AREA 1: FUNZIONI E LIMITI

1

INSIEMI NUMERICI E FUNZIONI

Per ricordare

★ Un insieme E si dice:

- **limitato superiormente** se esiste un numero k, non necessariamente appartenente a E, che è maggiore o uguale di tutti i suoi elementi; il più piccolo fra questi numeri k è l'**estremo superiore** dell'insieme (si indica con $\sup E$) che, se appartiene a E, è anche il **massimo** di E
- **limitato inferiormente** se esiste un numero h, non necessariamente appartenente a E, che è minore o uguale di tutti i suoi elementi; il più grande fra questi numeri h è l'**estremo inferiore** dell'insieme (si indica con $\inf E$) che, se appartiene a E, è anche il **minimo** di E.

Quando un insieme è limitato sia superiormente che inferiormente, si dice semplicemente che è limitato.

Quando un insieme non è limitato superiormente si dice che $\sup E = +\infty$; quando non è limitato inferiormente si dice che $\inf E = -\infty$.

Per esempio:

- $A = \left\{x \in R \mid -3 \leq x < \dfrac{7}{2}\right\}$ è un insieme limitato ed è $\inf A = -3$, $\sup A = \dfrac{7}{2}$; -3 è anche il minimo perché appartiene ad A, mentre non esiste il massimo perché $\dfrac{7}{2}$ non appartiene ad A.
- $B = \left\{x \in R \mid x > \sqrt{3}\right\}$ è un insieme limitato a sinistra e illimitato a destra; allora $\inf B = \sqrt{3}$, $\sup B = +\infty$; questo insieme non ha il minimo perché $\sqrt{3}$ non gli appartiene e ovviamente non ha il massimo essendo illimitato superiormente.

★ L'insieme dei numeri reali che sono compresi fra altri due numeri a e b si chiama **intervallo**; se a e b sono entrambi finiti l'intervallo si dice limitato, se uno dei due non è finito l'intervallo si dice illimitato; in particolare, la scrittura:

- (a, b) indica un intervallo limitato aperto che rappresenta l'insieme degli $x \in R$ tali che $a < x < b$
- $[a, b]$ indica un intervallo limitato chiuso che rappresenta l'insieme degli $x \in R$ tali che $a \leq x \leq b$
- $(a, +\infty)$ indica un intervallo illimitato a destra, aperto a sinistra, che rappresenta l'insieme degli $x \in R$ tali che $x > a$
- $(-\infty, b]$ indica un intervallo illimitato a sinistra, chiuso a destra, che rappresenta l'insieme degli $x \in R$ tali che $x \leq b$

In pratica la parentesi tonda indica che l'estremo dell'intervallo non appartiene all'insieme, quella quadra indica che gli appartiene; sul simbolo di infinito si usa solo la parentesi tonda.

Per esempio:

- $(-5, 10]$ è un intervallo limitato, aperto a sinistra e chiuso a destra e rappresenta l'insieme degli $x \in R$ tali che $-5 < x \leq 10$
- $[1, +\infty)$ è un intervallo limitato e chiuso a sinistra, illimitato a destra e rappresenta l'insieme degli $x \in R$ tali che $x \geq 1$.

★ Si dice **intorno** di un punto x_0 ogni intervallo aperto che contiene x_0 al suo interno; intorno di $+\infty$ è un qualunque intervallo del tipo $(a, +\infty)$, intorno di $-\infty$ è un qualunque intervallo del tipo $(-\infty, b)$, intorno di infinito è l'unione di un intorno di $-\infty$ con un intorno di $+\infty$.
Un punto x_0 si dice di **accumulazione** per un insieme E se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E.
Per esempio:

- un qualunque numero reale a è punto di accumulazione in R perché qualunque intorno di a contiene infiniti numeri reali
- un numero intero n non è punto di accumulazione in Z perchè gli intorni di n non contengono infiniti numeri interi (per esempio l'insieme degli interi compresi fra 5 e 20 è un intorno di 10 ma contiene solo un numero finito di interi).

★ Una **funzione** è una corrispondenza univoca fra due insiemi A e B, è cioè una legge che ad ogni elemento x di A associa uno e uno solo elemento y di B; in questa corrispondenza x rappresenta la **variabile indipendente**, y la **variabile dipendente**.
Quando A e B sono insiemi numerici, questa legge si esprime di solito con un'equazione della forma $y = f(x)$, dove $f(x)$ è un'espressione nella variabile x, che esprime il legame fra gli elementi dei due insiemi.
Per esempio, l'equazione $y = x^2 - 1$ esprime il fatto che gli elementi y si ottengono da quelli x elevandoli al quadrato e sottraendo 1 al risultato.
L'elemento $y \in B$ che corrisponde ad un particolare $x \in A$ si dice **immagine** di x; viceversa, ogni elemento $x \in A$ che resta associato nella corrispondenza a un elemento $y \in B$ si dice **controimmagine** di y. L'insieme delle controimmagini costituisce il **dominio** della funzione, l'insieme delle immagini ne è il **codominio**.
Quando è nota la sua equazione $y = f(x)$, il dominio della funzione f si determina chiedendosi quali sono i valori che può assumere la variabile indipendente x. Per rispondere a questa domanda occorre tenere presente che:

- un polinomio ha sempre significato in R, quindi le funzioni polinomiali hanno come dominio R
- una frazione esiste se il denominatore non è nullo
- una radice di indice pari esiste se il radicando è positivo o nullo
- una radice di indice dispari esiste sempre in R
- un logaritmo di base assegnata esiste se il suo argomento è positivo
- di un logaritmo a base variabile occorre imporre che la base sia positiva e diversa da 1
- le funzioni esponenziali a base fissa (e positiva) esistono se esiste l'esponente
- delle funzioni esponenziali a base varabile occorre chiedere che la base sia positiva e che esista l'esponente
- le funzioni goniometriche $\sin x$ e $\cos x$ hanno significato per qualsiasi $x \in R$, la funzione $\tan x$ ha significato se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; occorre poi ricordare che la funzione seno e la funzione coseno sono periodiche di periodo 2π, mentre la funzione tangente è periodica di periodo π
- le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$ devono avere un argomento compreso fra -1 e 1 (estremi inclusi), la funzione $\arctan x$ esiste per ogni $x \in R$.

★ Se una funzione $f(x)$ è definita in un punto x_0 e si verifica che:

- $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni x del dominio, allora si dice che x_0 è un **punto di massimo assoluto** e che $f(x_0)$ è il massimo assoluto della funzione
- $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni x del dominio, allora si dice che x_0 è un **punto di minimo assoluto** e che $f(x_0)$ è il minimo assoluto della funzione.

Una funzione $f(x)$ è:

- **monotòna crescente** in un intervallo I se $\forall x_1, x_2 \in I$ da $x_1 < x_2$ segue che $f(x_1) < f(x_2)$
  Se in quest'ultima relazione vale anche il segno di uguaglianza, cioè se $f(x_1) \leq f(x_2)$, allora la funzione è monotòna non decrescente, cioè in pratica cresce o tutt'al più si mantiene costante, ma non decresce mai
- **monotòna decrescente** in un intervallo I se $\forall x_1, x_2 \in I$ da $x_1 < x_2$ segue che $f(x_1) > f(x_2)$
  Se in quest'ultima relazione vale anche il segno di uguaglianza, cioè se $f(x_1) \geq f(x_2)$, allora la funzione è monotòna non crescente, cioè in pratica decresce o tutt'al più si mantiene costante, ma non cresce mai.
- **pari** se $f(-x) = f(x)$ e allora il suo grafico presenta una simmetria rispetto all'asse y
- **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ e allora il suo grafico presenta una simmetria rispetto all'origine
- **periodica** di periodo k se $f(x+k) = f(x)$ e allora il suo grafico si ripete ad ogni periodo.

Esercizi

Descrivi le caratteristiche degli insiemi soluzione delle seguenti disequazioni.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$|x^2 - 1| > 8$

Risolvendo la disequazione si ottiene l'insieme $x < -3 \ \vee \ x > 3$; si tratta dell'unione dei due intervalli $(-\infty, \ -3)$ e $(3, \ +\infty)$.
Del primo intervallo si può dire che è aperto, è illimitato a sinistra e limitato a destra, l'estremo inferiore è $-\infty$, l'estremo superiore è -3, non possiede né massimo né minimo; del secondo intervallo si può dire che è aperto, limitato a sinistra e illimitato a destra, l'estremo inferiore è 3, l'estremo superiore è $+\infty$, non possiede né massimo né minimo.

2 $|x+1| + |3x-5| > 1$

3 $\sqrt{8x-4} \geq x$

4 $\ln\left(2x^2 - x\right) < 0$

5 $\sin x - \cos x > 0$ in $[0, \ 2\pi]$

Dei seguenti insiemi numerici individua gli eventuali punti di accumulazione.

