La velocità di variazione

Obiettivi

- studiare la rapidità di crescita o decrescita di una funzione

1. La velocità di variazione di una funzione

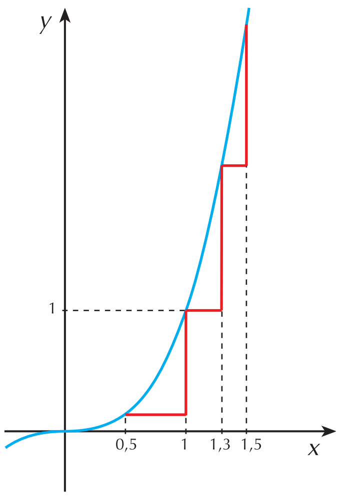
In un giornale specializzato si legge che la Ferrari 575 Maranello passa da 0 a 100km/h in 4,2 secondi, mentre la nuova Porsche 911 passa da 0 a 100 km/h in 4,8 secondi. Il significato di quanto letto è che, poiché 100km/h corrispondono a circa 27,8m/s, la Ferrari ha una accelerazione di $\frac{27{,}8}{4{,}2} = 6{,}6\text{m/s}^2$, la Porsche ha una accelerazione di $\frac{27{,}8}{4{,}8} = 5{,}8\text{m/s}^2$; questo significa che la Ferrari registra una maggiore rapidità nel variare la sua velocità in fase di accelerazione.

Il concetto di *velocità di variazione* è molto importante nello studio di diversi fenomeni che si possono descrivere tramite delle funzioni; esso verrà ripreso e approfondito all'ultimo anno di corso introducendo il concetto di *derivata*. Per ora cerchiamo di comprenderne il significato analizzando il seguente esempio.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3$ e troviamo i valori da essa assunti in corrispondenza di alcuni valori di x:

x	0,5	1	1,3	1,5
$f(x)$	0,125	1	2,197	3,375

Figura 1



Ci chiediamo in quali intervalli essa ha una rapidità di crescita più elevata.
Se osserviamo con attenzione il suo grafico (***figura 1***) siamo portati a dire che la curva cresce in modo sempre più rapido man mano che la variabile x cresce; per dare però una indicazione di quanto più rapida sia questa crescita, è necessario valutare di quanto aumenta la variabile y rispetto all'aumento della variabile x:

- nell'intervallo in cui x passa da 0,5 a 1:

$$f(1) - f(0{,}5) = 0{,}875 \quad \rightarrow \quad \frac{f(1) - f(0{,}5)}{1 - 0{,}5} = \frac{0{,}875}{0{,}5} = 1{,}75$$

- nell'intervallo in cui x passa da 1 a 1,3:

$$f(1{,}3) - f(1) = 1{,}197 \quad \rightarrow \quad \frac{f(1{,}3) - f(1)}{1{,}3 - 1} = \frac{1{,}197}{0{,}3} = 3{,}99$$

- nell'intervallo in cui x passa da 1,3 a 1,5:

$$f(1{,}5) - f(1{,}3) = 1{,}178 \quad \rightarrow \quad \frac{f(1{,}5) - f(1{,}3)}{1{,}5 - 1{,}3} = \frac{1{,}178}{0{,}2} = 5{,}89$$

Valutare solo l'incremento subito dalla variabile y porta in generale a degli errori di valutazione: nell'esempio la y subisce un incremento minore nel terzo intervallo rispetto al secondo, ma la sua rapidità di crescita è maggiore perché valutata su un incremento più piccolo della variabile x.

