & b-1 & 2b \end{bmatrix}$ $[r=1 \text{ se } b=1;\ r=2 \text{ se } b \neq 1]$

ESERCIZI RIASSUNTIVI SULLE MATRICI

135 Verifica che l'espressione $X^2+5X+2I$ è nulla se $X=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ o se $X=\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

136 Date le matrici $A=\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} z & 1 \\ t & 3 \end{bmatrix}$ determina i valori di x, y, z e t in modo che $A \cdot B = C$.

$\left[x=0,\ y=\frac{1}{2},\ z=2,\ t=\frac{11}{2}\right]$

137 Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determina la matrice X che soddisfa la relazione $A \cdot X = B$.

$\left[X=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right]$

138 Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, determina la matrice X tale che $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$.

$\left[X=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right]$

139 Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 2 & h \\ -1 & k \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} k & -h \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, stabilisci se esiste un valore dei parametri h e k per i quali il prodotto $A \cdot B$ dà la matrice identica. $[h=1-2k]$

140 Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determina la matrice X per la quale è verificata la relazione $(A \cdot B)^{-1} \cdot X = A$.

$\left[X=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right]$

141 Stabilisci per quali valori del parametro reale h la matrice A è singolare

$$A=\begin{bmatrix} 3+h & -1 & 1 \\ 2 & 2+h & -2 \\ 2 & -1 & 1+h \end{bmatrix}$$ $[h=0 \ \vee \ h=-3]$

142 Determina per quali valori del parametro reale k la matrice P è invertibile

$$P=\begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 2k & 5 & k \\ 0 & 1 & k+2 \end{bmatrix}$$ $[k \neq 0]$

143 Determina per quali valori del parametro reale h la seguente matrice non è invertibile

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & h & 0 \\ h-2 & 0 & h \end{bmatrix}$$ $[h = 0 \ \vee \ h = 1]$

144 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ determina per quali valori di x e di y si verifica che $A \cdot B + B^{-1} = 0$ essendo 0 la matrice nulla di ordine 2. $[x = 0 \ \wedge \ y = 0]$

I SISTEMI LINEARI: LA RISOLUZIONE NEL CASO IN CUI $n = m$

RICORDA

Un sistema lineare in forma normale $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

può sempre essere scritto nella forma matriciale $A \cdot X = B$ dove

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Se $n = m$, e $\det A \neq 0$ la soluzione del sistema può essere trovata:

- con il metodo della matrice inversa: $X = A^{-1} \cdot B$
- con il metodo di Cramer: $x_i = \dfrac{\det D_i}{\det A}$

dove D_i rappresenta la matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sostituendo l'i-esima colonna con quella dei termini noti.

Un ulteriore metodo di risoluzione applica l'**algoritmo di Gauss** che utilizza il principio di riduzione.

Comprensione

145 Completa le seguenti proposizioni:

a. un sistema lineare è possibile se .... ed in questo caso le sue equazioni si dicono ....

b. un sistema lineare è impossibile se .... ed in questo caso le sue equazioni si dicono ....

c. un sistema lineare possibile è determinato se ...., indeterminato se ....

146 Scrivi in forma matriciale il sistema lineare: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ -3x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

147 Scrivi in forma normale il seguente sistema dato in forma matriciale: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

148 Barra vero o falso.

Dato il sistema di ordine n di equazione matriciale $A \cdot X = B$, allora:

a. se esiste A^{-1}, il sistema è determinato V F

b. se il sistema non è determinato, allora A è singolare V F

c. se il sistema è determinato, la sua soluzione è $B \cdot A^{-1}$ V F

d. se il sistema è determinato, la sua soluzione è $A^{-1} \cdot B$. V F

Applicazione

Il metodo della matrice inversa

Risolvi i seguenti sistemi lineari di n equazioni in n incognite con il metodo della matrice inversa.