6 $A = \{x \in Z \mid -10 < x < 15\}$

7 $B = \{x \in Q \mid -1 < x < 5\}$

8 $C = \{x \in R \mid x = 2n + 3,\ n \in N\}$

9 $D = \left\{x \in R \mid x = \dfrac{3}{2}(n^2 + 1),\ n \in N\right\}$

10 $E = \left\{x \in R \mid x = \sqrt{2}(k + 1),\ k \in Q\right\}$

Traccia il grafico delle seguenti funzioni f di cui sono assegnate le equazioni e stabilisci:
- qual è il dominio
- qual è il codominio e se la funzione è limitata
- quali sono l'estremo superiore e l'estremo inferiore
- se la funzione possiede il massimo e il minimo assoluti.
(I risultati si trovano al termine dell'unità)

11 $y = 1 + |x^2 + 2x|$
(Suggerimento: analizzando il segno dell'argomento del modulo, la funzione ha la seguente espressione: $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x \leq -2 \ \vee \ x \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 1 & -2 < x < 0 \end{cases}$ ed il grafico è formato dagli archi di due parabole)

12 $y = |3x - 1| + x^2$

13 $y = 1 - 2x + |x|$

14 $y = |4 - x^2| + x$

15 $y = |x| - |x^2 - 1|$

16 $y = \sqrt{9 - x^2}$
(Suggerimento: posto $y \geq 0$, elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione ottieni una semicirconferenza)

17 $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$

18 $y = \sqrt{x^2 - 4}$

19 $y = \sqrt{3 - x}$

20 $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$

21 $y = \sqrt{5 - x} + 1$

22 $y = \sqrt{x^2 - 1} - 2$

23 $y = \sqrt{2x - x^2} + 1$

24 $y = 2^{x-1}$

25 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 4$

26 $y = 3^{|x|} + 1$

27 $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{|x-1|}$

28 $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{1-|x|}$

Costruisci il grafico di una funzione $f(x)$ che soddisfi alle caratteristiche indicate.

29 Abbia come dominio l'insieme $D = [-2, 4)$, sia crescente in $[-2, 2)$ e tale che $\inf f = -\infty$.

30 Abbia come dominio l'insieme $D = (-\infty, 0)$, sia $\sup f = +\infty$, sia limitata inferiormente con minimo assoluto -2 in $x = -3$.

31 Abbia come dominio l'insieme $R - \{-1, 1\}$, sia limitata, abbia massimo assoluto 4 per $x = 2$, non abbia minimo assoluto e sia $\inf f = -3$.

32 Abbia come dominio l'insieme $[2, 3)$, sia $\sup f = +\infty$, abbia un punto di minimo assoluto uguale a zero in $x = 2$.

33 Abbia come dominio l'insieme $D = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$, sia decrescente nell'intervallo $(-\infty, 2)$ e crescente in $(5, +\infty)$.

34 Abbia come dominio l'insieme $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, sia pari, abbia massimo assoluto uguale a -2, sia $\inf f = -\infty$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni e rappresentalo nel piano cartesiano.

35 $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}}$ $[(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 0]]$

36 $f(x) = (x + 2)^{x-2}$ $[(-2, +\infty)]$

37 $f(x) = \ln \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 - 3}$ $[[\sqrt{3}, +\infty)]$

38 $f(x) = \arccos (x^2 + x + 1) - \arcsin x$ $[[-1, 0]]$

39 $f(x) = \left[\arctan\left(\dfrac{x+1}{2-x}\right)\right]^{\frac{\ln x}{\sqrt{x+2}}}$ $[(0, 2)]$

40 $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}[1 - \log_2 (3 + x)]}$ $[(-2, -1)]$

41 $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x-3}{x}$ $[(3, +\infty)]$

42 $f(x) = \arctan \ln (x^3 - 1)$ $[(1, +\infty)]$

43 $f(x) = \arccos \left(1 - \sqrt{2x - x^2}\right)$ $[[0, 2]]$

Costruisci il grafico delle seguenti funzioni dopo averne determinato il dominio.

44 $f(x) = \sqrt{2 + x - |x + 1|}$

(Suggerimento: l'espressione della funzione può essere riscritta nella seguente forma:
$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq -1 \\ \sqrt{2x + 3} & x < -1 \end{cases}$. Il dominio è l'insieme $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$; il grafico è composto da un arco di parabola e dalla retta $y = 1$)

45 $f(x) = 1 + \sqrt{x - |2x - 5|}$

46 $f(x) = \begin{cases} 1 - |2x + 3| & x < 0 \\ x^2 - 2 & x \geq 0 \end{cases}$

47 $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<-1 \\ \dfrac{x+1}{x} & -1 \le x \le 3 \\ \dfrac{1}{2}x^2 - 2x & x>3 \end{cases}$

(Suggerimento: nell'intervallo $[-1, 3]$ la curva è la funzione omografica di asintoti $y = 1$ e $x = 0$)

48 $f(x) = \begin{cases} \cos x & x<0 \\ \tan x & x \ge 0 \end{cases}$

49 $f(x) = \begin{cases} 2\sin x - 1 & x<0 \\ 2x^2 & x \ge 0 \end{cases}$

50 Determina il dominio della funzione $f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$ e stabilisci in quali intervalli è positiva.

$[D = \{x \in R \mid x < -1 \vee x > 1\}$; positiva per $x < -1]$

51 Determina il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 18} + \sqrt[4]{\ln(-x^2 + 9x - 17)}$ e stabilisci se il suo grafico è costituito da:

a. un numero illimitato di punti
b. un numero finito di punti
c. nessun punto.

[due punti: $(3, 0)$, $(6, 0)$]

52 Determina il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \sqrt{\ln(x^2-8)}$ e stabilisci se il suo grafico è costituito da:

a. un numero illimitato di punti
b. un numero finito di punti
c. nessun punto.

[nessun punto]

53 Determina il dominio della funzione di equazione $y = \sqrt{\dfrac{\sin^2 x - 1}{\cos x + 1}}$ e stabilisci se il suo grafico è costituito da:

a. un numero illimitato di punti
b. un numero finito di punti
c. nessun punto.

$\left[D = \left\{x \in R \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}\text{; infiniti punti isolati}\right]$

54 Determina il dominio della funzione di equazione $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x} + \sqrt{-x^2-3x}}}$; da quanti punti è costituito il grafico della funzione?

$[D = \varnothing$; nessun punto$]$

55 Determina il dominio della funzione di equazione $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{\ln(\cos x)}$ e indica qual è la sua caratteristica.

$[D = \{x \in R \mid x = 2k\pi,\ k > 0\}]$

56 Sia D_1 il dominio della funzione di equazione $y = \ln(x-4) + \ln(x^2-1)$ e D_2 il dominio della funzione di equazione $y = \ln\left[(x-4)(x^2-1)\right]$; si può dire che:

a. $D_1 = D_2$
b. $D_1 \subset D_2$
c. $D_1 \supset D_2$

Motiva esaurientemente la risposta.

$[D_1 : (4, +\infty),\ D_2 : (-1, 1) \cup (4, \infty)$; **b.**$]$

57 Confronta i domini delle funzioni $f(x) = x \ln x$ e $g(x) = x \ln |x|$ e stabilisci che relazione intercorre fra essi.

$[D_f : (0, +\infty);\ D_g : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)]$

58 Date le funzioni $f(x)=\sqrt{\frac{2\sin x-1}{\tan x}}\ln(\cos x)$ e $g(x)=\frac{\sqrt{2\sin x-1}}{\sqrt{\tan x}}\cos(\ln x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$, che relazione esiste fra i loro domini? $\left[D_1=\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right);\ D_2=\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$

59 Trova i domini delle funzioni $f_1(x)=\sqrt{\ln[\arctan(x+1)]}$, $f_2(x)=\ln\sqrt{\arctan(x+1)}$, $f_3(x)=\ln\arctan\left(\sqrt{x+1}\right)$ e descrivi la relazione che sussiste fra gli insiemi ottenuti. $\left[D_1=\left[\frac{\pi}{4}-1, +\infty\right);\ D_2=D_3=(-1, +\infty)\right]$

60 Date le funzioni $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ e $g(x)=x^2-4$, determina per quali valori di x si ha che $|f(x)|+|g(x)|=|f(x)+g(x)|$. $[x\leq-2\ \vee\ -1<x<1\ \vee\ x\geq 2]$

61 Considerate le funzioni $f(x)=-2x+6$ e $g(x)=\frac{x}{x-1}$, calcola per quali valori di x è verificata la relazione $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}|f(x)\cdot g(x)|$. $\left[x=\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right]$

62 Dopo aver determinato il dominio delle funzioni $f(x)=\log_3(-x)$ e $g(x)=\log_3(9-x)$, calcola per quali valori di x è verificata la relazione $|f(x)-g(x)|=|f(x)+g(x)|$. $[x=-1]$

63 Date le funzioni $f(x)=3^{x^2-1}$ e $g(x)=(x^2-1)\ln x$, dopo averne determinato dominio e segno, stabilisci qual è il dominio della funzione $h(x)=\sqrt{f(x)\cdot g(x)}$. $[(0, 1)\cup(1, +\infty)]$

64 Considerata la funzione $f(x)=\left(\frac{a-1}{a}\right)^{-x}$, stabilisci per quali valori del parametro reale a la funzione è monotòna decrescente. $[a<0]$

65 Stabilisci per quali valori del parametro reale a la funzione $y=\log_{\frac{a^2+2a}{a-1}} x$ è monotòna decrescente. $[-2<a<0]$

66 Stabilisci per quali valori del parametro reale k le funzioni $f(x)=\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^x$ e $g(x)=\log_{k^2-1} x$ sono entrambe monotòne decrescenti. $[-\sqrt{2}<k<1]$

67 Determina in quali intervalli sono identiche le funzioni $f(x)=\sqrt{x^3-1}\cdot\sqrt{4x^2-1}$ e $g(x)=\sqrt{(x^3-1)(4x^2-1)}$. $[[1, \infty)]$

68 Date le funzioni $f(x)=\sin x$ e $g(x)=\begin{cases} x+\pi & x\geq 0 \\ \pi & x<0 \end{cases}$, definisci l'espressione della funzione $h(x)=f(g(x))$ e costruiscine il grafico. $\left[h(x)=\begin{cases} -\sin x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}\right]$