Possiamo concludere che nel terzo intervallo la rapidità di crescita è decisamente maggiore rispetto agli altri due pur essendo l'intervallo di crescita della x più piccolo.
Tutti i problemi nei quali di deve valutare la rapidità con cui una funzione cresce o decresce si possono schematizzare così:

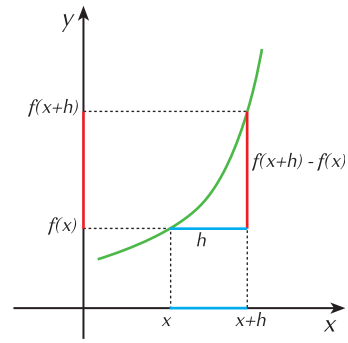
La formulazione del problema

Consideriamo una funzione $f(x)$, un suo punto di ascissa x e il suo punto di ascissa $x+h$ (***figura 2***); il segmento di lunghezza h rappresenta quindi l'incremento Δx subito dalla variabile x nel passaggio da x a $x+h$.
In corrispondenza, sull'asse y, la funzione f passa dal valore $f(x)$ al valore $f(x+h)$ subendo un incremento Δy uguale a $f(x+h)-f(x)$.
Il rapporto tra i due incrementi, rispettivamente sull'asse y e sull'asse x, cioè l'espressione

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

rappresenta la **velocità media o tasso medio di variazione** della $f(x)$ nel passaggio dal punto x al punto $x+h$.

Figura 2



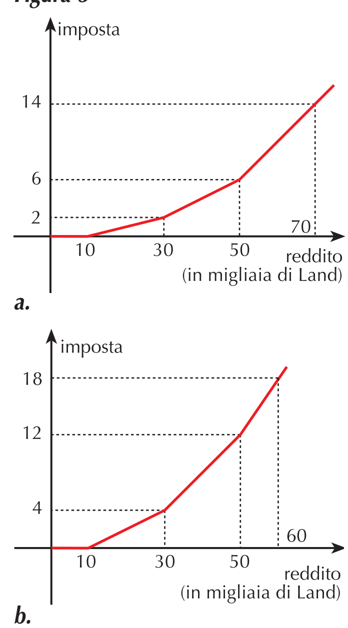
Più piccolo è l'incremento h, più il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si avvicina alla velocità di variazione istantanea.
Dal punto di vista geometrico, tale rapporto rappresenta la pendenza media della curva grafico di $f(x)$.
Tra le curve che conosciamo, la retta (non parallela all'asse y) è quella che ha una velocità di variazione costante; infatti il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ corrisponde al coefficiente angolare.
Vediamo alcuni esempi di applicazione di questo concetto a fenomeni reali.

I esempio

Il metodo di tassazione dipende dal reddito; a Fisilandia, dove la moneta corrente è il Land, si è deciso di seguire la tassazione rappresentata in ***figura 3a***, mentre nel vicino Paese di Matlandia, che ha la stessa moneta, il grafico della tassazione è rappresentato in ***figura 3b***.
I due grafici si devono interpretare come segue:

- fino a 10 000 Land di reddito non si paga nulla in entrambi i Paesi
- da 10 000 a 30 000 Land, sulla parte eccedente i 10 000, cioè su 20 000 Land, si paga un'imposta che è proporzionale al reddito (il grafico è un tratto di retta) e che raggiunge i 2 000 Land a Fisilandia e i 4 000 Land a Matlandia per un reddito di 30 000 Land
- da 30 000 a 50 000 Land accade una cosa analoga alla fascia precedente e si arriva a pagare, per un reddito di 50 000 Land, 6 000 Land a Fisilandia e 12 000 Land a Matlandia
- la tassazione cresce ulteriormente oltre i 50 000 Land in entrambi i Paesi.