149 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 3 \\ x_1 - 6x_2 = 5 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ ed è $\det A = -8$

La matrice inversa è $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

La matrice colonna soluzione del sistema è quindi data dal prodotto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

150 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} 12 \\ -4 \end{matrix}; \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}\right]$

151 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 15 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ 2 \end{bmatrix}\right]$

152 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 8x_1 + x_2 = 2 \\ 5x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{5}{13} \\ -\frac{14}{13} \end{bmatrix}\right]$

153 $\begin{cases} 15x_1 - x_2 = 3 \\ 8x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} \frac{5}{23} \\ \frac{6}{23} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{17}{20} \end{bmatrix}\right]$

154 $\begin{cases} x_1 - 8x_2 = 3x_1 + 1 \\ x_2 - 2x_1 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 - 2x_1 \\ 3 + 2x_1 = 3x_2 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} -\frac{19}{6} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{19}{15} \end{bmatrix}\right]$

(Suggerimento: prima di applicare il metodo dell'inversa, riscrivi il sistema in forma normale...)

155 $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 1 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 8 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 13 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right]$

156 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_3 = 2 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$

157 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 16x_3 = 0 \\ x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{95}{12} \\ \frac{17}{24} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix}\right]$

158 $\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 36 \\ 2x_1 - x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 6 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -6x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 19 \\ x_1 - 2x_2 = -\dfrac{3}{2} \\ 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right]$

159 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{3}x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 29 \\ 10x_1 + x_2 - 5x_3 = 39 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}\right]$

160 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -7 \\ -x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}\right]$

Il metodo di Cramer

Risolvi i seguenti sistemi lineari di n equazioni in n incognite applicando la regola di Cramer.

161 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice dei coefficienti e troviamo il suo determinante: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det A = -5$

Il sistema è determinato; calcoliamo i determinanti delle matrici D_1, D_2, D_3 :

$D_1 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det D_1 = -40$ $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ $\det D_2 = -15$ $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ $\det D_3 = -15$

Il sistema ha soluzione: $x_1 = \dfrac{-40}{-5} = 8$ $x_2 = \dfrac{-15}{-5} = 3$ $x_3 = \dfrac{-15}{-5} = 3$

162 $\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=1 \\ x_1+2x_2-x_3=4 \\ -2x_1-x_2+x_3=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1+x_3=1 \\ x_2+2x_3=1 \\ x_1-x_2=1 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$

163 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_1+x_2-x_3=4 \\ 4x_2+5x_3=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1-2x_2=-2 \\ x_1+4x_2-2x_3=4 \\ -x_1+3x_2+x_3=3 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$

164 $\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3=7 \\ -2x_1-4x_2-4x_3=-7 \\ 10x_1+8x_2+6x_3=17 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=9 \\ x_1+2x_2+2x_3=1 \\ -\frac{1}{2}x_1+x_3=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$

165 $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 4x_2+4x_3=-1 \\ x_1+x_3=-\frac{3}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1+2x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right]$

166 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-10 \\ -4x_2+x_3=25 \\ -3x_1+x_2+2x_3=11 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2-5x_3=-8 \\ x_1-\frac{1}{2}x_2+3x_3=7 \\ x_1-x_3=0 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right]$

167 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3-x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3=4 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=2 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=4 \end{cases}$$

Il sistema assegnato ha quattro equazioni e quattro incognite ed è in forma normale.
Prima di procedere nella risoluzione, cerchiamo di semplificare il sistema applicando il principio di riduzione ed eseguiamo le seguenti operazioni:

- sottraiamo la seconda equazione dalla prima
- sottraiamo la terza equazione dalla seconda
- riscriviamo la terza equazione
- sottraiamo la terza equazione dalla quarta

$$\begin{cases} 5x_2-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1=2 \end{cases}$$

Scriviamo ora la matrice dei coefficienti del sistema $A=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Per calcolare il suo determinante scegliamo la quarta riga, abbiamo allora che

$$\det A=-2\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=6$$

Calcoliamo adesso i determinanti delle matrici D_1, D_2, D_3, D_4.