69 Date le funzioni $f(x)=\ln x$ e $g(x)=\begin{cases} x-1 & x>1 \\ 1 & x<1 \end{cases}$, definisci l'espressione della funzione $h(x)=f(g(x))$ e costruiscine il grafico. $\left[h(x)=\begin{cases} \ln(x-1) & x>1 \\ 0 & x<1 \end{cases}\right]$

70 Date le funzioni $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=\begin{cases} x-1 & x<1 \\ 2x & x\geq 1 \end{cases}$, definisci l'espressione della funzione $h(x)=f(g(x))$ e costruiscine il grafico. $\left[h(x)=\begin{cases} x^2-2x & x<1 \\ 4x^2-1 & x\geq 1 \end{cases}\right]$

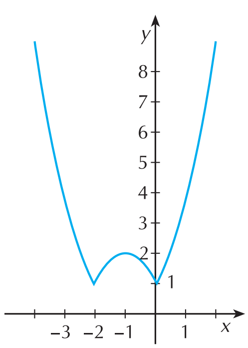
71 Date le funzioni $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$, definisci l'espressione della funzione $h(x) = f(g(x))$ e costruiscine il grafico.
$\left[h(x) = \begin{cases} \ln\,(x+2) & -2 < x \leq 0 \\ 2\ln x & x > 0 \end{cases}\right]$

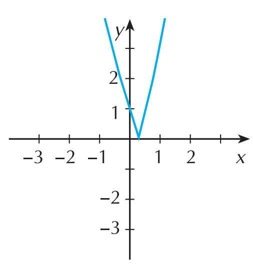
72 Date le funzioni $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \cos x & 0 < x \leq \frac{3}{2}\pi \\ \sqrt{x} & x > \frac{3}{2}\pi \end{cases}$ e $g(x) = \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$ determina il dominio della funzione $g[f(x)]$.
$\left[\left(-\ln 2,\ \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi,\ +\infty\right)\right]$

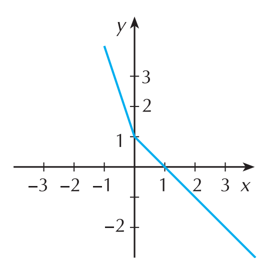
73 Sia $f(x)$ una funzione definita in $D: (0, +\infty)$ tale che sia:
a. $f(1) = 0$
b. $f(ab) = f(a) + f(b)$ con $a, b \in D$.
Dimostra che:
1. $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$
2. $f(a^n) = nf(a)$ per n intero non nullo
3. $f(a^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m} f(a)$ per n, m interi e $m \neq 0$.
Dai un esempio di funzione f che soddisfa le condizioni **a.** e **b.**

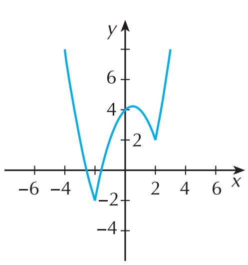
74 Una funzione $f: R \to R$ si dice convessa se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in R$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ vale la seguente uguaglianza $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
Dai un'interpretazione geometrica di tale disuguaglianza e dimostra che la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è convessa.

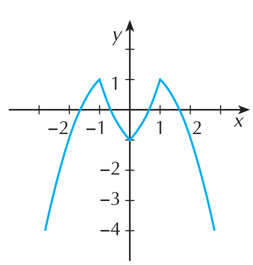
Risultati di alcuni esercizi.

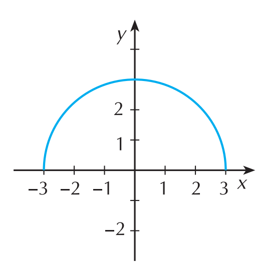
11.


12.


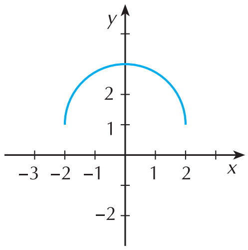
13.


14.


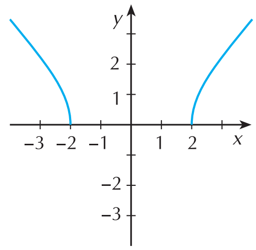
15.


16.


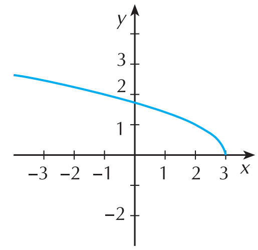
17.



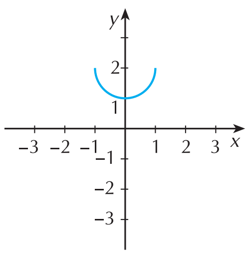
18.



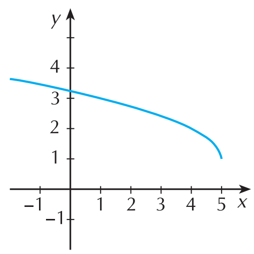
19.



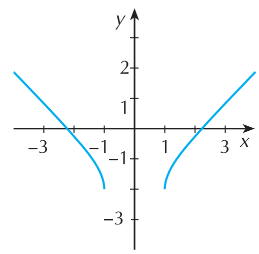
20.



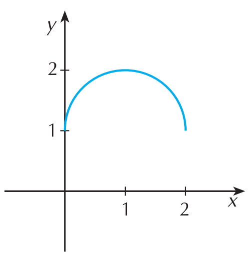
21.



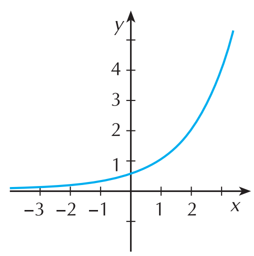
22.



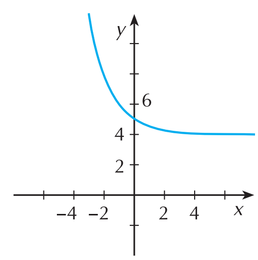
23.



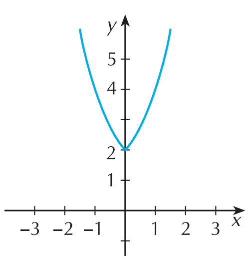
24.



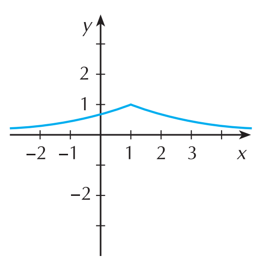
25.



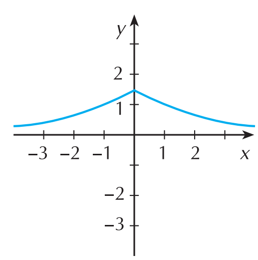
26.



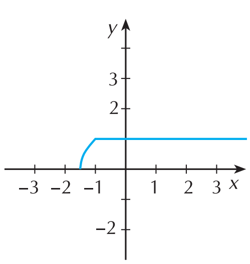
27.



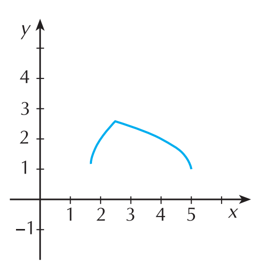
28.



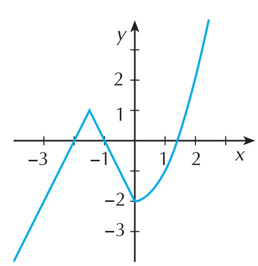
44.



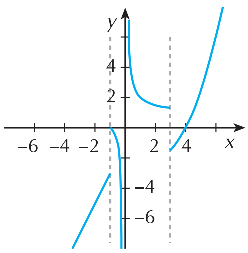
45.



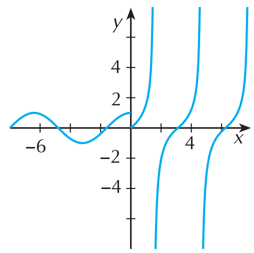
46.



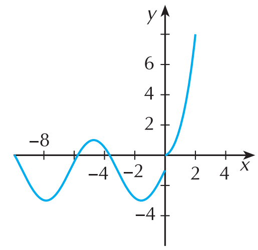
47.



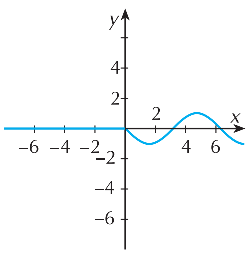
48.



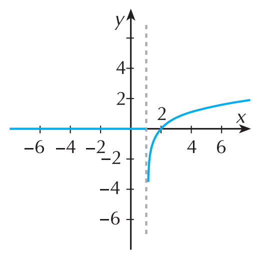
49.



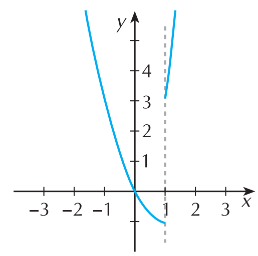
68.



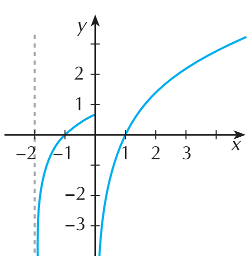
69.



70.



71.



