

SCHEDA DI APPROFONDIMENTO

DALLA LOGICA ALLA LOGICA FUZZY

La logica classica

La teoria classica degli insiemi nasce con **Georg Cantor** (1845-1918), matematico tedesco di origine russa che, intorno al 1895, nella sua opera *I contributi a una fondazione della teoria transfinita degli insiemi* scrive: «Per insieme intendiamo una riunione M , in un tutto, di determinati e ben distinti oggetti m della nostra intuizione e del nostro pensiero, i quali vengono chiamati gli 'elementi' di M ».

Per Cantor la natura degli elementi degli insiemi con cui si opera non ha importanza ed il modo di eseguire un'operazione fra insiemi non cambia sia che gli elementi siano numeri, animali o piante; sono le leggi delle operazioni a caratterizzare l'insieme risultato, non la natura degli elementi su cui si opera.

Nei primi anni del '900 la teoria degli insiemi di Cantor venne profondamente scossa dalla scoperta di alcuni paradossi, dei quali, il più famoso è quello del barbiere, formulato da **Bertrand Russell** (1872-1970), di cui abbiamo già parlato nella scheda introduttiva al capitolo sulle relazioni (pagg. 292-293).

Paradossi come questo misero in crisi i fondamenti della matematica e ridussero la sua struttura logica in condizioni disastrose.

Si cercò allora di seguire la strada assiomatica che nel campo della geometria aveva già risolto molti problemi logici; il primo a seguire questo percorso fu **Ernst Zermelo** (1871-1953), che, insieme a **Fraenkel** (1891-1965), sviluppò una teoria assiomatica degli insiemi. Ad oggi non sono ancora state trovate contraddizioni a questa teoria, ma non si è ancora riusciti a dimostrare che non ve ne siano, cioè che essa sia coerente.

In ogni caso, la teoria degli insiemi, come abbiamo anche visto nella trattazione di questo argomento, si basa su una logica a due valori, vero o falso, la stessa logica nata con **Aristotele** (384-322 a.C.) nell'antica Grecia e che ha influenzato il pensiero umano per duemila anni. Durante tutto il Medioevo, infatti, e fino al Cinquecento, la logica rimase chiusa entro i confini segnati da Aristotele e considerata disciplina umanistica, legata alla filosofia e all'arte retorica più che alla scienza.

Fu solo nel generale risveglio della scienza e della tecnica che caratterizzò il Seicento, il Settecento, e poi ancora più intensamente il periodo della rivoluzione industriale, che si cercò di collegare la logica tradizionale allo sviluppo e ai metodi della matematica moderna. Da quel momento la logica, che proprio per il suo connubio con la matematica prese a chiamarsi logica matematica, compì rapidi progressi che continuano tuttora. Un passo decisivo fu compiuto quando, nella seconda metà del XVII secolo, **Gottfried Leibnitz** (1646-1717), filosofo e matematico tedesco, mise in rilievo l'ambiguità che caratterizza il linguaggio parlato e intuì un modo per superarla.

Egli sosteneva che

«le lingue parlate, benché utili per il pensiero discorsivo, sono soggette ad innumerevoli ambiguità di significato e non possono offrire i vantaggi del calcolo per scoprire gli errori di deduzione». Pertanto si potrebbe *«inventare un alfabeto dei pensieri umani e dalla combinazione delle lettere di questo alfabeto e dall'analisi delle parole formate con esso, ... scoprire ed esaminare ogni cosa».*

La sua idea fu dunque quella di costruire uno strumento linguistico universale, che egli chiamava *Characteristica universalis* consistente in un linguaggio artificiale i cui simboli potessero condurre ad analizzare qualsiasi problema in modo da arrivare a conclusioni certe.

