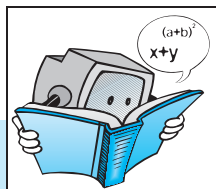


INTRODUZIONE ALLA LOGICA

2



Per ricordare

★ Chiamiamo **proposizione logica** o **enunciato** una frase per la quale è possibile dire, senza possibilità di equivoco, se è vera o se è falsa. Gli enunciati si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto. In un enunciato distinguiamo un predicato, il verbo della proposizione, e gli argomenti che il predicato stesso mette in relazione:



Chiamiamo **atomiche** le proposizioni con un solo predicato, **molecolari** le proposizioni con più predicati. Le proposizioni molecolari sono il risultato di operazioni logiche sugli enunciati atomici.

★ Le operazioni logiche che si possono eseguire sugli enunciati si realizzano mediante degli operatori chiamati **connettivi logici**.

Esse sono:

- la **negazione**: usa il connettivo **non** (il simbolo logico è una linea sopra la lettera che indica la proposizione), opera su una sola proposizione e ne muta il valore di verità
- la **coniunzione**: usa il connettivo **e** (oppure il latino **et**) (simbolo logico: \wedge), opera fra due proposizioni a e b e dà come risultato una proposizione vera solo se sono vere entrambe le proposizioni atomiche a e b
- la **disgiunzione inclusiva**: usa il connettivo **o** (oppure il latino **vel**) (simbolo logico: \vee), opera fra due proposizioni a e b e dà come risultato una proposizione falsa soltanto se sono false entrambe le proposizioni atomiche a e b
- la **disgiunzione esclusiva**: usa ancora il connettivo **o** (oppure il latino **aut**) (simbolo logico: \vee), opera fra due proposizioni a e b e dà come risultato una proposizione falsa se le proposizioni atomiche a e b sono entrambe vere o entrambe false
- l'**implicazione materiale**: usa il connettivo **se...allora** (simbolo logico: \rightarrow), opera fra due proposizioni a e b e dà come risultato una proposizione falsa soltanto se il primo termine (la premessa) è vero ed il secondo (la conseguenza) è falso
- la **coimplicazione materiale**: usa il connettivo **se e solo se** (simbolo logico: \leftrightarrow), opera fra due proposizioni a e b e dà come risultato una proposizione vera se le proposizioni a e b sono entrambe vere o entrambe false.

Le operazioni logiche si rappresentano mediante tavole di verità che indicano il valore di verità della proposizione molecolare al variare dei valori di verità delle proposizioni che la compongono; le tavole di verità delle operazioni logiche sono le seguenti:

negazione:

a	\bar{a}
V	F
F	V

a	b	coniunzione: $a \wedge b$	disgiunzione inclusiva: $a \vee b$	disgiunzione esclusiva: $a \dot{\vee} b$	implicazione: $a \rightarrow b$	coimplicazione: $a \leftrightarrow b$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

★ Un'espressione logica è un'espressione che ha come termini le proposizioni e come simboli di operazione i connettivi logici. Due espressioni logiche che hanno la stessa tavola di verità si dicono **equivalenti**.

Quando un'espressione logica è sempre vera al variare del valore di verità delle proposizioni che la compongono, si dice che è una **tautologia**; quando è sempre falsa si dice che è una **contraddizione**. Se un'implicazione materiale è una tautologia, si parla di **implicazione logica**; se una coimplicazione materiale è una tautologia, si parla di **coimplicazione logica**.

Il fatto che la proposizione $a \rightarrow b$ sia un'implicazione logica si esprime con il simbolo $a \Rightarrow b$ che si può leggere in uno dei seguenti modi:

- a implica logicamente b
- a è condizione sufficiente per b
- b è condizione necessaria per a .

Il fatto che la proposizione $a \leftrightarrow b$ sia una coimplicazione logica si esprime con il simbolo $a \Leftrightarrow b$ che si può leggere in uno dei seguenti modi:

- a coimplica logicamente b
- a è condizione necessaria e sufficiente per b
- b è condizione necessaria e sufficiente per a .