AREA 1: FUNZIONI E LIMITI

2

FUNZIONI E LIMITI

Per ricordare

★ Una funzione ha per limite un numero ℓ finito per $x \to c$ (con c finito o infinito) se la disequazione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ è verificata in un intorno di c.
Una funzione ha per limite ∞ per $x \to c$ (con c finito o infinito) se la disequazione $|f(x)| > M$ è verificata in un intorno di c.
Se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \ell'$ e ℓ e ℓ' sono due valori finiti, allora:

- $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm \ell'$
- $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot \ell'$
- $\lim_{x\to c} [k \cdot f(x)] = k\ell$ con $k \in R$
- $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \ell^n$
- $\lim_{x\to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\ell}{\ell'}$ se $\ell' \neq 0$

★ Nel calcolo di un limite si può giungere a quelle che si chiamano forme di indeterminazione che sono:

$$(+\infty) - (+\infty) \qquad (+\infty) + (-\infty) \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{0}{0} \qquad 1^{\pm\infty} \qquad 0^0 \qquad (\pm\infty)^0$$

Per risolvere queste forme occorre tenere presenti queste regole:

- il limite per $x \to \infty$ di un polinomio è uguale al limite del termine di grado massimo:

  $$\lim_{x\to\infty} \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n\right) = \lim_{x\to\infty} a_0x^n$$

  Per esempio: $\lim_{x\to+\infty} (6x^3 - 4x^2 + 3) = \lim_{x\to+\infty} 6x^3 = +\infty$

  $\lim_{x\to\infty} (1 - 7x^4 + 3x) = \lim_{x\to\infty} -7x^4 = -\infty$

- il limite per $x \to \infty$ del rapporto fra due polinomi è uguale al limite del rapporto fra i termini di grado massimo:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^k + ...a_k}{b_0x^h + ...b_h} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^k}{b_0x^h}$$

e si ha che: se $k > h$ il limite vale ∞

se $k = h$ il limite vale $\dfrac{a_0}{b_0}$

se $k < h$ il limite vale 0

Per esempio: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x-3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x} = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-2}{4x^3+x-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{4x^3} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-1}{2x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

- se $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)}\right)$ si presenta nella forma $\infty - \infty$, si moltiplica e si divide per $\left(\sqrt{A(x)} \mp \sqrt{B(x)}\right)$ e si calcola il limite della funzione che si ottiene.

  Per esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+5}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-2x-5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+5}} = -\infty$$

- se $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{A(x)}{B(x)}$ si presenta nella forma $\dfrac{0}{0}$, semplificando la frazione si riesce di solito ad eliminare la causa dell'indeterminazione.

  Per esempio: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{3x^2-5x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(3x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{3x+1} = \dfrac{4}{7}$

★ Valgono i seguenti limiti notevoli:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

dai quali si ricavano anche i seguenti:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$ in particolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ in particolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^k-1}{x} = k$

★ Una funzione $f(x)$ possiede:

- un **asintoto orizzontale** di equazione $y = \ell$ se: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$
- un **asintoto verticale** di equazione $x = c$ se: $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$
- un **asintoto obliquo** di equazione $y = mx + q$ se: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (con m finito e non nullo)

  $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q$ (con q finito)

Se una funzione possiede asintoto orizzontale, non può avere asintoto obliquo e viceversa, altrimenti avrebbe due comportamenti diversi per $x \to \infty$.

★ Si dice che:

- la funzione $y = f(x)$ è un **infinitesimo** per $x \to c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$
- la funzione $y = f(x)$ è un **infinito** per $x \to c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$.

★ Di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe infinitesime per $x \to c$ diciamo che:

- $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x)$ è dello stesso ordine di $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$
- $f(x)$ è di ordine inferiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

★ Di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe infinite per $x \to c$ diciamo che:

- $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
- $f(x)$ è dello stesso ordine di $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$
- $f(x)$ è di ordine inferiore a $g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Per facilitare il calcolo di limiti di funzioni che, per $x \to \infty$, sono infinite è utile stabilire una gerarchia degli infiniti che indichiamo di seguito in ordine decrescente; per ogni $a > 1$, $\alpha > 0$:

$$a^x \qquad x^\alpha \qquad \log_a x$$

Per esempio: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^3} = +\infty$ perché 2^x è di ordine superiore a x^3

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log_a x} = +\infty$ perché x è di ordine superiore a $\log_a x$

ESERCIZI

SUI LIMITI

Calcola i seguenti limiti.

1 $\lim_{x \to 1} \left[\frac{3(2x-1)}{x^3-1} + \frac{1}{1-x} \right]$ $[1]$

2 $\lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{2\sqrt{x}-1}{16x^2-1}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

3 $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ $\left[\frac{1}{24}\right]$

4 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 x \cdot (1-\sin x)}{x}$ $\left[\frac{1}{\pi}\right]$

5 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x \cdot (1-\sin x)}{x}$ $[0]$

6 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln (x+1)}{3 \sin x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

7 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{4x}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

8 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3+1}{x^3} \right)^{x^3+2}$ $[e]$

9 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{x-1}$ $[e^{-5}]$

10 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln (x+3) - \ln 3}{x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

11 $\lim_{x \to 2} \frac{xe^{x-2}-x}{x^2-x-2}$

(Suggerimento: il limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$; riscrivilo scomponendo numeratore e denominatore: $\lim_{x \to 2} \frac{x(e^{x-2}-1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{e^{x-2}-1}{x-2} \cdot \frac{x}{x+1} \right) = \frac{2}{3} \lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2}-1}{x-2}$) $\left[\frac{2}{3}\right]$

12 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln (x^2+2x+1)}{x^2+2x}$ $[1]$

13 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2(2x-\pi)}{(2x-\pi)^2}$ $[1]$

14 $\lim_{x \to 0} \frac{(x+3x^2)^4 - x^4}{2x^5}$ $[6]$

15 $\lim_{x \to 1} \frac{e^{2x-1}-e^x}{2x-2}$ $\left[\frac{1}{2}e\right]$

16 $\lim_{x\to 1} \dfrac{(1+\ln x)^3-1}{\ln x}$ $[3]$

17 $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{2x}}-1\right)$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

18 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2 x+2\sin x-3}{2x-\pi}$ $[0]$

19 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2x-\pi}-\sin x}{4x^2-\pi^2}$ $\left[\dfrac{1}{2\pi}\right]$

20 $\lim_{x\to 3} 2^{\frac{1}{3-x}}$ $[x\to 3^-: +\infty;\ x\to 3^+: 0]$

21 $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+7}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$ $[e^{-4}]$

22 $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x-1}{\log_5(x+1)}$ $[\ln^2 5]$

23 $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{2-3x}$ $[e^{12}]$

24 $\lim_{x\to 1} \dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}\right)\ln x}{(1-x)^2}$ $\left[-\dfrac{1}{4}\right]$

25 $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}}$ $\left[\dfrac{1}{e}\right]$

26 $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+3}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$ $\left[\dfrac{1}{e^8}\right]$

27 $\lim_{x\to\infty} \left(1+\tan\dfrac{5x-1}{x^2+2}\right)^{\cot\frac{5x-1}{x^2+2}}$ $[e]$

28 Determina il valore del parametro reale a in modo che sia $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{2x^2-ax-a^2}=\dfrac{1}{2}$. $[a=0]$

29 Determina i valori dei parametri a e b per i quali si ha $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{ae^x+bx^2+1}{2x^2}=\dfrac{1}{3}$. $\left[a=0 \wedge b=\dfrac{2}{3}\right]$

30 Determina i valori dei parametri reali a e b per i quali si ha $\lim_{x\to\infty} \dfrac{ax^4-3x^2+b}{2bx^2+5}=\dfrac{3}{4}$. $[a=0 \wedge b=-2]$

31 Data la funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax^2-4}}{bx+3}$, determina i parametri a e b in modo che si abbia $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ e $f(1)=0$. $[a=4 \wedge b=1]$

32 Considerata la funzione $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{ax^2-3b}{x^2+2}}$, determina i parametri a e b in modo che si abbia $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$ e $\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{9}$. $\left[a=-1 \wedge b=-\dfrac{4}{3}\right]$

33 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-8} & x < 0 \\ \dfrac{1-\cos ax}{x^2} & x > 0 \end{cases}$, determina il valore del parametro a in modo esista il limite di $f(x)$ per $x \to 0$. $\left[a = \pm\frac{1}{2}\right]$

34 Determina i valori dei parametri a e b per i quali si ha che $\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\dfrac{e^{x+a}+7}{e^{bx}-1}\right) = 0$.
[$b > 1$, a qualsiasi]

35 Stabilisci per quali valori reali dei parametri a, b, c si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-(ax^2+bx+c)\right]=0$$ [$a=1$, $b=0$, $c=-1$]

36 E' data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ e centro O. Preso un punto P sull'arco AM, essendo M il punto medio dell'arco AB, siano s la retta tangente in B e t la retta tangente in P alla semicirconferenza che si intersecano in K; siano poi H il punto di intersezione di t con la retta AB e L la proiezione ortogonale di P su s. Posto $P\widehat{O}H = x$, sia $f(x) = \overline{OH}\cdot\overline{KL}$; calcola il limite di $f(x)$ per $x \to \dfrac{\pi}{2}$. $[r^2]$

37 Sia P il punto, oltre all'origine, in cui la parabola $y = x^2$ incontra la retta $y = mx$; indicata con H la proiezione di P sull'asse x, siano Q e R rispettivamente i punti in cui la tangente e la normale alla parabola in P intersecano l'asse x. Calcola il limite del rapporto fra le aree dei triangoli OPH e QPR al tendere di P verso l'origine degli assi. [2]