Figura 3



E' evidente che a Matlandia la tassazione è maggiore che a Fisilandia (per questo c'è una fuga dal primo paese verso il secondo!) e possiamo evidenziare in una tabella le percentuali di tassazione per ogni fascia, che calcoliamo in questo modo (i valori sono in migliaia di Land):

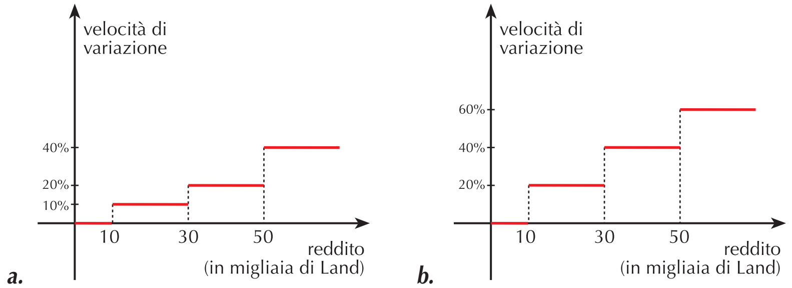
$$\frac{\text{differenza tra due valori sull'asse } y}{\text{differenza tra i due corrispondenti valori sull'asse } x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

	Δy	Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	%
fino a 10 000 Land	0	10	0	0%
da 10 000 a 30 000 Land	2	20	$\frac{2}{20}$	10%
da 30 000 a 50 000 Land	4	20	$\frac{4}{20}$	20%
oltre 50 000 Land	8	20	$\frac{8}{20}$	40%

	Δy	Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	%
fino a 10 000 Land	0	10	0	0%
da 10 000 a 30 000 Land	4	20	$\frac{4}{20}$	20%
da 30 000 a 50 000 Land	8	20	$\frac{8}{20}$	40%
oltre 50 000 Land	6	10	$\frac{6}{10}$	60%

I valori ottenuti nell'ultima colonna rappresentano la *velocità di variazione percentuale* della tassazione all'aumentare del reddito; possiamo riportare questi dati in un grafico come nella ***figura 4*** che segue, dove vediamo, in entrambi i casi, una funzione che è costante a tratti.

Figura 4



II esempio

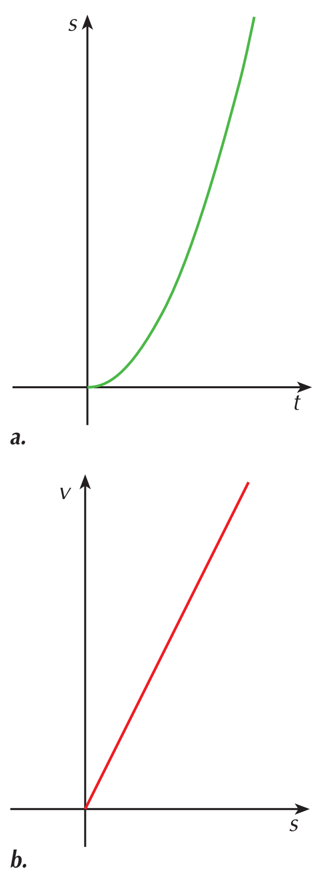
Consideriamo il moto uniformenente accelerato di un punto materiale su una traiettoria rettilinea; dovresti sapere dalla Fisica che il grafico spazio-tempo di una situazione di questo tipo è rappresentato da un arco di parabola come quello in ***figura 5a***, dove supponiamo che l'equazione del moto sia data da $s = t^2$.

In questo tipo di moto, la velocità del punto materiale aumenta proporzionalmente al tempo trascorso, in particolare, essendo $v = 2t$, aumenta di 2 metri al secondo ad ogni secondo che passa. Il tasso di variazione della curva che rappresenta il moto è quindi rappresentato graficamente da una retta (***figura 5b***).

III esempio

Molto più complicato è valutare la velocità di variazione di fenomeni regolati da leggi più complesse, come nel caso che segue.

Figura 5



I silos e i serbatoi di acqua degli acquedotti sono di solito a forma di tronco di cono rovesciato (***figura 6***); il livello dell'acqua che vi viene pompata dalle falde acquifere aumenta prima abbastanza in fretta, poi sempre più lentamente perché il serbatoio si allarga. Vogliamo valutare la misura dell'altezza raggiunta dall'acqua man mano che il serbatoio viene riempito.