★ Un **enunciato aperto** è una frase composta da un predicato e da uno o più argomenti che sono variabili:

$\underbrace{x}_{\text{argomento variabile}} \quad \underbrace{\text{è un numero pari}}_{\text{predicato}}$

$\underbrace{x}_{\text{primo argomento variabile}} \quad \underbrace{\text{è multiplo di}}_{\text{predicato}} \quad \underbrace{y}_{\text{secondo argomento variabile}}$

Un enunciato aperto si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto con indicato fra parentesi il nome della o delle variabili: $p(x)$, $p(x,y)$ e così via.

In generale, di un enunciato aperto non si può dire se è vero o se è falso, quindi non è una proposizione logica; esso tuttavia lo diventa quando alle variabili si attribuiscono particolari valori.

L'insieme dei valori che possono assumere le variabili in modo che l'enunciato aperto diventi una proposizione logica si chiama **dominio** dell'enunciato aperto. L'insieme dei valori del dominio che fanno diventare l'enunciato aperto una proposizione vera si chiama **insieme di verità** dell'enunciato.

Per esempio: $p(x)$: « x è un numero pari» ha come dominio l'insieme N ; $p(4)$: «4 è un numero pari» è V, $p(5)$: «5 è un numero pari» è F; l'insieme di verità è quello dei numeri pari.



Negli enunciati aperti si fa spesso uso dei quantificatori:

- il **quantificatore universale**, simbolo logico \forall (per ogni) seguito dal nome di una variabile, che esprime il fatto che una proprietà è vera per tutti gli elementi dell'insieme a cui appartiene la variabile
- il **quantificatore esistenziale**, simbolo logico \exists (esiste) seguito dal nome di una variabile, che esprime il fatto che una proprietà è vera per almeno un elemento dell'insieme a cui appartiene la variabile.

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

1 Indica quali fra le seguenti sono proposizioni logiche:

- Domani devo alzarmi presto.
- Tu non ascolti quello che dico.
- Il conto del ristorante è troppo elevato.
- Ci sono solo quattro numeri primi di una sola cifra.
- Giulia ha copiato i compiti da Federica.
- Nell'universo esistono altre forme di vita oltre alla nostra.

[a., d., e.]

2 Date le proposizioni:

a : «3 è primo»; b : «3 divide 6»; c : «3 divide 5»

costruisci $(a \vee c) \wedge b$ e valutane il valore di verità. [3 è primo oppure divide 5 ed è divisore di 6, V]

3 Date le proposizioni p : «9 è un numero dispari» e q : «9 è multiplo di 3», scrivi le proposizioni $p \wedge q$ e $p \wedge \bar{q}$ e determina il loro valore di verità.

[9 è dispari ed è multiplo di 3: V, 9 è dispari e non è multiplo di 3: F]

4 Date le proposizioni:

a : «4 è primo»; b : «4 divide 6»; c : «4 > 2»

costruisci $a \vee (c \wedge b)$ e valutane il valore di verità.

[4 è primo oppure è insieme divisore di 6 e maggiore di 2; F]

5 Sono date le proposizioni a, b, c , di cui si sa che a e c sono vere mentre b è falsa. Valuta:

a. $a \vee b \vee \bar{c}$ b. $a \wedge (b \vee c)$ c. $(a \vee \bar{b}) \wedge c$ d. $a \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})$ [V; V; V; F]

6 Sono date le proposizioni a, b, c, d , di cui si sa che a e c sono vere mentre b e d sono false. Valuta:

a. $(a \vee b) \rightarrow (b \wedge d)$ b. $[a \wedge (b \vee d)] \vee [\bar{a} \vee (\bar{b} \wedge a)]$
 c. $(a \vee \bar{b}) \rightarrow [c \wedge \overline{(a \wedge b)}]$ d. $[\overline{(a \wedge b)} \vee (b \wedge \bar{d})] \rightarrow (b \vee d)$ [F; V; V; F]

7 Date le proposizioni logiche a : «Lucia suona la chitarra» (V), b : «Maria suona il piano» (F), c : «Fabio non sa suonare strumenti» (V), traduci in simboli le seguenti proposizioni e valutane il valore di verità:

- Lucia suona la chitarra, Maria suona il pianoforte, ma Fabio non sa suonare strumenti.

b. Se Fabio non sa suonare strumenti, allora nè Maria sa suonare il piano, nè Lucia sa suonare la chitarra.

