Concetti chiave e regole

Angoli e misure

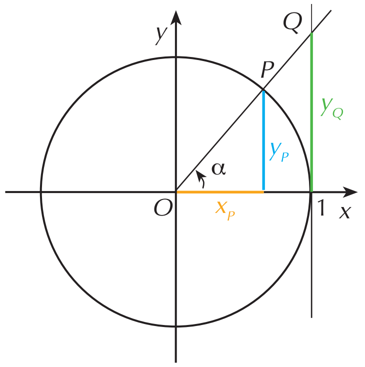
Gli angoli si possono misurare in **gradi** oppure in **radianti**:

- se α è un angolo al centro di una circonferenza di raggio r che insiste su un arco AB :

$$\alpha \text{ (in radianti)} = \frac{\text{lunghezza dell'arco } AB \text{ rettificato}}{r}$$

- se x è la misura di α in radianti e y è quella in gradi, per passare da un sistema all'altro si usa la proporzione $x : y = \pi : 180$

Le funzioni goniometriche fondamentali e i grafici



Considerata la circonferenza goniometrica (avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e raggio unitario) ed un angolo α avente vertice nell'origine e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse, si definisce:

- $\sin\alpha$ l'ordinata del punto P
- $\cos\alpha$ l'ascissa del punto P
- $\tan\alpha$ l'ordinata del punto Q

Si introducono poi le seguenti funzioni che sono le reciproche di quelle fondamentali:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Le relazioni fondamentali

Le relazioni fondamentali che legano le funzioni goniometriche sono:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

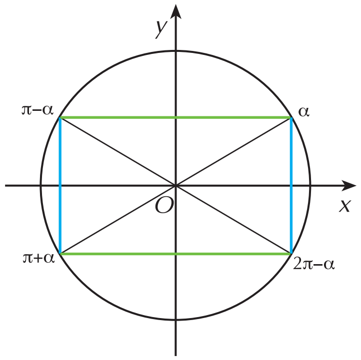
Da esse si ricavano le formule di:

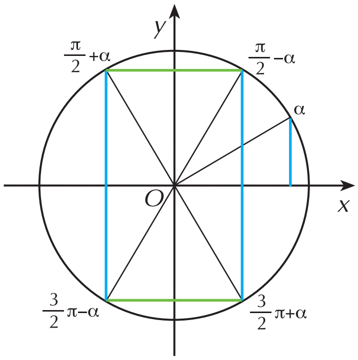
- $\sin\alpha$ in funzione di $\cos\alpha$: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
- $\sin\alpha$ in funzione di $\tan\alpha$: $\sin\alpha = \pm\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
- $\cos\alpha$ in funzione di $\sin\alpha$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
- $\cos\alpha$ in funzione di $\tan\alpha$: $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

La seconda relazione fondamentale consente poi di stabilire che il coefficiente angolare di una retta rappresenta la tangente dell'angolo α che essa forma con la direzione positiva dell'asse x: $m = \tan\alpha$.

Gli archi associati

Gli angoli associati ad un angolo α sono quelli che hanno i valori delle funzioni goniometriche complessivamente uguali a quelli di α. Per ricavare i valori del seno, del coseno e della tangente di tali angoli basta ricordare i seguenti disegni:





Le formule

- Addizione

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

- Duplicazione

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

- Bisezione

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

- Parametriche $\forall\alpha \neq \pi + 2k\pi$:

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

- Prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

- Werner:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$