

Le equazioni e le disequazioni logaritmiche con i moduli

Per risolvere equazioni e disequazioni che contengono dei moduli si applicano gli stessi criteri che abbiamo imparato ad usare per le equazioni e le disequazioni algebriche; risolvi gli esercizi che ti proponiamo di seguito dopo aver osservato con attenzione gli esempi svolti.

Le equazioni

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$\log_2 |x^2 - 9| = 2$$

L'argomento del logaritmo non è mai negativo per la presenza del modulo. Per la determinazione del dominio basta quindi solo imporre che sia

$$x^2 - 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq \pm 3$$

L'equazione è perciò equivalente a $|x^2 - 9| = 4$

$$\text{cioè } x^2 - 9 = -4 \quad \vee \quad x^2 - 9 = 4$$

$$[S = \{\pm\sqrt{5}; \pm\sqrt{13}\}]$$

$$2 \quad \log_{\frac{1}{2}} |x^2 - 1| = 3$$

$$\log |x - 1| = \log x$$

$$[S = \left\{ \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}, \pm \frac{\sqrt{14}}{4} \right\}; S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}]$$

$$3 \quad \log_2 |x + x^2| = \log_2 6$$

$$\log_3 |x^2 - 2x| = \log_3 |x - 3| + 1$$

$$[S = \{-3, 2\}; S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2} \right\}]$$

Le disequazioni

4 ESERCIZIO GUIDATO

$$\log |x^2 - 4| > 1$$

La condizione di esistenza del logaritmo è che sia: $x^2 - 4 \neq 0$ cioè $x \neq \pm 2$

In tali ipotesi la disequazione, trattandosi di un logaritmo in base 10, è equivalente a:

$$\log |x^2 - 4| > \log 10 \quad \rightarrow \quad |x^2 - 4| > 10$$

Quest'ultima disequazione è equivalente alle due disequazioni:

$$x^2 - 4 < -10 \quad \vee \quad x^2 - 4 > 10$$

Troviamo le soluzioni delle due disequazioni:

- $x^2 - 4 < -10 \quad \rightarrow \quad x^2 < -6$ mai verificata

- $x^2 - 4 > 10 \quad \rightarrow \quad x^2 > 14 \quad \rightarrow \quad x < -\sqrt{14} \vee x > \sqrt{14}$

L'unione dei due insiemi trovati è la soluzione della disequazione: $x < -\sqrt{14} \vee x > \sqrt{14}$.

$$5 \quad \log |x + 2| < 0$$

$$\log |2x + 1| > 0$$

$$[-3 < x < -1 \wedge x \neq -2; x < -1 \vee x > 0]$$

$$6 \quad \log_{\frac{1}{2}} |3 - 2x| < 1$$

$$\log_3 |x^2 - 1| \geq 2$$

$$\left[x < \frac{5}{4} \vee x > \frac{7}{4}; x < -\sqrt{10} \vee x \geq \sqrt{10} \right]$$