APPROFONDIMENTO

I teoremi inversi e le loro dimostrazioni

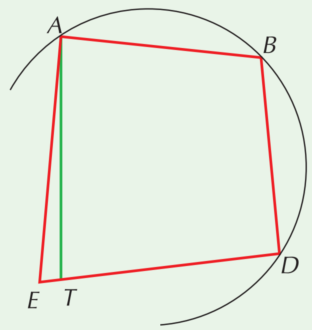
Teorema. Un quadrilatero che ha una coppia di angoli opposti supplementari è inscrittibile in una circonferenza.

Hp. $\widehat{ABD} + \widehat{AED} \cong \pi$ (***figura 1***)

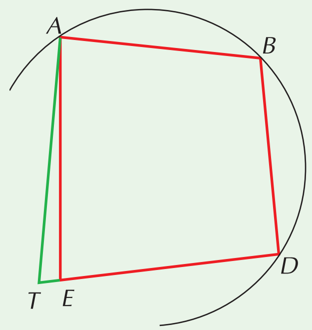
Th. $ABDE$ è inscrittibile in una circonferenza

Dimostrazione.
Sappiamo che tre punti del piano individuano una circonferenza, esiste quindi una circonferenza che passa per A, B e D. Supponiamo per assurdo che tale circonferenza non passi per E ma che intersechi la retta DE in un punto T che può essere interno (***figura 1a***) oppure esterno (***figura 1b***) al segmento DE. Il quadrilatero $ABDT$, essendo inscritto in una circonferenza, ha quindi gli angoli opposti supplementari e perciò possiamo scrivere che $\widehat{ABD} + \widehat{ATD} \cong \pi$; ma, per ipotesi, è anche $\widehat{ABD} + \widehat{AED} \cong \pi$. Confrontando queste due relazioni deduciamo che è $\widehat{AED} \cong \widehat{ATD}$. Per il teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo AET, si ha anche che $\widehat{ATD} > \widehat{AED}$ nel caso della ***figura 1a***, $\widehat{AED} > \widehat{ATD}$ nel caso della ***figura 1b***. Siamo quindi giunti ad un assurdo perché un angolo non può essere contemporaneamente congruente, minore o maggiore di un altro angolo; di conseguenza la circonferenza passa anche per E ed il quadrilatero è in essa inscritto. ◀

Figura 1



a.



b.

Teorema. Se la somma di due lati opposti di un quadrilatero è congruente alla somma degli altri due, allora il quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza.

Hp. $AE + DB \cong ED + AB$

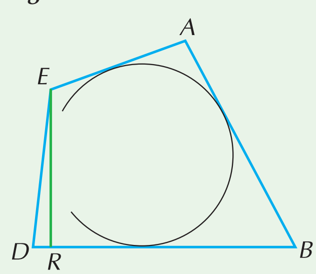
Th. $ABDE$ è circoscrittibile

Dimostrazione.
Sappiamo che esiste sicuramente una circonferenza γ che è tangente a tre lati del quadrilatero, per esempio ai lati AE, AB, BD (***figura 2***); supponiamo per assurdo che essa non sia tangente al quarto lato, cioè a DE.
Tracciamo allora dal punto E la retta tangente a γ che interseca la retta del lato BD in un punto R.
Il quadrilatero $ABRE$ è quindi circoscritto a γ e per esso vale la relazione

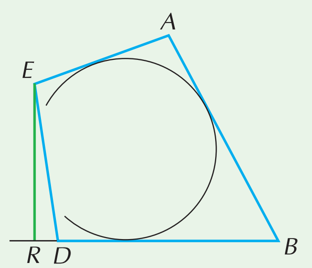
$$AE + RB \cong ER + AB.$$

Per ipotesi si ha anche che $AE + DB \cong ED + AB$.

Figura 2



a.



b.

Distinguiamo ora due casi:

a. il punto R appartiene al lato DB (***figura 2a***)

Sottraendo la prima relazione dalla seconda otteniamo che $DB - RB \cong ED - ER$ cioè $DR \cong ED - ER$

b. il punto R non appartiene al lato DB ma al suo prolungamento (***figura 2b***)

Sottraendo la seconda relazione dalla prima otteniamo che $RB - DB \cong ER - ED$ cioè $DR \cong ER - ED$.

Queste ultime congruenze sono però assurde perché, per le disuguaglianze triangolari applicate al triangolo EDR, DR è maggiore della differenza degli altri due lati. La circonferenza γ è dunque tangente anche a DE ed il quadrilatero è ad essa circoscritto. ◀