APPROFONDIMENTO

Integrazione per sostituzione

Questo metodo consiste nell'operare un cambio di variabile in modo da ricondurre l'integrale ad una forma nota.
Vediamo come procedere mediante un esempio.

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx$

I passo: poniamo $\sqrt{x}=t$ cioè $x=t^2$ con $t\geq 0$

Con questa sostituzione la funzione da integrare si trasforma in $\dfrac{t+1}{t}$

II passo: dobbiamo trovare l'espressione da sostituire a dx

Riprendiamo la relazione $x=t^2$ e differenziamo entrambi i membri: $dx=2t\,dt$

III passo: operiamo le sostituzioni $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{t+1}{t}\cdot 2t\,dt=\int 2(t+1)\,dt=2\int(t+1)\,dt$

L'integrale ottenuto è facilmente calcolabile:

$$2\int(t+1)dx=2\left(\frac{t^2}{2}+t\right)+c=t^2+2t+c$$

IV passo: operiamo la sostituzione inversa ottenendo infine $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx=x+2\sqrt{x}+c$

Sintetizziamo la procedura:

- si opera una opportuna sostituzione $x=g(t)$
- si differenziano entrambi i membri della relazione ottenendo $dx=g'(t)dt$
- si sostituisce a dx la sua espressione in funzione di t
- si integra la nuova funzione in t ottenuta
- si opera infine la sostituzione inversa.

Spesso la sostituzione da operare è intuitiva, come nel caso dell'esempio presentato; altre volte dipende dalla forma della funzione integranda.

Negli esercizi indicheremo la sostituzione da operare nei casi meno intuitivi.

Vediamo un esempio:

$$\int\frac{1}{e^x+1}\,dx$$

Posto $e^x=t$, con $t>0$ cioè $x=\ln t$ si ha che $dx=\dfrac{1}{t}\,dt$

L'integrale diventa $\displaystyle\int\frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\int\frac{1}{t(t+1)}\,dt$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta; troviamo i valori A e B per i quali risulta:

$$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{1}{t(t+1)}=\frac{t(A+B)+A}{t(t+1)}$$

Affinché le due frazioni siano uguali deve essere: $\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

Otteniamo così: $\displaystyle\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln t-\ln(t+1)+c$

Tornando alla variabile x troviamo infine: $\ln e^x-\ln(e^x+1)+c$.

ESERCIZI

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\int\frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$$

Operiamo la sostituzione $\sqrt{x}=t$ ovvero $x=t^2$ con $t>0$ e differenziamo $dx=2t\,dt$
L'integrale dato assume quindi la forma

$$\int\frac{t^2-1}{(t^2+1)t}2t\,dt=2\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=2\int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=2t-4\arctan t+c$$

Ritornando alla variabile x otteniamo: $2\sqrt{x}-4\arctan\sqrt{x}+c$

2 $\displaystyle\int\frac{1}{e^x-1}\,dx$ $\quad[\ln|e^x-1|-x+c]$

3 $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$ $\quad[e^x-\ln(e^x+1)+c]$

4 $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+c\right]$

5 $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad\left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}-2\sqrt{x}+c\right]$

6 $\displaystyle\int x\left(\sqrt{x}-3\right)dx$ $\quad\left[\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}-\frac{3}{2}x^2+c\right]$

7 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ $\quad\left[\frac{3}{40}\sqrt[3]{(x+1)^2}\,(5x^2-6x+9)+c\right]$

(Suggerimento: poni $\sqrt[3]{x+1}=t$ cioè $x=t^3-1$)

8 $\displaystyle\int\frac{2x+3}{\sqrt{x-2}}\,dx$ $\quad\left[\frac{2}{3}\sqrt{x-2}\,(2x+17)+c\right]$

9 $\displaystyle\int\sqrt{e^x-1}\,dx$ $\quad\left[2\sqrt{(e^x-1)}-2\arctan\sqrt{(e^x-1)}+c\right]$