c. Quando Fabio suona uno strumento, Maria suona il piano o Lucia la chitarra.

$$[a. a \wedge b \wedge c : F; b. c \rightarrow (\bar{a} \wedge \bar{b}) : F; c. \bar{c} \rightarrow (a \vee b) : V]$$

8 Date le proposizioni a : «2 è un numero primo», b : «5 è un numero dispari», c : «12 è pari e non è primo» traduci nel linguaggio corrente le seguenti proposizioni e determinane il valore di verità:

$$a. (a \wedge b) \rightarrow c \quad b. c \rightarrow (a \wedge \bar{b}) \quad c. \overline{(c \vee b)} \rightarrow (a \wedge b) \quad [V, F, V]$$

9 Considera le proposizioni p : «Oggi è domenica», q : «Oggi è festa». Quando le seguenti proposizioni sono vere?

$$a. p \vee q \quad b. p \rightarrow q \quad c. q \rightarrow p \quad d. \bar{p}$$

[la domenica e i giorni festivi; sempre; la domenica e i giorni non festivi; tutti i giorni della settimana tranne la domenica]

Date le seguenti proposizioni costruiscine la tabella di verità.

10 a. $\overline{a \wedge b}$

b. $b \rightarrow \bar{a}$

a	b	$\overline{a \wedge b}$	$(b \rightarrow \bar{a})$
V	V	F	F
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	V	V

11 a. $\overline{[(c \vee b) \wedge a]}$

b. $(a \wedge b) \vee [b \vee (c \rightarrow a)]$

a	b	c	$\overline{[(c \vee b) \wedge a]}$	$(a \wedge b) \vee [b \vee (c \rightarrow a)]$
V	V	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	F	V	V	F
V	V	F	F	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	F	F	V	V

12 a. $b \wedge \overline{[(\bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b)]}$

b. $[\bar{a} \vee (c \rightarrow b)] \wedge c$

a	b	c	$b \wedge \overline{[(\bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b)]}$	$[\bar{a} \vee (c \rightarrow b)] \wedge c$
V	V	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	F	V	F	V
V	V	F	F	F
F	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	F	F	F	F

Stabilisci quali fra le seguenti espressioni logiche sono tautologie, quali sono contraddizioni e quali nè l'uno nè l'altra.

13	$(a \rightarrow b) \leftrightarrow (a \vee \bar{b})$	[nulla]
14	$(a \wedge b) \wedge \overline{(a \vee b)}$	[C]
15	$a \rightarrow (a \vee b)$	[T]
16	$(a \vee b) \rightarrow a$	[nulla]
17	$(a \vee b) \wedge \overline{(a \wedge b)}$	[nulla]
18	$(a \vee b) \vee \overline{(a \wedge b)}$	[T]
19	$a \leftrightarrow [(a \wedge b) \rightarrow \bar{b}]$	[nulla]
20	$(a \rightarrow b) \wedge (a \wedge \bar{b})$	[C]
21	$[(a \wedge b) \rightarrow a] \vee b$	[T]
22	$(a \wedge b) \wedge [(b \rightarrow a) \wedge \bar{a}]$	[C]
23	$[a \rightarrow (a \vee \bar{b})] \wedge (b \vee \bar{a})$	[nulla]
24	$[(a \wedge b) \wedge \overline{(b \vee a)}]$	[C]
25	$[(a \rightarrow \bar{b}) \vee (b \wedge a)]$	[T]

Nelle proposizioni aperte che seguono calcola il valore di verità degli enunciati a fianco:

26	$p(x) : \langle x + 2 \text{ è primo} \rangle$	$p(1), p(2), p(3), p(4)$	[V, F, V, F]
27	$p(x) : \langle \frac{x}{3} \text{ è un numero intero} \rangle$	$p(1), p(3), p(16), p(21)$	[F, V, F, V]
28	$p(x, y) : \langle x - y = 2 \rangle$	$p(3, 2), p(3, 1), p(5, 6), p(4, 3)$	[F, V, F, F]
29	$p(x, y) : \langle x \cdot y = 6 \rangle$	$p(3, 2), p(3, 1), p(1, 6), p(4, 3)$	[V, F, V, F]
30	$p(x, y) : \langle x \cdot y = 8 \rangle$	$p(3, 2), p(3, 1), p(2, 4), p(8, 1)$	[F, F, V, V]

Determina, rappresentandolo nel modo che ritieni più opportuno, l'insieme di verità delle seguenti proposizioni aperte considerando come dominio l'insieme D segnato a fianco.