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\det D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

$$\det D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Ricaviamo così che: $x_1 = \frac{6}{6} = 1 \qquad x_2 = \frac{0}{6} = 0 \qquad x_3 = \frac{12}{6} = 2 \qquad x_4 = \frac{6}{6} = 1$

168 $\begin{cases} -2x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - 6x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_4 = 5 \\ x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right]$

169 $\begin{cases} x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 10x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 25 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$

170 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 = -5 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 10 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 11 \\ 4x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = -10 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$

171 $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -15 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 27 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_2 + x_3 = -7 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ 5x_4 + 5x_5 = 16 \\ 5x_1 + 5x_5 = 6 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -6 \\ 9 \\ -\frac{29}{5} \end{bmatrix} \right]$

172 $\begin{cases} -x_1 + 2x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -11 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 3x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_2 - x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = -1 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{19}{22} \\ -\frac{16}{11} \\ -\frac{53}{22} \\ -\frac{5}{22} \\ \frac{2}{11} \end{bmatrix} \right]$

L'algoritmo di Gauss

Risolvi con il metodo di Gauss i seguenti sistemi.

173 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè la variabile x_1 ha coefficiente 1 nella seconda equazione, conviene scrivere tale equazione al primo posto ed eliminare x_1 dalle equazioni rimanenti. A tale scopo moltiplichiamola per 2.

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{sottraendo otteniamo} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 7x_2 + 3x_3 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per 3 e sottraiamo dalla terza

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 12 \\ 7x_2 + 3x_3 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{sottraendo otteniamo} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 7x_2 + 3x_3 = -7 \\ 11x_2 + 2x_3 = -11 \end{cases}$$

Poichè eliminare la variabile x_2 comporta un calcolo più complesso (dobbiamo moltiplicare la seconda equazione per 11 e la terza 7), decidiamo di eliminare la variabile x_3 moltiplicando la seconda equazione per 2 e la terza per 3

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 14x_2 + 6x_3 = -14 \\ 33x_2 + 6x_3 = -33 \end{cases} \quad \text{sottraendo otteniamo} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 7x_2 + 3x_3 = -7 \\ 19x_2 = -19 \end{cases}$$

da cui, dopo aver determinato il valore di x_2, possiamo ricavare la soluzione del sistema: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

174 $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_3 = 16 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right]$

175 $\begin{cases} 3x_2 - 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right]$

176 $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 = \frac{7}{2} \\ 4x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -15 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{53}{7} \\ \frac{9}{7} \end{bmatrix}\right]$

177 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 15 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -8 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right]$

178 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 - x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right]$

LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI: IL CASO GENERALE

RICORDA

- Il teorema di Rouché-Capelli dice che un sistema lineare è possibile se e solo se la matrice completa ha lo stesso rango della matrice incompleta.
- se un sistema di m equazioni in n incognite è possibile e $r(A) = h$, allora
  - se $h < n$ il sistema è indeterminato ed ammette ∞^{n-h} soluzioni
  - se $h = n$ il sistema è determinato ed ammette una sola soluzione.

Comprensione

179 Dato un sistema lineare di ordine 3, se il rango della matrice A dei coefficienti è 2, puoi concludere che il sistema è determinato? Come deve essere il rango di A affinché un sistema di ordine n sia determinato?

180 Dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite, spiega come si ottiene la matrice completa ed enuncia il teorema di Rouché-Capelli.

181 Descrivi la procedura che è opportuno seguire per risolvere un sistema lineare possibile di m equazioni in n incognite, specificando quando il sistema è determinato o indeterminato.

182 In un sistema lineare di m equazioni in n incognite, con $n < m$, la matrice incompleta ha rango n; il sistema allora è:
a. determinato **b.** indeterminato **c.** impossibile **d.** non è possibile dare una risposta.