Per semplificare il calcolo supponiamo che il serbatoio, anziché un tronco di cono, abbia la forma di un cono rovesciato di raggio r e altezza h e introduciamo in esso un volume V di acqua che riempie il serbatoio per una altezza y (***figura 7***). Per la similitudine dei triangoli ABC e ADE, si ha che:

$$r : h = x : y \qquad \text{cioè} \qquad x = \frac{ry}{h}$$

Il volume V di acqua introdotta è quindi: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$

cioè, tenendo conto del valore di x $\quad V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{ry}{h}\right)^2 y = \frac{1}{3}\pi\,\frac{r^2y^3}{h^2}$

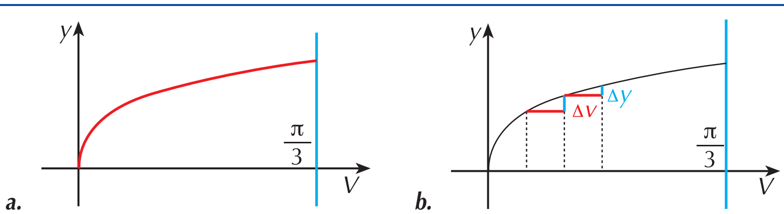
Da questa relazione possiamo ricavare l'espressione dell'altezza y raggiunta dall'acqua in funzione del volume V:

$$y = f(V) \qquad \rightarrow \qquad y = \sqrt[3]{\frac{3Vh^2}{\pi r^2}}$$

Per $h = 1$ e $r = 1$ l'equazione diventa $y = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$ e il suo grafico è in ***figura 8a***; osserviamo che per questi valori di r e di h il volume V varia da 0 a $\frac{\pi}{3}$.

Valutare quanto rapidamente varia la funzione $f(V)$, cioè l'altezza dell'acqua, è in questo caso molto più complicato; dovremmo versare man mano piccole quantità di acqua nel serbatoio e vedere ogni volta di quanto si è innalzato il livello. Sul diagramma cartesiano (vedi la ***figura 8b***) questo equivale a dividere l'asse delle ascisse (dove è rappresentato il volume di acqua man mano versato) in intervalli molto piccoli, valutare sull'asse delle ordinate (dove è rappresentata l'altezza raggiunta dall'acqua nel serbatoio) i corrispondenti valori dell'altezza e poi calcolare per ogni coppia di intervalli ΔV, Δy il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta V}$; questo rapporto rappresenta la velocità media di variazione della funzione $f(V)$ relativamente a ciascuno di quegli intervalli.

Figura 8



Considerando dei ΔV sempre più piccoli, la velocità media tende ad avvicinarsi alla velocità di variazione istantanea e questi valori si possono rappresentare in un diagramma cartesiano. Il risultato di questo lavoro è visibile in ***figura 9*** dove la curva disegnata rappresenta la velocità di variazione dell'altezza raggiunta dall'acqua nel serbatoio istante per istante, cioè la velocità di variazione della funzione $f(V)$. Dal grafico deduciamo, come era del resto prevedibile, che inizialmente si ha una elevata velocità di crescita dell'altezza e che questa man mano diminuisce.

Figura 6

Figura 7

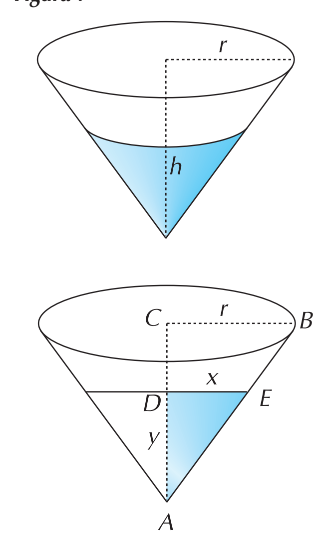
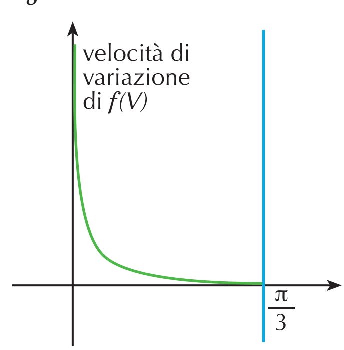