31	$p(x) : \langle x \text{ è divisore di } y \rangle$	$D = \{N \times N \mid 2 \leq x \leq 3 \wedge y \leq 6\}$	[(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)]
32	$p(x, y) : \langle x + y = 3 \rangle$	$D = \{Z \times Z \mid -1 \leq x \leq 3 \wedge 2 \leq y \leq 6\}$	[(-1,4), (0,3), (1,2)]
33	$p(x, y) : \langle x \cdot y = 12 \rangle$	$D = \{Z \times Z \mid -3 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq y \leq 3\}$	[(-3,-4), (4,3)]
34	$p(x, y) : \langle x + 3y = -1 \rangle$	$D = \{Z \times Z \mid -15 \leq x \leq 0 \wedge -2 \leq y \leq 3\}$	[(-1,0), (-4,1), (-7,2), (-10,3)]
35	$p(x, y) : \langle x + 2y \leq 4 \rangle$	$D = \{Z \times Z \mid -2 \leq x \leq 1 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$	[(-2,1), (-2,2), (-2,3), (-1,1), (-1,2), (0,1), (0,2), (1,1)]
36	$p(x, y) : \langle 2x + y \leq 1 \rangle$	$D = \{Z \times Z \mid -2 \leq x \leq 1 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$	[(-2,1), (-2,2), (-2,3), (-2,4), (-1,1), (-1,2), (-1,3), (0,1)]

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1 Considera le seguenti proposizioni entrambe vere:
 p : «Giulio ha un fratello» q : «Giulio ha una sorella»
 Scrivi in simboli gli enunciati che seguono e valutane il valore di verità:
 a. «Giulio è figlio unico»
 b. «Giulio ha una sorella e un fratello»
 c. «Giulio ha una sorella e nessun fratello»
 d. «Giulio ha una sorella, un fratello o entrambi»
[$\overline{p \vee q}$ = falso; $p \wedge q$ = vero; $\overline{p} \wedge q$ = falso; $p \vee q$ = vero]

2 Considera la proposizione p : «Luca e Giorgio amano entrambi la pesca»:
 1) Se \overline{p} è vera cosa si può dire delle seguenti affermazioni:
 a. «Luca ama pescare e Giorgio no»
 b. «Luca non ama pescare»
 c. «Se Luca ama pescare allora Giorgio non ama la pesca»
 d. «Sia Giorgio che Luca non amano pescare» [nulla, nulla, vera, nulla]
 2) rivaluta le precedenti proposizioni sapendo inoltre che la proposizione q : «Luca non ama la pesca» è falsa. [vera, falsa, vera, falsa]
 3) supponi ora che la proposizione q precedente sia invece vera e rivaluta le proposizioni del punto 1. [falsa, vera, vera, non si può dire nulla]

3 Dato l'insieme $A = \{a \in N \mid a \leq 10\}$, considera le seguenti proposizioni:
 $p(x, y)$: « x è multiplo di y » $q(x, y)$: « x è il doppio di y » con $x, y \in A$
 Trova l'insieme di verità delle proposizioni $p(x, y) \wedge q(x, y)$ e $q(x, y) \rightarrow p(x, y)$ e stabilisci se questo secondo enunciato aperto è una implicazione logica.
[per entrambe le proposizioni: $\{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5)\}$; è implicazione logica]

Costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni:

4 a. $[(c \vee b) \vee (a \wedge c)] \wedge (d \vee a)$ b. $\overline{a \rightarrow [b \wedge (\overline{c} \wedge d)]}$

a	b	c	d	[(c ∨ b) ∨ (a ∧ c)] ∧ (d ∨ a)	$\overline{a \rightarrow [b \wedge (\overline{c} \wedge d)]}$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F
V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	F	F
V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F
V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F