38 Sia AOB un settore circolare di ampiezza $\dfrac{2}{3}\pi$ di una circonferenza di centro O e raggio r; preso un punto P sull'arco AB, siano H la sua proiezione sulla corda AB e K la sua proiezione sul raggio OA. Calcola il limite del rapporto $\dfrac{\overline{PH}+\overline{PK}}{\overline{AK}}$ al tendere di P ad A. $[+\infty]$

39 E' data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$; una retta parallela al diametro incontra la retta tangente in B nel punto P e la semicirconferenza in due punti dei quali K è il più distante da P. Calcola il limite a cui tende il rapporto fra le aree del triangolo ABP e del trapezio $ABPK$ al tendere di P verso B. $\left[\frac{1}{2}\right]$

40 Data una circonferenza Γ di centro O e raggio unitario, traccia da O una semiretta s che incontra la circonferenza in Q. Indicato con P un generico punto di s esterno a Γ, traccia da esso le tangenti alla circonferenza e siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, calcola il limite per $x \to +\infty$ del rapporto $k = \dfrac{\overline{AQ}+\overline{BQ}}{\overline{AB}}$. $[\sqrt{2}]$

41 Sono dati un quadrato $PQRS$ di lato ℓ e una circonferenza di centro O e raggio $\dfrac{\ell}{2}$ tangente al lato SR del quadrato nel vertice R in modo che O si trovi sul prolungamento del lato QR dalla parte di R. Per il punto medio B del lato SR si traccia una retta che incontra il lato PS del quadrato in A e la circonferenza in C e in D (con C più vicino a B). Calcola le misure delle aree del triangolo SBA e del segmento circolare delimitato dalla corda CD e dall'arco CRD in funzione dell'ampiezza x dell'angolo $S\widehat{B}A$ e valuta il limite del rapporto fra queste due aree al tendere di x a 0. [0]

42 Sia L un punto di una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$ e sia K un punto di AB tale che $\overline{AL} = \overline{AK}$. Posto $\widehat{ABL} = x$, calcola in funzione di x il rapporto fra l'area del cerchio inscritto nel triangolo ABL e l'area del triangolo ALK e determinane il limite al tendere di L ad A. $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

43 Dato un quadrato $ABCD$ di lato ℓ, costruisci la semicirconferenza di diametro AB esterna al quadrato; prendi poi un punto P su AB e un punto Q su AD in modo che sia $\overline{PB} = \overline{AQ}$. Indicato con K il punto della semicirconferenza la cui proiezione ortogonale su AB coincide con P, calcola il rapporto tra l'area del triangolo PAQ e quella del triangolo KPB al tendere di P prima a B e poi ad A. [quando $P \to B : +\infty$; quando $P \to A : 0$]

44 Sul lato $\overline{AB} = \ell$ del quadrato $ABCD$ ed esternamente ad esso si costruisce un triangolo equilatero ABE. Preso un punto P su AE e un punto Q su BC in modo che sia $AP \cong BQ$, considera il solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo APD di una rotazione completa attorno alla retta AD e il solido che si ottiene da una analoga rotazione del triangolo PBQ attorno alla retta BC. Posto $\overline{AP} = x$, esprimi in funzione di x il rapporto fra i volumi dei due solidi e calcola il limite dell'espressione ottenuta per P che tende a A. [0]

45 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, considera un punto P sull'arco OA della parabola $y = x^2$ delimitato dall'origine O e dal punto $A(1, 1)$. Tracciata la tangente t alla parabola in A, trova l'espressione della distanza PT del punto P dalla retta t e determina il limite del rapporto $k = \dfrac{\overline{PA}^2}{\overline{PT}}$ al tendere di P ad A. $[5\sqrt{5}]$

46 Date due circonferenze C_1 e C_2 di raggio unitario tangenti esternamente in O, sia t la retta tangente comune passante per O; preso un punto P su t, considera la circonferenza di raggio minore avente centro in P e tangente a C_1 e C_2 e sia r_1 il suo raggio.
Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale di centro O, avente la retta t come asse delle ordinate orientata da O verso P e la retta passante per i centri di C_1 e C_2 come asse delle ascisse, considera la parabola di equazione $y = x^2$. Sia r_2 il raggio della circonferenza di centro P e tangente a tale parabola nel suo vertice. Calcola il limite del rapporto $\dfrac{r_1}{r_2}$ al tendere di P ad O. [0]

SUGLI ASINTOTI

47 Determina i valori dei parametri reali a, b, c per i quali la funzione $f(x) = \dfrac{3ax^2 + 2bx + 8}{x + c}$ ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = -2$ e come asintoto verticale la retta $x = -1$.
(Suggerimento: la retta $y = -2$ è asintoto orizzontale se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$; la retta $x = -1$ è asintoto verticale se $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$ e ciò capita solo se il denominatore si annulla per $x = -1$) $[a = 0 \ \wedge \ b = -1 \ \wedge \ c = 1]$

48 Determina i valori reali dei parametri a e b in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x + a}{x + b}$ passi per il punto di coordinate $(1, 2)$ e abbia come asintoto verticale la retta di equazione $x - 3 = 0$. $[a = -4 \ \wedge \ b = -3]$

49 Determina i parametri reali a e b della funzione $y = \dfrac{ax^2 + 3x + b}{2x^2 + 1}$ in modo che passi per l'origine degli assi e ammetta come asintoto orizzontale la retta $y = 4$. $[a = 8, \ b = 0]$

50 Determina i valori di a e b per i quali la funzione $f(x) = \dfrac{1 - ax^2}{bx^2 - 4}$ ha come asintoto verticale la retta $x = 2$ e come asintoto orizzontale la retta $y = 1$. $[a = -1,\ b = 1]$

51 Data la funzione $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{cx + 2}$, determina i valori reali dei parametri a, b, c in modo che essa abbia la retta $x = -2$ come asintoto verticale e la retta $y = -1$ come asintoto orizzontale. $[a = 0,\ b = -1,\ c = 1]$

52 Determina i valori reali dei parametri a, b e c in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - b}}{ax + c}$ passi per i punti $A(1,\ 0)$, $B(2,\ 3)$ e abbia come asintoto verticale la retta di equazione $3x + 2 = 0$. $\left[a = \dfrac{\sqrt{3}}{8} \ \wedge\ b = 1 \ \wedge\ c = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\right]$

53 Determina i valori dei parametri reali a e b in corrispondenza dei quali la funzione $f(x) = \ln\dfrac{3ax + b}{x + 2}$ ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y - \ln 3 = 0$ e passa per il punto $A(2,\ 0)$. $[a = 1 \ \wedge\ b = -2]$

54 Determina i valori reali dei coefficienti a, b, c in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{ax^3 - 2x^2 + 5}{bx^2 + ax - c}$ abbia come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = -1$ e per asintoti verticali le rette di equazioni $x = \pm\sqrt{3}$. $[a = 0,\ b = 2,\ c = 6]$

55 Data la funzione $f(x) = \log_2 \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + 4}$, determina i valori reali dei coefficienti a, b, c in modo che $f(x)$ abbia per asintoto orizzontale destro la retta di equazione $y = 1$ e passi per il punto $A(1,\ 0)$. $[a = 0,\ b = 2,\ c = 3]$

56 Data la funzione $f(x) = \dfrac{3x + b + \sqrt{x^2 - 4}}{ax}$, determina i valori reali dei parametri a e b in modo che $f(x)$ ammetta la retta $y = \dfrac{1}{2}$ come asintoto orizzontale sinistro e passi per il punto di coordinate $(2,\ 1)$. Qual è in questo caso l'equazione dell'asintoto orizzontale destro? $[a = 4,\ b = 2,\ y = 1]$

57 Determina i parametri reali a, b, c per i quali la funzione $f(x) = \dfrac{bx^2 + \sin ax}{\pi x + cx^2}$ ammette la retta $y = 2$ come asintoto orizzontale, passa per il punto di coordinate $(\pi,\ 1)$ ed è $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{3}{\pi}$. $[a = 3,\ b = 2,\ c = 1]$

58 Determina i valori reali dei parametri a, b, c per i quali la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{ax^2 + 2x + 1}}{bx + c}$ non è definita in $x = 0$, ha come asintoto orizzontale destro la retta $y = 4$ e passa per il punto di coordinate $(-1,\ 0)$. $\left[a = 1,\ b = \dfrac{1}{4},\ c = 0\right]$

59 Determina i valori dei parametri reali a e b in corrispondenza dei quali la funzione $f(x) = \dfrac{ax^3 - 4}{x^2 - bx + 1}$ ha come asintoto obliquo la retta di equazione $2x - y + 1 = 0$. $\left[a = 2 \ \wedge\ b = \dfrac{1}{2}\right]$

60 Determina i valori di a e di b in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{3ax^2 - 2}{x + b}$ ammetta come asintoto obliquo la retta di equazione $y = 9x - 27$. $[a = 3,\ b = 3]$

61 Determina i valori dei parametri reali a, b, c per i quali la funzione $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + 1}{x + 1}$ ammette come asintoto obliquo la retta $y = 2x$. $[a = 0,\ b = 2,\ c = 2]$

62 Determina i valori reali dei parametri a, b, c in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x + c}$ passi per il punto $P(1, 0)$, abbia come asintoto verticale la retta di equazione $x + 2 = 0$ e come asintoto obliquo una retta di coefficiente angolare 3. $[a = 3,\ b = -3,\ c = 2]$

