Approfondimento

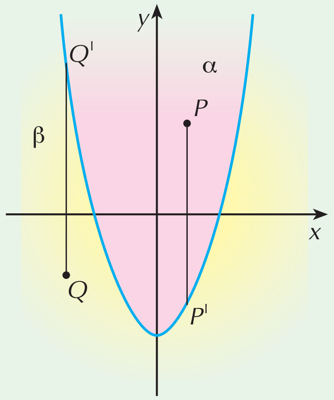
Le disequazioni in due variabili

Una disequazione di secondo grado in due variabili può essere risolta dal punto di vista grafico; ci occupiamo delle disequazioni che si possono scrivere nella forma $y > ax^2 + bx + c$ (o in quella analoga con il verso opposto).
Se teniamo presente che l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola, possiamo ripetere un ragionamento analogo a quello fatto per le disequazioni lineari.

Osserva i seguenti esempi.

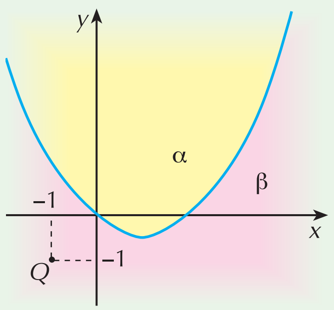
- Risolviamo graficamente la disequazione $y > x^2 - 4$
  Disegniamo nel piano cartesiano la parabola $y = x^2 - 4$ che divide il piano nelle due regioni α e β (***figura 1***).
  Punti come P che appartengono alla regione α hanno un'ordinata che è maggiore dei corrispondenti punti P' sulla parabola; punti come Q che appartengono alla regione β hanno un'ordinata che è minore dei corrispondenti punti Q' sulla parabola.
  L'insieme delle soluzioni di questa disequazione è dunque la regione dei punti di α. Per avere una conferma basta scegliere un punto in questa regione e verificare che le sue coordinate soddisfino la disequazione:
  $P(1, 3):\quad 3 > 1 - 4 \quad 3 > -3$ relazione vera.

Figura 1



- Risolviamo graficamente la disequazione $y < \frac{1}{2}x^2 - x$
  Disegniamo nel piano cartesiano la parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ (***figura 2***). I punti che soddisfano la disequazione sono quelli che appartengono alla regione β; verifichiamolo usando il punto $Q(-1, -1)$:
  $-1 < \frac{1}{2} + 1 \qquad -1 < \frac{3}{2}$ relazione vera.

Figura 2



Esercizi

1 **Esercizio guidato**

$x^2 - 3x - y \geq 0$

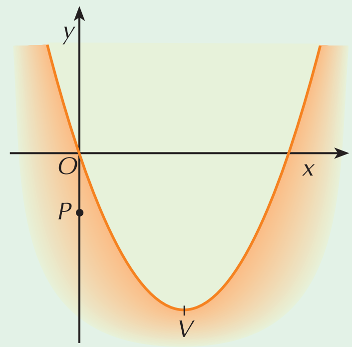
Esplicitando rispetto a y riscriviamo la disequazione nella forma $y \leq x^2 - 3x$

La parabola $y = x^2 - 3x$ ha vertice $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ e passa per l'origine degli assi.

I punti che soddisfano la condizione richiesta sono quelli che hanno una y minore di quella dei corrispondenti punti sulla parabola, cioè quelli che si trovano "al di sotto" del suo grafico.
Per avere una conferma vediamo se le coordinate di un punto che appartiene a questa regione, per esempio $P(0, -1)$, soddisfa la disequazione:

$$-1 \le 0$$

La regione delle soluzioni è quindi quella che contiene P.



2 $y + 3x^2 - 12x > 0$

3 $x^2 - y - 5x + 6 \le 0$

4 $y \ge 4 - 5x^2$

5 $x - 3y + x^2 < 0$

6 $x^2 + y - 6x + 1 \ge 0$

7 $4x - 2y + 6x^2 \le 3$

8 $\frac{1}{2}y - x^2 + \frac{3}{2}x > 0$

9 $4x^2 - 3x < y$

10 $y - x^2 - 1 < 0$

11 $2x^2 - 6x + y \ge 0$

12 $3y - 9x^2 + x - 2 \le 0$

13 $5x^2 - y + 4x + 1 > 0$

14 $x^2 - 4y + x \ge 0$

15 $4 - 2y + x^2 < 0$