5 a. $[(\bar{d} \vee b) \vee \overline{(a \wedge c)}] \rightarrow (c \wedge a)$

b. $(c \vee d) \wedge [(b \wedge d) \wedge (\bar{c} \wedge a)]$

a	b	c	d	$[(\bar{d} \vee b) \vee \overline{(a \wedge c)}] \rightarrow (c \wedge a)$	$(c \vee d) \wedge [(b \wedge d) \wedge (\bar{c} \wedge a)]$
V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F
V	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	F	F
V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F

6 a. $[(b \vee c) \wedge \overline{(d \wedge b)}] \wedge (d \rightarrow \bar{a})$

b. $[(c \vee \bar{a}) \rightarrow (c \wedge b)] \vee (c \wedge d)$

a	b	c	d	$[(b \vee c) \wedge \overline{(d \wedge b)}] \wedge (d \rightarrow \bar{a})$	$[(c \vee \bar{a}) \rightarrow (c \wedge b)] \vee (c \wedge d)$
V	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	F	F
V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F

7 Delle seguenti proposizioni individua gli enunciati atomici, riscrivili mediante un'espressione logica e determinane il valore di verità:

- a. condizione necessaria ma non sufficiente affinché due numeri siano pari è che la loro differenza sia un numero pari
- b. essere dispari è una condizione necessaria affinché un numero sia primo
- c. nell'insieme dei parallelogrammi, avere le diagonali congruenti è una condizione sufficiente per essere un quadrato
- d. nell'insieme dei rettangoli, avere le diagonali congruenti è una condizione sufficiente per essere un quadrato
- e. nell'insieme dei triangoli, avere due angoli congruenti è condizione necessaria e sufficiente per essere un triangolo isoscele.

[V, F, F, V, V]

Risolvi i seguenti problemi.

8 Considera le proposizioni p : «La macchina di Andrea è rossa» e q : «La macchina di Andrea è tedesca». Costruisci la proposizione $\overline{p \wedge q}$ e supponila vera. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente falsa?

- «La macchina di Andrea è tedesca»
- «La macchina di Andrea è rossa»
- «Andrea possiede una macchina tedesca rossa»
- «Andrea non possiede una macchina tedesca rossa».

[c.]

9 Giulia ha un incontro con un uomo e ha deciso quanto segue:

- Se è ricco e bello lo sposerà
- Se lo sposerà dovrà essere bello
- Se non fosse ricco potrebbe sposarlo solo se sarà simpatico
- Se sposerà un uomo non ricco un requisito necessario dovrà essere la gentilezza.

Che tipo di uomo ha la certezza di potersi sposare con Giulia?

[ricco e bello]

10 Marco, Luca, Giorgio e Andrea escono a cena regolarmente. Sono soliti pagare il conto in questo modo:

- Andrea paga solo se tutti pagano
- Luca non paga se non paga nemmeno Andrea
- Giorgio non paga se è il solo

Chi paga il conto? (Indica tutti i possibili casi)

[tutti, Giorgio e Marco, solo Marco]

11 Quattro amiche si devono recare a un concerto. Ognuna decide di andare o meno in base alle seguenti considerazioni:

- Roberta va se e solo se va anche Antonia
- Antonia non va se c'è anche Giulia
- Se va Giulia va anche Maria
- Maria non va sola.

Chi andrà al concerto? (Indica tutti i possibili casi)

[Roberta e Antonia; Roberta, Antonia e Maria; Giulia e Maria]

12 Riscrivi le seguenti proposizioni usando gli appropriati quantificatori e determinane poi il valore di verità:

- Tutti gli esseri viventi si riproducono.
- Nello spazio, non tutte le rette che non si intersecano sono parallele.
- Esistono dei numeri naturali che non sono nè pari nè dispari.
- Tutti i numeri positivi sono maggiori di tutti i numeri negativi.
- Tutte le frazioni proprie sono minori dell'unità.
- Non tutte le frazioni equivalenti rappresentano lo stesso numero razionale.

13 Riscrivi nel linguaggio comune le seguenti proposizioni e determinane il valore di verità:

a. $\forall x \in N, \exists y \in N : y > x$

[V]

b. $\exists x \in Q^+, \exists y \in Q^- : x + y > 0$

[V]

c. $\nexists x \in N : 2x - 3 = 0$

[V]

d. $\nexists x \in P : \frac{x}{2} = n, n \in N$ essendo P l'insieme dei numeri primi

[F]