63 Trova i valori reali dei parametri a, b, c in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{x\sqrt{a^2x^2 - 1}}{bx + c}$ abbia come asintoto obliquo destro una retta di coefficiente angolare 2, come asintoto verticale la retta $2x - 1 = 0$ e intersechi l'asse x, oltre che nell'origine, nel punto di ascissa 1. Quali sono le equazioni degli asintoti obliqui delle funzioni ottenute?

$$\left[a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{4}\ \vee\ a = -1,\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4};\ \text{asintoti: } y = 2x + 1,\ y = -2x - 1\right]$$

64 Considerata la funzione $f(x) = \log_b(ax + b) + c$, determina i valori reali dei parametri in essa contenuti in modo che $f(x)$ abbia come asintoto verticale la retta $x + 3 = 0$, passi per il punto di coordinate $(0, 5)$ e sia monotòna crescente. $\left[f(x) = \log_b\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + 5,\ b > 1\right]$

65 Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{ax^3 + x^2 + c}{bx^2 - c}$ stabilisci:

a. in quali condizioni esiste asintoto orizzontale $[a = 0\ \wedge\ b \neq 0]$
b. in quali condizioni esiste asintoto obliquo $[a \neq 0\ \wedge\ b \neq 0]$
c. in quali condizioni la funzione non ha asintoti $[a = 0\ \wedge\ b = 0\ \wedge\ c \neq 0]$
d. per quali valori dei parametri la funzione ha come asintoto obliquo la retta $3x - 2y + 1 = 0$ e interseca l'asse x nel punto di ascissa 1. $[a = 3,\ b = 2,\ c = -4]$

66 Considerate le due funzioni $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^4 + 7}}{ax^2 + bx + c}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{7x^4 + 2}}{cx^2 + bx + c}$, determina per quali valori dei parametri a, b, c sono verificate contemporaneamente le seguenti condizioni:

- entrambe le funzioni hanno lo stesso asintoto orizzontale
- la funzione $f(x)$ ha un solo asintoto verticale
- si ha che $f(0) = \sqrt{7}$.

In queste ipotesi, quanti sono gli asintoti verticali della funzione $g(x)$?

$$\left[a = \sqrt{\frac{2}{7}},\ b = \pm 2\sqrt[4]{\frac{2}{7}},\ c = 1;\ g(x) \text{ non ha asintoti verticali}\right]$$

67 Considerate le funzioni $f(x) = \dfrac{\log_3(x^2 + a)}{x^2 + b}$ e $g(x) = \dfrac{cx}{\sqrt{x^2 + b}}$, determina i valori reali dei parametri a, b, c in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

- $f(2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}g(2)$
- $g(x)$ abbia come asintoto orizzontale destro la retta $y = 1$
- $f(x)$ abbia come asintoto verticale la retta $x = 1$. $[a = 5,\ b = -1,\ c = 1]$

68 Data la funzione $f(x) = \frac{\ln(2x^{\alpha}+3)}{\ln(x^3-1)} \cdot \frac{\sqrt{2x^2+1}}{ax^2+bx-2}$ con $\alpha > 0$, determina i valori dei parametri reali che in essa compaiono in modo che:

- $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = \infty$
- abbia come asintoto orizzontale la retta $y = \frac{2}{3}$. $[\alpha = 2,\ a = 0,\ b = \sqrt{2}]$

INFINITI E INFINITESIMI

Dopo aver verificato che le seguenti funzioni sono infinitesime, stabilisci se sono confrontabili.

69 $f(x) = \frac{\sqrt{5x + \sqrt{x^2+1}}}{2x+3}$ $\quad g(x) = 7^{-5x}$ $\quad$ per $x \to +\infty$
[$f(x)$ infinitesimo inferiore a $g(x)$]

70 $f(x) = 0{,}3^{2x}$ $\quad g(x) = \frac{9x^2+1+6x}{3x^3}$ $\quad$ per $x \to +\infty$
[$f(x)$ infinitesimo superiore a $g(x)$]

71 $f(x) = 2\sin x - x^2 + x$ $\quad g(x) = \cos x + \sin x - 2x^3 - 1$ $\quad$ per $x \to 0$
[infinitesimi dello stesso ordine]

72 $f(x) = \sqrt{1+\cos x} - \sqrt{2}$ $\quad g(x) = x + \tan x$ $\quad$ per $x \to 0$
[$f(x)$ infinitesimo superiore a $g(x)$]

73 $f(x) = (1 - \sin x)\tan x$ $\quad g(x) = \cos x$ $\quad$ per $x \to \frac{\pi}{2}$
[infinitesimi dello stesso ordine]

Determina l'ordine dei seguenti infinitesimi.

74 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad$ [1]

75 $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1} - x$ $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad$ [2]

76 $f(x) = \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ $\quad$ per $x \to 0$ $\quad$ [2]

77 $f(x) = e^{2x} - 1$ $\quad$ per $x \to 0$ $\quad$ [1]

Stabilisci per quale valore del parametro reale positivo k le seguenti funzioni sono infinitesime di ordine n per $x \to x_0$ in ciascuno dei seguenti casi.

78 $f(x) = \sqrt{(2x-3)^k}$ $\quad$ per $x \to \frac{3}{2}$ $\quad$ e $\quad n = 2$ $\quad$ $[k = 4]$

79 $f(x) = \sin^k x\,(e^{3x}+1)$ $\quad$ per $x \to 0$ $\quad$ e $\quad n = 3$ $\quad$ $[k = 3]$

80 $f(x) = \tan^k x - 1 + \cos^2 x$ $\quad$ per $x \to 0$ $\quad$ e $\quad n = 4$ $\quad$ $[k = 2]$

81 $f(x) = \frac{1}{x^{2k} - 2x}$ $\quad$ per $x \to \infty$ $\quad$ e $\quad n = 6$ $\quad$ $[k = 3]$

Dopo aver verificato che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono degli infiniti, stabilisci se sono confrontabili.

82 $f(x) = \ln 3x + 4$ $\quad g(x) = \sqrt[5]{2x^2 + 1}$ $\quad$ per $x \to \infty$

[$f(x)$ infinito inferiore a $g(x)$]

83 $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ $\quad$ per $x \to 0$

[infiniti dello stesso ordine]

84 $f(x) = (x^2 - 2)\tan x$ $\quad g(x) = x^2 + 2$ $\quad$ per $x \to \infty$

[infiniti non confrontabili]

85 $f(x) = (x - 1)\ln^2 x$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad$ per $x \to \infty$

[$f(x)$ infinito inferiore a $g(x)$]

86 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^5 - 1}}{(x - 2)^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^3 + x - 1}{x^2 - 4}$ $\quad$ per $x \to 2$

[$f(x)$ infinito superiore a $g(x)$]

Determina l'ordine dei seguenti infiniti.

87 $f(x) = \dfrac{1}{(1 - \sin x)^2}$ $\quad$ per $x \to \dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ [4]

88 $f(x) = \dfrac{2x + 7}{x - 1}$ $\quad$ per $x \to 1$ $\quad$ [1]

89 $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 - \sin x}$ $\quad$ per $x \to \dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ [3]

90 $f(x) = \dfrac{10 - x}{x^5 + x^3}$ $\quad$ per $x \to 0$ $\quad$ [3]

91 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 9} - x^3$ $\quad$ per $x \to \infty$ $\quad$ [3]

92 $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$ $\quad$ per $x \to 0^+$ $\quad$ [1]

AREA 1: FUNZIONI E LIMITI

3

LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI

Per ricordare

★ Una funzione $f(x)$ definita in un insieme D è **continua** in un punto x_0 di accumulazione per D se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Quindi per vedere se una funzione è continua si deve:

- calcolare $f(x_0)$
- calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- verificare che i due valori trovati coincidano.

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nel punto x_0, allora sono continue in x_0 anche le funzioni:

- $-f(x)$ e $|f(x)|$
- $f(x) \pm g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$ e in particolare $kf(x)$ e $[f(x)]^n$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e in particolare $\dfrac{1}{g(x)}$ se $g(x_0) \neq 0$

In conseguenza di ciò sono continue nel loro insieme di definizione:

- le funzioni polinomiali
- le funzioni razionali fratte
- le funzioni logaritmiche ed esponenziali
- le funzioni goniometriche fondamentali
- le funzioni composte se sono continue tutte le funzioni componenti.

★ Se una funzione non è continua in un punto x_0 si dice che x_0 è un **punto di discontinuità** o anche che è un **punto singolare**.

I punti di discontinuità si possono classificare con il seguente criterio:

- discontinuità di **prima specie** se il limite sinistro e il limite destro sono finiti ma diversi:

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \qquad \text{con} \quad \ell_1 \neq \ell_2$$

- discontinuità di **seconda specie** se almeno uno dei due limiti dalla sinistra o dalla destra è infinito o non esiste:

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \ \vee \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \quad \vee \quad \nexists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$$

- discontinuità di **terza specie** o **eliminabile** se esiste finito il limite per $x \to x_0$ ma tale valore è diverso da quello assunto dalla funzione o se la funzione non esiste in x_0:

  $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

★ Per le funzioni continue valgono alcune proprietà fondamentali che sono enunciate dai seguenti teoremi:

- **Teorema di Weierstrass.** Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, essa è limitata in tale intervallo ed esiste almeno un punto appartenente ad $[a, b]$ in cui assume il suo valore massimo ed almeno un punto in cui assume il suo valore minimo.
- **Teorema di esistenza degli zeri.** Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ nel quale la funzione si annulla.

Esercizi

Stabilisci per quali valori reali dei parametri che in esse compaiono le seguenti funzioni sono continue nel loro insieme di definizione.