«In questo modo», egli diceva, *«quando sorge una controversia tra due filosofi, ...basterà prendere in mano le penne e calcolare».*

L'entusiasmo di Leibnitz per una matematizzazione del linguaggio non deve stupire: era quella un'epoca in cui, sotto la pressione di grandi eventi storici e nuove scoperte tecnologiche che preparavano la rivoluzione industriale, si verificava una fioritura di studi scientifici e di esperienze tecniche. Era nata in questo periodo, quasi in risposta alle nuove esigenze di conoscenza, anche la geometria analitica ad opera del matematico e filosofo francese **René Descartes**, più noto con il nome di **Cartesio** (1596-1650), il quale aveva elaborato una interpretazione della geometria mediante l'applicazione dell'algebra.

Leibnitz però non portò mai a compimento il suo progetto di un linguaggio simbolico universale assolutamente esatto. Fu solo un secolo e mezzo più tardi che il matematico inglese **George Boole** (1815-1864) pose le basi autentiche del calcolo logico. Boole sosteneva che in qualsiasi ragionamento occorre porre attenzione alle premesse, tradurle in simboli e da queste dedurre, mediante l'applicazione di regole scientifiche, le conclusioni che derivano da tali premesse.

Non è dunque rilevante indagare se le premesse sono vere o false, ma solo chiedersi quali possono essere le conclusioni che possiamo trarre correttamente dalle premesse stesse.

La logica formale, così chiamata da Boole perché basata sui simboli e non sui contenuti specifici, avrà poi con **Bertrand Russell** (1872-1970), **Giuseppe Peano** (1858-1932) e **Friedrich Frege** (1848-1925) un ulteriore sviluppo.

All'opera poi di **John Venn** (1834-1924), celebre logico inglese, si deve la rappresentazione grafica di ragionamenti logici mediante i diagrammi di Eulero-Venn di cui hai già avuto modo di apprezzare l'utilità. Il nome dato a questa modalità di rappresentazione grafica del calcolo logico è dovuto al fatto che Venn costruì questi schemi semplificando e perfezionando quelli che erano già stati usati da un altro matematico, Eulero, nella seconda metà del Settecento.

La logica fuzzy

La logica che abbiamo studiato ha spesso poco a che fare con il nostro modo di pensare; discutendo con gli amici ci capita frequentemente di essere o non essere d'accordo su alcune affermazioni circa l'appartenenza o meno di una persona ad un insieme: se diciamo che Luisa è una ragazza intelligente troveremo persone che sono assolutamente d'accordo con noi, persone che sono quasi d'accordo, persone che sono d'accordo solo in parte, persone che non sono d'accordo per niente. Allora Luisa fa parte o no dell'insieme delle ragazze intelligenti? In effetti abbiamo detto che il predicato "essere intelligenti" non identifica un insieme, almeno non nel senso dato a questo termine da Cantor prima e da Zermelo poi, a meno di precisare un criterio che definisca senza possibilità di equivoco che cosa si intende per "ragazza intelligente".

Ma prendiamo un altro esempio: il predicato «essere giovani» non consente di stabilire se una persona appartiene o meno all'insieme delle persone giovani a meno di fissare che "giovane" significa, per esempio, avere un'età minore di 30 anni; ma siamo proprio sicuri che una persona di 32 anni non sia giovane? Probabilmente se la mettiamo vicina ad una di 29 anni non ci accorgiamo nemmeno della differenza.

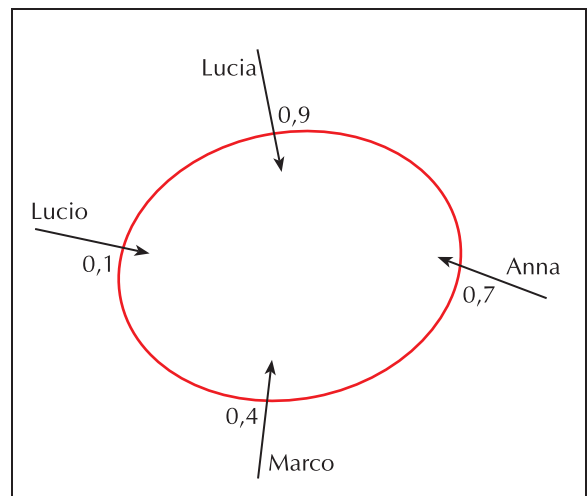
Negli anni '70 nasce la **logica fuzzy** (termine anglosassone che significa *sfumato, approssimativo*), la logica nella quale non c'è un confine netto fra gli oggetti che appartengono o non appartengono ad un insieme, perché ad ogni oggetto è associato un grado di appartenenza variabile fra 0 e 1, dove 0 significa che l'oggetto non appartiene all'insieme, 1 significa che appartiene, i valori intermedi indicano delle appartenenze parziali. Insiemi di questo tipo sono detti **insiemi fuzzy**.