183 In un sistema lineare di m equazioni in n incognite, con $n > m$, la matrice incompleta ha rango m; il sistema allora è:
a. determinato **b.** indeterminato **c.** impossibile **d.** non è possibile dare una risposta.

184 In un sistema lineare di m equazioni in n incognite, la matrice incompleta e quella completa hanno ranghi diversi; il sistema allora è:
a. determinato **b.** indeterminato **c.** impossibile **d.** non è possibile dare una risposta.

185 Dato il sistema $A \cdot X = B$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ quali delle seguenti matrici sostituiresti a B per ottenere un sistema possibile?

a. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Motiva la tua risposta.

186 Dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite, discuti il rango della matrice incompleta A e di quella completa C in ognuno dei seguenti casi:
a. $n < m$ ed il sistema è determinato **b.** $n < m$ ed il sistema è indeterminato
c. $n < m$ ed il sistema è impossibile **d.** $n > m$ ed il sistema è determinato
e. $n > m$ ed il sistema è indeterminato **f.** $n > m$ ed il sistema è impossibile.

187 Dato un sistema possibile di m equazioni in $m+1$ incognite ed indicata con A la matrice dei coefficienti, stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a. il sistema ammette almeno una soluzione se il rango di A è m; V F

b. il sistema è impossibile se il rango di A è m; V F

c. il sistema è determinato se il rango di A è m; V F

d. il sistema è impossibile qualunque sia il rango di A; V F

e. il sistema è indeterminato qualunque sia il rango di A. V F

Applicazione

Stabilisci, applicando il Teorema di Rouché-Capelli, se i seguenti sistemi sono possibili o impossibili, motivando la tua risposta.

188 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è di due equazioni in tre incognite. La matrice dei coefficienti

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango 2 perché, ad esempio, si ha $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Poiché la matrice completa del sistema $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ è di tipo 2×4,

il suo rango non può essere superiore a 2 e non potendo neppure essere inferiore a 2, perché A è una sua sottomatrice, concludiamo che anche il rango di C è 2.
Dunque, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette soluzioni, cioè è possibile.

189 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è di due equazioni in due incognite e si ha che:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad r(A) = ...$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad r(C) = ...$

Quindi, poichè le due matrici non hanno stesso rango, il sistema è ....

190 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ [impossibile; possibile]

191 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$ [possibile; possibile]

192 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$ [possibile; impossibile]

193 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ \dfrac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ [possibile; impossibile]

Stabilisci, applicando il teorema di Rouché-Capelli, se i seguenti sistemi sono determinati o indeterminati e, se sono indeterminati, calcola il numero delle soluzioni nella forma ∞^{n-h}.

194 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha tre equazioni e tre incognite. La matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 3 essendo $\det A \neq 0$;

dunque, poiché la matrice completa non può avere rango superiore, essendo C di tipo $(3, 4)$, né rango inferiore, poiché A è una sua sottomatrice, deduciamo che anche il rango di C è 3. Allora, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è possibile; inoltre, essendo il rango della matrice A uguale al numero delle incognite, il sistema è determinato.

195 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice dei coefficienti A, e quella completa C

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgendo opportunamente i calcoli trovi che $r(A) = r(C) = 2$; il sistema è quindi possibile. Inoltre, poichè il rango è minore del numero delle incognite, il sistema è .... ed essendo $n - h = 1$, ha ∞^1 soluzioni.

196 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_3 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ [determinato; ∞^1 soluzioni]

197 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 = 12x_3 - 12 \end{cases}$ [determinato; ∞^1 soluzioni]

198 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$ [determinato; determinato]

199 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 15 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$ [determinato; ∞^2 soluzioni]

Dopo aver stabilito se i seguenti sistemi sono possibili determina le loro soluzioni.

200 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è di quattro equazioni in tre incognite.

Individuiamo il rango della matrice A dei coefficienti.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il minore del second'ordine formato dalle prime due righe e colonne.

$\Psi_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ La matrice A ha almeno rango 2.