1 $f(x) = \begin{cases} \cos x - 1 & x \leq 0 \\ e^{ax} + b & 0 < x < 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}$ $[a = 0,\ b = -1]$

2 $f(x) = \begin{cases} 3a \sin x + b & x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos x + 2 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & x \geq \pi \end{cases}$ $\left[a = \frac{\pi}{3},\ b = 2 - \pi\right]$

3 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & x \leq -2 \\ ax^2 - 2x - 3 & -2 < x < 3 \\ b \log_2(x - 1) & x \geq 3 \end{cases}$ $\left[a = -\frac{1}{4},\ b = -\frac{45}{4}\right]$

4 Dopo averne determinato il dominio, calcola il valore del parametro a per il quale la funzione

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x} & x > 0 \\ a(x + 2) & x \leq 0 \end{cases}$ è continua in $x = 0$. $\left[a = \frac{1}{4}\right]$

5 Determina per quali valori dei parametri reali a e b è continua in $x = 0$ la funzione

$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{x^3 - bx}{ax^2 - |x^2 - x|} & x \neq 0 \end{cases}$. $[\forall a \in R \ \wedge \ b = 0]$

6 Trova i punti di discontinuità della funzione $f(x) = \ln \sin^2 x$ e classificali.
[$x = k\pi$, seconda specie]

7 Studia la continuità della funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4} & x \neq \pm 2 \\ x^3 & x = 2 \\ 2^x & x = -2 \end{cases}$

classificando le eventuali discontinuità. [continua in $x = 2$, disc. eliminabile in $x = -2$]

8 Studia i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}$ [$x = 1$: seconda specie; $x = -2$: prima specie]

b. $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{1 - \cos x}}$ [$x = 2k\pi$: terza specie (eliminabile)]

c. $f(x) = \begin{cases} e^{x-2} & x < 3 \\ 5 & x = 3 \\ \dfrac{\sin(x-3)}{x-3} & x > 3 \end{cases}$ [$x = 3$: prima specie]

9 Studia i punti di discontinuità della funzione $f(x) = \begin{cases} \ln(|x| - 2) & x < -2 \ \vee \ x > 2 \\ x(x+2) & -2 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{\sin x} & 0 < x \leq 1 \\ 5 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

[$x = 0$: continua, $x = 1$: prima specie, $x = \pm 2$: seconda specie]

10 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & -1 \leq x < 0 \\ x + 2 & x < -1 \end{cases}$ verifica che $f(x)$ è continua e tracciane il grafico. A partire da esso, costruisci poi i grafici di:

a. $y = |f(x)|$ **b.** $y = f(|x|)$ **c.** $y = f(x) + 1$
d. $y = f(x+1)$ **e.** $y = 2f(x)$ **f.** $y = f(2x)$.

11 Determina il valore reale di a per il quale la funzione $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \leq 4 \\ \dfrac{ax^2 - 8}{x} & x > 4 \end{cases}$ è continua in $x = 4$; posto poi $a = 1$, determina il tipo di discontinuità che si presenta nello stesso punto.
[continua per $a = 2$, discontinuità di prima specie se $a = 1$]

12 Considerata la funzione $f(x) = \begin{cases} 5^{3-x} & x \leq 1 \\ -ax + b & 1 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & x \geq 3 \end{cases}$ determina i valori dei parametri reali a e b per i quali $f(x)$ è continua in $x = 1$ e presenta una discontinuità di prima specie con salto uguale a 4 in $x = 3$.
$\left[a = \dfrac{21}{2},\ b = \dfrac{71}{2};\ a = \dfrac{29}{2},\ b = \dfrac{79}{2}\right]$

13 Determina il valore del parametro reale c in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{|x| - 1}{|x^2 - c|}$ abbia in $x = 1$ e in $x = -1$ una discontinuità di prima specie con salto uguale a 1. [$c = 1$]

14 Determina i valori dei parametri reali a e b (con $a > 0$) in modo che i punti $x = -3$ e $x = 1$ siano discontinuità di seconda specie per la funzione $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{|x^2 + ax| + b}$.

$[a = 5,\ b = -6\ \vee\ a = 2,\ b = -3]$

15 Stabilisci per quali valori dei parametri reali a e b risulta continua e inoltre passa per il punto di coordinate $(0, 4)$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-x} + 2b & -1 \le x \le 0 \\ b \ln(x+1) + 2a & x > 0 \end{cases}$.

$[a = 2,\ b = 1]$

16 Stabilisci per quale valore del parametro reale a risulta continua la funzione di equazione $y = \begin{cases} |x-3| + a|x-2| & x \ge 0 \\ \sqrt{x^2+4} & x < 0 \end{cases}$.

$\left[a = -\dfrac{1}{2}\right]$

17 Stabilisci per quale valore del parametro reale a la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} + a & x \ne 0 \\ 2a - 1 & x = 0 \end{cases}$ si può prolungare con continuità nell'origine e determina, in corrispondenza di tale valore, se $f(x)$ possiede asintoto orizzontale e qual è la sua equazione.

[$a = 2$, asintoto orizz. sinistro $y = 2$]

18 Trova il valore del parametro reale a in modo che abbia una discontinuità eliminabile in $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - 1}{x} & x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{e^{3x} - 1} & x > 0 \end{cases}$.

$\left[a = \dfrac{2}{3}\right]$

19 Stabilisci, motivando adeguatamente la risposta, se è continua in $x = 2$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{|x-2|(x-1)} & x \ne 1\ \wedge\ x \ne 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$. Traccia poi il grafico di $f(x)$ e determinane il codominio.

[non continua in $x = 2$, codominio: $(-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$]

20 Trova i valori dei parametri reali a e b per i quali risulta continua su tutto R la funzione $f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Dopo averne costruito il grafico, determina il massimo e il minimo assoluti della funzione.

[$a = -1$, $b = 1$, minimo ass. -2, massimo ass. 2]

21 Considerata la funzione $f(x) = \begin{cases} (1 + x^a)^{\frac{1}{x^2}} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ (1 + \tan x)^{\cot x} & 0 < x \le \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{c\left(e^x - e^{\frac{\pi}{4}}\right)}{\sin x - \cos x} & x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ determina per quali valori dei parametri reali a, b, c essa è continua.

$\left[a = 2,\ b = e,\ c = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right]$

22 Verifica se le seguenti funzioni soddisfano il teorema degli zeri negli intervalli indicati e determina i punti di tali intervalli in cui $f(x) = 0$.

a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ in $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ $[x = 1]$

b. $f(x) = 3x^3 - 19x^2 - 18x + 8$ in $[0, 3]$ $\left[x = \frac{1}{3}\right]$

c. $f(x) = \log_3 (x^2 - 9) - 3x + 16$ in $[4, 6]$ $[f(4) \cdot f(6) > 0]$

23 Dimostra, utilizzando un opportuno teorema, che l'equazione $e^{\tan^2 x} + \dfrac{5}{\ln(\sin x)}$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

24 Dimostra, utilizzando un opportuno teorema, che nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione di equazione $y = e^{\sin x} + \sqrt{x \cos x} - \ln(x + 3)$ interseca l'asse delle ascisse almeno una volta.

25 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 9| - a & 0 \le x < 4 \\ bx + c & x \ge 4 \end{cases}$ determina in quali ipotesi l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[3, 5]$ in base al teorema degli zeri ed inoltre è $f(4) = -1$; posto poi $b = 2$, determina le soluzioni che appartengono a questo intervallo.

$\left[\begin{array}{l} a = 8,\ b > 1,\ c = -1 - 4b; \\ \text{per } b = 2 : x = \frac{9}{2} \end{array}\right]$

26 Trova una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[0, 1]$ che ammette infiniti zeri positivi minori di 1 e uno zero in $x = 0$. $\left[\text{esempio: } f(x) = x \sin \frac{\pi}{2x - 1}\right]$

27 Usando in modo opportuno il teorema degli zeri, dimostra che la funzione $f(x) = e^{-x} \sin x$ possiede infiniti zeri. Dimostra poi che la funzione $f(x) = e^{-x} + \sin x$ possiede infiniti zeri per $x > 0$ e nessuno zero per $x < 0$.
(Suggerimento: sfrutta il fatto che $\sin x$ è una funzione periodica e che $e^{-x} \ge 1$ per $x \le 0$)

Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni assegnate, verifica che soddisfano le ipotesi del teorema di Weierstrass e determinane massimo e minimo assoluti.

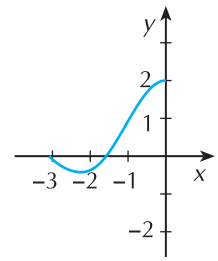
28 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 3x} & 0 \le x < 3 \\ -x + 3 & 3 \le x \le 5 \\ x^2 - 10x + 23 & 5 < x \le 7 \end{cases}$ [massimo = 2; minimo = −2]

29 $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x^2 - 4x} & -2 \le x < 0 \\ \frac{5}{4}x & 0 \le x \le 4 \\ 5 - \sqrt{-x^2 + 12x - 32} & 4 < x \le 7 \end{cases}$ [massimo = 5; minimo = −2]

30 $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 4x & -2 \le x \le 0 \\ -\sqrt{-x^2 + 2x} & 0 < x < 1 \\ -5x^2 + 20x - 16 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ [massimo = 4; minimo = −1]

31 Stabilisci se la funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x < 0 \\ e^{-x} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1+\ln x} & 1 < x \leq e \end{cases}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass; in caso contrario modifica la definizione della funzione in modo che il teorema sia applicabile.