Figura 9



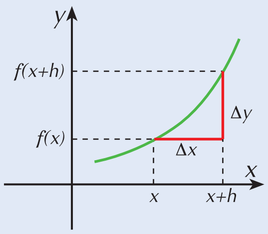
La velocità di variazione

LA VELOCITÀ DI VARIAZIONE DI UNA FUNZIONE

RICORDA

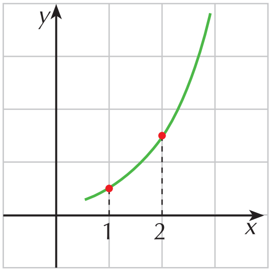
- Si definisce velocità media di variazione o anche tasso medio di variazione di una funzione $f(x)$ il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

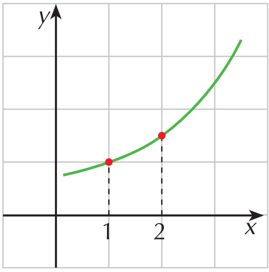


Comprensione

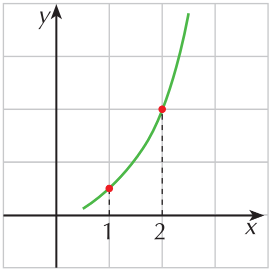
1 Delle funzioni rappresentate nei seguenti grafici, quale ha una velocità di variazione maggiore nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$?



a.



b.



c.

2 Delle due funzioni $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ si può dire che:

a. $f(x)$ ha un tasso di variazione costante V F

b. $f(x)$ ha un tasso di variazione più grande di $g(x)$ se $1 \leq x \leq 2$ V F

c. $f(x)$ ha un tasso di variazione più piccolo di $g(x)$ se $0 \leq x \leq 1$ V F

Applicazione

Calcola il tasso medio di variazione delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato.

3 **a.** $y = x^4 - 1$ $\quad 1 \leq x \leq 2$ **b.** $y = -3x^2 + 1$ $\quad 1 \leq x \leq 3$

4 **a.** $y = -x^3 + 4$ $\quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ **b.** $y = 2x^3 + x^2 - 8$ $\quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$

5 **a.** $y = 3x^3 - 2x^2 + 1$ $\quad -2 \le x \le 2$ $\qquad$ **b.** $y = -x^3 + x^2 + 4x - 2$ $\quad \frac{1}{2} \le x \le 1$

6 **a.** $y = 3x^4 + x^2 + 1$ $\quad 1 \le x \le 2$ $\qquad$ **b.** $y = x^4 - 3x^3 - 2$ $\quad -1 \le x \le -\frac{1}{2}$

7 **a.** $y = x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$ $\quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ $\qquad$ **b.** $y = 3x^3 - x^2 + 1$ $\quad \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}$

Stabilisci quale delle due funzioni ha una velocità media di variazione maggiore nell'intervallo indicato.

8 $f(x) = 2x^2 - 2$ e $g(x) = 3x^2 - 4$ nell'intervallo $\frac{1}{3} \le x \le 1$ [g]

9 $f(x) = -3x^2 + 4$ e $g(x) = -x^2 + 7$ nell'intervallo $1 \le x \le 3$ [f]

10 $f(x) = 4x^3 + x^2$ e $g(x) = 3x^3 - x^2 - 1$ nell'intervallo $-1 \le x \le 0$ [g]

11 $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 2$ e $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$ nell'intervallo $\frac{1}{2} \le x \le 1$ [g]

12 **ESERCIZIO GUIDA**

Se si aumenta di $\frac{1}{10}$ il lato ℓ di un quadrato, di quanto aumenta la sua area? Qual è in questo caso la velocità di variazione dell'area in rapporto a questo aumento?
Che cosa succede se il lato viene aumentato di $\frac{1}{100}$ e di $\frac{1}{1000}$? Verso quale valore tende la velocità di variazione dell'area al diminuire dell'incremento del lato?