Stabiliamo, attraverso il teorema di Kronecker, se esiste un minore del terz'ordine diverso da zero. Orliamo Ψ_1 con la terza riga e la terza colonna di A.

$$\Psi_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Orliamo Ψ_1 con la quarta riga e la terza colonna di A $\Psi_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Non essendo possibile estrarre altri minori del terz'ordine, concludiamo che la matrice A ha rango 2.

Anche la matrice completa $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

ha lo stesso rango perché contiene lo stesso minore di A e tutti i possibili minori del terz'ordine non contenuti in A sono uguali a zero.
Infatti orlando Ψ_1 con la terza riga e la quarta colonna di C otteniamo:

$$\Psi_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

e ancora, orlando Ψ_1 con la quarta riga e la quarta colonna di C, otteniamo:

$$\Psi_5 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è possibile. Per determinare le sue soluzioni, poiché il minore diverso da zero è quello individuato dalle prime due colonne di A, relative alle variabili x_1 e x_2, sceglieremo x_3 come parametro. Dobbiamo quindi risolvere il sistema di due equazioni nelle due incognite x_1 e x_2.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 - x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 = 2 - 3x_3 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di Cramer; sappiamo già che $\det A = -1$, calcoliamo i determinanti delle matrici D_1 e D_2.

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_3 & 2 \\ 2 - 3x_3 & 3 \end{vmatrix} = -1 + 3x_3 \qquad \det D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 - x_3 \\ 5 & 2 - 3x_3 \end{vmatrix} = 1 - 4x_3$$

Da cui ricaviamo che il sistema ha come soluzione la terna

$$x_1 = \frac{-1 + 3x_3}{-1} = 1 - 3x_3 \qquad x_2 = \frac{1 - 4x_3}{-1} = -1 + 4x_3 \qquad x_3 = x_3$$

Esso ha quindi ∞^1 soluzioni.

201 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + 3x_2}{2} \\ x_2 = x_2 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 5x_3}{5} \\ x_2 = \dfrac{1 - 5x_3}{5} \\ x_3 = x_3 \end{cases} \right]$

202 $\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = -5 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 + 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 5 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \right]$

203 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -9 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Per evitare calcoli laboriosi, applica dapprima il metodo di riduzione cercando di eliminare la variabile x_1 dalle ultime tre equazioni; per esempio puoi scrivere il sistema equivalente

$\begin{cases} A \\ B - A \\ C - 5A \\ D - 2A \end{cases}$ ottenendo.........

Considera ora le ultime tre equazioni.....

$$\left[\begin{cases} x_1 = -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3}x_3 + x_4 \\ x_2 = \dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3}x_3 - 3x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \right]$$

204 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_3 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$ [impossibile; impossibile]

205 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{5}{3} + x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}\right]$

206 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = \frac{22}{5} \\ x_2 = \frac{8}{5} \\ x_3 = -\frac{4}{5} \end{cases}; \text{impossibile}\right]$

207 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 + x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 = 11 + x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{27}{4} \\ x_2 = \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8} \\ x_3 = x_3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 + 2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}\right]$

208 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 7 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 9x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = \frac{22}{7} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{27}{7} \\ x_4 = -\frac{3}{7} \end{cases}; \begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_4 + 7 \\ x_2 = \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 = \frac{4}{7}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}\right]$

APPROFONDIMENTI *I sistemi omogeni*

Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

209 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è di tre equazioni in tre incognite.
Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Poiché esso è diverso da zero, il sistema ammette una e una sola soluzione, cioè $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

210 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{11}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{11}x_4 \\ x_3 = \frac{2}{11}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}\right]$

211 $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = 5x_3 \\ x_2 = -7x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = \frac{1}{10}x_3 \\ x_2 = \frac{17}{10}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}\right]$

212 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}\right]$

213 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}\right]$

Per la verifica delle competenze

1 Discuti al variare del parametro reale h il rango della matrice $\begin{bmatrix} 2 & h-4 & 1 \\ 4h & -6 & h+1 \\ -2 & 2h+1 & -1 \end{bmatrix}$

[3 se $h \neq 1$; 1 se $h = 1$]

2 Verifica che, per ogni valore reale di h, il rango della matrice $\begin{bmatrix} 1+h & 1 & 2+h \\ 0 & 5 & 1+2h \\ h & -1 & 1 \end{bmatrix}$ è maggiore o uguale a 2.