Se ragioniamo in questi termini, la logica classica rientra come caso particolare della logica fuzzy quando tutti gli elementi di un insieme fuzzy hanno grado di appartenenza 1 e tutti gli altri grado 0.

Se riprendiamo l'enunciato «essere giovani», possiamo dire che minore è l'età di una persona, maggiore sarà il suo grado di appartenenza all'insieme fuzzy: per esempio, Lucia che ha 28 anni avrà un indice pari a 0,9, Anna che ne ha 25 lo avrà pari a 0,7, Marco che ha 40 anni lo avrà pari a 0,4, Lucio che di anni ne ha 70 avrà un indice pari a 0,1 e così via (**figura a lato**).

Questo significa che l'appartenenza o la non appartenenza di un elemento ad un insieme fuzzy sono graduali e questo può rappresentare in modo abbastanza soddisfacente il pensiero umano.

Ma anche la logica fuzzy non è esente da critiche perché alcuni ritengono che sia una probabilità mascherata. Bisogna però sottolineare che il grado di appartenen-



za non ha niente a che vedere con la casualità come accade per i valori probabilistici; dire che «Luisa appartiene all'insieme delle persone intelligenti con un grado di appartenenza pari a 0,8» non significa che la probabilità che Luisa sia intelligente è uguale a 0,8, ma che la sua appartenenza all'insieme è naturalmente legata all'imprecisione associata al concetto di intelligenza ed è perciò graduale, da un minimo di 0 ad un massimo di 1. Invece, dire che «all'80% Luisa si sposerà entro 3 mesi» è una valutazione probabilistica, basata su una logica bivalente, perché o ci si sposa o non ci si sposa.

Le applicazioni della logica fuzzy

La logica fuzzy si riferisce a concetti che non hanno confini precisi, come essere belli, essere giovani, essere amici, essere simpatici; essa trova applicazioni in molti campi, soprattutto quelli legati alla produzione di *beni intelligenti*, in grado di reagire agli stimoli esterni.

È il campo in cui spazia la cosiddetta **intelligenza artificiale**, con la programmazione di **sistemi esperti** in grado di risolvere un problema come lo risolverebbe un essere umano.

Attualmente sono soprattutto i Paesi Orientali come il Giappone che si stanno muovendo verso la progettazione di prodotti di normale utilizzo che hanno un comportamento *intelligente* basato sulla logica fuzzy: dai condizionatori, alle automobili, dalle lavatrici in grado di programarsi sulla base del tipo di acqua e sporco che devono trattare, alle macchine fotografiche.

Occorre però dire che il mondo scientifico, soprattutto occidentale, è ancora piuttosto scettico sulla validità di questa teoria, sostanzialmente perché la maggior parte dei problemi trattati con una logica fuzzy possono essere affrontati anche con strumenti matematici più tradizionali. Inoltre l'output di una qualunque macchina "intelligente" deve necessariamente essere preciso; per esempio, un regolatore di temperatura fuzzy può ricevere input non precisi del tipo «fa caldo» oppure «fa molto caldo» e decidere in base a questi input di abbassare la temperatura. La strumentazione elettronica preposta alla regolazione deve però rendere preciso l'output stabilendo che la temperatura ambiente dovrà essere regolata a 22°C, e questo non è un ragionamento di tipo fuzzy.

Comunque si svilupperanno le cose, quello che è certo è che la matematica ha aperto nuove strade alla ricerca, strade irte di difficoltà, di piccoli successi e di fallimenti, ma comunque strade che marciano diritte verso il progresso.