Aumentando il lato di $\frac{1}{10}$ si ottiene un quadrato di lato $\frac{11}{10}\ell$ e la sua area è $\frac{121}{100}\ell^2$.

La velocità di variazione è il rapporto $\dfrac{\frac{121}{100}\ell^2 - \ell^2}{\frac{1}{10}\ell} = 2{,}1\ell$

Aumentando di $\frac{1}{100}$ e ripetendo il calcolo otteniamo: $\dfrac{\left(\frac{101}{100}\ell\right)^2 - \ell^2}{\frac{1}{100}\ell} = 2{,}01\ell$

Aumentando di $\frac{1}{1000}$ si ottiene: $\dfrac{\left(\frac{1001}{1000}\ell\right)^2 - \ell^2}{\frac{1}{1000}\ell} = 2{,}001\ell$

Il valore a cui sembra avvicinarsi la velocità di variazione al diminuire dell'incremento è 2ℓ.

13 Ripeti lo stesso esercizio considerando un cubo di lato ℓ e aumentando il lato di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$? Verso quale valore tende la velocità di variazione del volume al diminuire dell'incremento del lato? [$3\ell^2$]

14 Un triangolo di base b ha l'area di 20cm^2; esprimi la sua altezza in funzione della base. Se si aumenta di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ la lunghezza della base, come varia la sua altezza? Qual è la velocità di variazione dell'altezza in rapporto alla variazione della base nei tre casi? Da che cosa dipende?

$\left[h = \frac{40}{b}\text{; velocità di variazione: } \frac{400}{11b^2}, \frac{4000}{101b^2}, \frac{40000}{1001b^2}\right]$

15 Un cilindro di altezza h ha il volume di $1\,m^3$; esprimi il suo raggio in funzione dell'altezza. Calcola poi la velocità di variazione del raggio in rapporto alla variazione dell'altezza facendola aumentare, come nei casi precedenti di $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$.

$\left[r = \sqrt{\frac{1}{\pi h}}\text{; velocità di variazione: } \frac{1}{h}\sqrt{\frac{10}{11\pi h}}, \frac{1}{h}\sqrt{\frac{100}{101\pi h}}, \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1000}{1001\pi h}}\right]$

16 In laboratorio di Fisica si sta conducendo un esperimento sul moto accelerato; un piccolo carrello, che si sta muovendo con velocità costante di 2m/s su un binario ad aria compressa, viene frenato da una forza costante. Il computer collegato con il sistema rileva la posizione del carrello ogni mezzo secondo a partire da quando viene applicata la forza frenante; nella tabella che segue sono indicati il tempo t in secondi sull'asse delle ascisse, lo spazio s in metri percorso dal carrello sull'asse delle ordinate.

t (in secondi)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
s (in metri)	0	0,95	1,80	2,55	3,20	3,75	4,20	4,55	4,80	4,95	5,00

a. Rappresenta graficamente questi dati e valuta il valore della decelerazione se, trascorsi 5 secondi, il carrello si ferma.
b. Ricorrendo al concetto di velocità di variazione, calcola la velocità media del carrello in ogni tratto e costruisci il relativo grafico.
c. Considerando il grafico ottenuto al precedente punto **b.**, calcola la velocità di variazione della velocità del carrello e verifica che essa è pressocché costante. Che cosa esprime tale costante?

Questo stesso problema può essere risolto utilizzando le formule del moto uniformemente accelerato (in questo caso con accelerazione negativa); verifica che, a meno di errori di approssimazione, i risultati ottenuti coincidono.

Soluzioni esercizi di comprensione.

1 **c.** **2** **a.** V, **b.** V, **c.** F