3 Una ditta ha due stabilimenti O_1 e O_2 che fabbricano tre prodotti P_1, P_2, P_3. Supponiamo di poter esprimere in unità convenzionali uniformi le produzioni di ciascun prodotto per ognuno dei due stabilimenti e che esse siano 30 unità di P_1, 25 unità di P_2 e 18 unità di P_3 per O_1, 24 unità di P_1, 40 unità di P_2 e 10 unità di P_3 per O_2, nel mese di Gennaio; 26 unità di P_1, 20 unità di P_2, 24 unità di P_3 per O_1, 23 unità di P_1, 36 unità di P_2, 12 unità di P_3 per O_2, nel mese di Febbraio.
Come si può rappresentare globalmente la produzione della ditta in ciascuno dei due mesi? E la produzione complessiva nei mesi di Gennaio e Febbraio?

4 Carlo e Marco partecipano ad una selezione per entrare in una squadra di calcio. Gli aspiranti vengono sottoposti a tre batterie di test attitudinali T_1, T_2, T_3.
Carlo ha superato positivamente 10 prove di T_1, 18 di T_2, 12 di T_3.
Marco ha superato positivamente 15 prove di T_1, 12 di T_2, 10 di T_3.
Ogni prova superata di T_1 è valutata 15 punti, ogni prova superata di T_2 è valutata 18 punti, ogni prova superata di T_3 è valutata 20 punti. Esprimi i dati del problema mediante due opportune matrici e calcolane il prodotto. Qual è il significato degli elementi ottenuti nella matrice prodotto?

5 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & z \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} t & 1 \\ t & 3 \end{bmatrix}$
determina x, y, z, t in modo che sia vera la relazione $A \cdot B = C$. $\left[x = -\frac{7}{6}; y = -\frac{11}{6}; z = \frac{10}{3}; t = -\frac{3}{2}\right]$

6 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ x & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ y & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} t & 2 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

determina per quali valori dei parametri x, y, t, k vale la relazione $A \cdot B + C = D$.

$[x = 3;\ y = 1;\ t = -2;\ k = 4]$

7 Determina la condizione necessaria e sufficiente, con h e k parametri reali, che rende incompatibili le seguenti equazioni: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 - 2x_3 = h \\ x_1 + 2x_3 = k \end{cases}$ $[h + k \neq 5]$

8 Determina la condizione necessaria e sufficiente, con h, k, ℓ parametri reali, per l'esistenza di almeno una soluzione del seguente sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = h \\ 4x_1 - x_3 = k \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 = \ell \end{cases}$ $[3h - k + \ell = 0]$

9 Per quali valori del parametro reale a il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

a. non ha alcuna soluzione; $[a = -3]$
b. ha più di una soluzione; $[a = 2]$
c. ha una e una sola soluzione. $[a \neq 2 \ \wedge\ a \neq -3]$

10 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, verifica che è invertibile e risolvi il sistema $A^{-1} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$\left[X = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}\right]$

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **a.** A, D; **b.** 2×3; **c.** riga; **d.** solo A	**2** **a.** triangolare, **b.** diagonale, **c.** nulla	**3** **d.**
4 **a.** ②; **b.** ③	**5** **a.** ①; **b.** ③	**6** **a.** F, **b.** V, **c.** F
7 **a.** F, **b.** V, **c.** V	**67** **a.** F, **b.** V, **c.** F, **d.** F	**69** **a.** F, **b.** F, **c.** V
70 **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** F	**71** **a.**, **c.**, **d.**, **e.**	**72** **a.** $-k$; **b.** k; **c.** $3k$; **d.** $2^n k$
73 **a.**, **c.**	**74** **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** V	**106** **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** V
107 **d.**	**108** **d.**	**114** **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** V
117 **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** V	**118** **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** V	**148** **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** V
179 no; $r(A) = n$	**182** **b.**	**183** **d.**
184 **c.**	**185** **a.**, **e.**	**187** **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** F, **e.** V

Test finale di autovalutazione

1 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a-2 & 4 \\ -1 & 0 & 2b & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & b-1 & 2 \\ 3 & 0 & a & a+2 \end{bmatrix}$ stabilisci se esistono valori di a e di b in modo che sia $A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

8 punti

2 Barra vero o falso.

a. Se una matrice ha due colonne proporzionali il suo determinante è nullo. V F

b. Se il determinante di una matrice è nullo allora una delle sue righe è necessariamente combinazione lineare delle altre. V F

c. Se si scambiano fra loro due righe e due colonne di una matrice il suo determinante non cambia. V F

d. Il determinante di una matrice diagonale è dato dal prodotto dei termini che appartengono alla diagonale principale. V F

e. Se una matrice è singolare non esiste la sua inversa. V F

f. $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. V F

3 punti

3 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & -2k & k+1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ stabilisci per quali valori del parametro k si verificano le seguenti condizioni:

a. la matrice A è singolare

b. $\det A = 1$.

10 punti

4 Barra vero o falso.

a. Una matrice di tipo $(3, 5)$ non può avere rango maggiore di 3. V F

b. Una matrice quadrata di ordine 6 ha rango 6. V F

c. Una matrice non nulla di tipo $(2, 4)$ che ha due righe proporzionali ha rango 1. V F

d. Se in una matrice quadrata di ordine 5 esiste un minore non nullo di ordine 3, si può concludere che la matrice ha rango 3. V F

2 punti

5 Calcola il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

12 punti

6 Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & k \\ 0 & -3 & k+1 & 2 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ stabilisci se esiste un valore di k per il quale il rango di A è uguale a 2.

6 punti

7 Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.

E' dato un sistema di m equazioni in n incognite $A \cdot X = B$. Dal teorema di Rouchè-Capelli si deduce che:

a. se $n = m$ e se $\det A \neq 0$ il sistema è possibile V F

b. se $n > m$ e se il rango della matrice A è m allora il sistema è possibile V F

c. se $n < m$ e se il rango della matrice completa $[A \mid B]$ è m allora il sistema è possibile. V F

2 punti

8 Dopo aver individuato la matrice dei coefficienti, risolvi il seguente sistema applicando il metodo della matrice inversa:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{6} \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

8 punti

9 Dopo aver individuato la matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti, risolvi il seguente sistema applicando il metodo di Cramer:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4 \end{cases}$$

8 punti

10 Risolvi il seguente sistema applicando il metodo di Gauss $\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

8 punti

11 Individua fra i seguenti sistemi quelli possibili e trova le loro soluzioni:

a. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$

15 punti

12 Stabilisci per quali valori del parametro reale b il sistema $A \cdot X = B$, è possibile con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{bmatrix}$$

8 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Totale
Punteggio													

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 $a = -2 \ \wedge \ b = 5$

2 **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** V, **e.** V, **f.** V

3 **a.** $k = -1 \ \vee \ k = 2$, **b.** $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4 **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** F

5 $r(A) = 3$, $r(B) = 1$, $r(C) = 2$

6 $r(A) = 3 \quad \forall k \in R$

7 **a.** V, **b.** V, **c.** F

8 $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$

9 $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$

10 $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$

11 **a.** impossibile, **b.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, **c.** $x_1 = 1 - 3x_2$, $x_2 = x_2$

12 $b = 0 \ \vee \ b = 1$