32 Determina il valore del parametro a in modo che la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & x < 0 \\ |x^2 - 3x + 2| & x \geq 0 \end{cases}$ verifichi le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-\pi, 4]$. Considerato che il grafico di questa funzione nell'intervallo $[-\pi, 0)$ è quello in figura, tracciane il grafico completo in $[-\pi, 4]$ e determina poi il minimo e il massimo assoluti di $f(x)$.



$[a = 2$; minimo assoluto in $x \approx -2{,}25 : f(-2{,}25) \approx -0{,}43$; massimo assoluto in $x = 4 : f(4) = 6]$

33 Considerata la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ \ln|x| & |x| \geq 1 \end{cases}$ determina:

- i suoi zeri
- il segno della funzione
- i limiti agli estremi del dominio.

Costruiscine il grafico e studia la continuità.

34 Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x \leq 1 \\ a \cos(x-1) & 1 < x \leq 2\pi \end{cases}$; determina il valore del parametro reale a in modo che $f(x)$ soddisfi le ipotesi del teorema di Weierstrass e trovane poi il massimo e il minimo assoluti. Costruisci quindi il grafico di $f(x)$.

$[a = e^{-1}$; minimo: $-e^{-1}$, massimo: $1]$

35 Di una funzione $f(x)$ si sa che:

- ha dominio $D : (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$
- la sua espressione è una frazione che ha un radicale quadratico al denominatore e un polinomio al numeratore
- ha come asintoto orizzontale sinistro la retta $y + 2 = 0$ e come asintoto orizzontale destro la retta $y - 2 = 0$.

Scrivi una possibile espressione di $f(x)$.

$\left[\text{esempio: } f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-25}}\right]$

36 Di una funzione $f(x)$ si sa che:

- ha dominio $D : (-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$
- ha come asintoto orizzontale la retta $y = 3$
- interseca l'asse y nel punto di ordinata -1
- ha come asintoto verticale la retta $x = -1$ ma la retta $x = 4$ non è un asintoto.

Scrivi una possibile espressione di $f(x)$.

$\left[\text{esempio: } f(x) = \dfrac{3x^2 - 13x + 4}{x^2 - 3x - 4}\right]$

37 Di una funzione $f(x)$ si sa che:

- ha dominio $D : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- ha come asintoto orizzontale l'asse x e come asintoto verticale la retta $x = 1$

- passa per l'origine
- è positiva per $x < 0 \ \vee \ x > 1$ e negativa altrove.

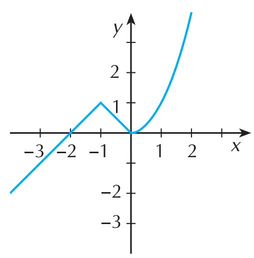
Scrivi una possibile espressione di $f(x)$. $\left[\text{esempio: } f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}\right]$

38 Determina l'equazione di una funzione che soddisfa le seguenti proprietà:
- sia simmetrica rispetto all'asse y
- ammetta come asintoto orizzontale la retta $y = 4$
- ammetta come asintoti verticali le rette $x = 1$ e $x = -1$
- assuma il valore 2 per $x = 0$. $\left[\text{esempio: } f(x) = \dfrac{4x^2 - 2}{x^2 - 1}\right]$

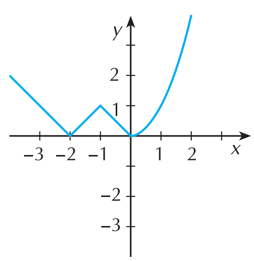
39 Determina l'equazione di una funzione che soddisfa le seguenti proprietà:
- ha dominio $D: (-1, +\infty)$
- la sua espressione è una frazione che ha un'esponenziale di base e al numeratore e un radicale quadratico al denominatore
- ha asintoto verticale destro di equazione $x = -1$
- è sempre positiva nel suo dominio. $\left[\text{esempio: } f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right]$

Risultati di alcuni esercizi.

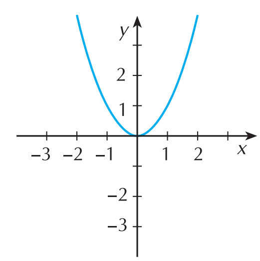
10. Grafico di $f(x)$



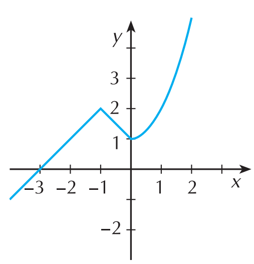
a. Grafico di $|f(x)|$



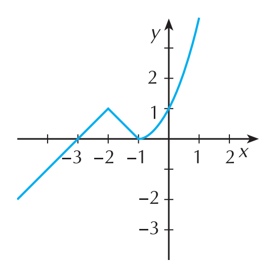
b. Grafico di $f(|x|)$



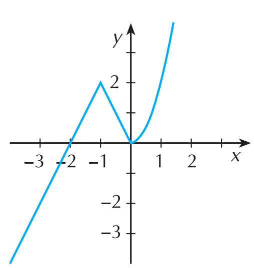
c. Grafico di $f(x) + 1$



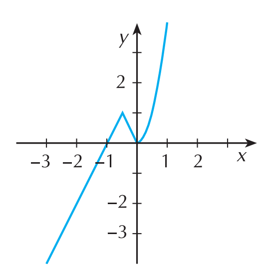
d. Grafico di $f(x + 1)$



e. Grafico di $2f(x)$

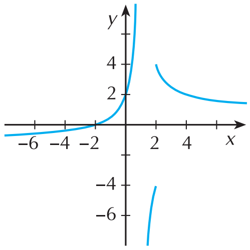


f. Grafico di $f(2x)$

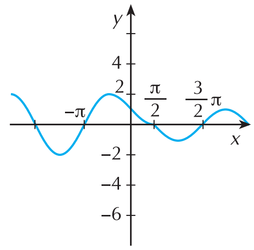


.

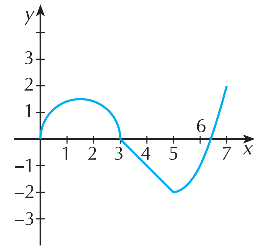
19.



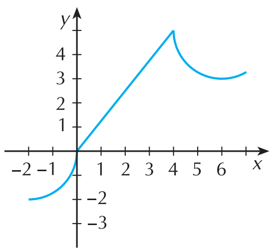
20.



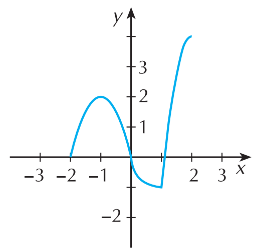
28.



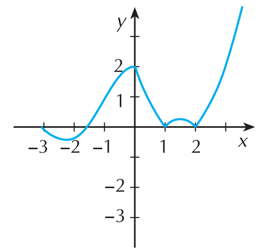
29.



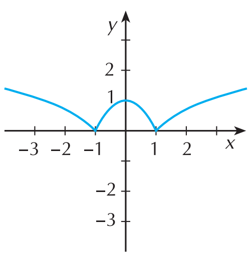
30.



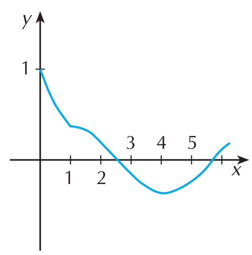
32.



33.



34.



AREA 1: FUNZIONI E LIMITI

4

LE SUCCESSIONI

★ Una **successione** è una funzione che ha come dominio l'insieme N dei numeri naturali. I suoi termini si possono rappresentare:

- mediante il suo termine generale a_n espresso in funzione di n; per esempio $a_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$
- mediante una formula ricorsiva definita in questo modo

$$\begin{cases} a_0 = \text{valore del primo termine della successione} \\ a_n = \text{regola che esprime } a_n \text{ in funzione di } a_{n-1} \end{cases} ;\ \text{per esempio} \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

★ Una successione può essere:

- **convergente** se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$

  cioè se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che, $\forall n > \nu$, sia $|a_n - \ell| < \varepsilon$

- **divergente** se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$

  cioè se $\forall M > 0$ esiste un indice ν tale che, $\forall n > \nu$, sia $|a_n| > M$

- **irregolare** se nè converge nè diverge.

Per il calcolo del limite di una successione valgono teoremi analoghi a quelli studiati per i limiti delle funzioni di numeri reali.

★ Una **progressione aritmetica** è una successione di numeri reali per la quale la differenza fra un termine ed il suo precedente si mantiene costante ed è uguale ad un numero d non nullo che si chiama **ragione** della progressione. In particolare:

- il termine a_n si calcola con la formula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
- il termine a_s, noto il termine a_r, si calcola con la formula $a_s = a_r + (s-r) \cdot d$
- la somma S_n dei primi n termini si calcola con la formula $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

★ Una **progressione geometrica** è una successione di numeri reali per la quale il rapporto fra un termine ed il suo precedente si mantiene costante ed è uguale ad un numero q che si chiama **ragione** della progressione. In particolare:

- il termine a_n si calcola con la formula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- il termine a_s, noto il termine a_r, si calcola con la formula $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$
- la somma S_n dei primi n termini si calcola con la formula $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$
- il prodotto P_n dei primi n termini si calcola con la formula $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

ESERCIZI

Verifica che le successioni definite in modo ricorsivo da ciascuna delle seguenti espressioni non sono né convergenti né divergenti.

1 $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = (-1)^n \, a_{n-1} \end{cases}$

2 $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = (-1)^n \cos\left(a_{n-1} \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

3 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = (-1)^n (a_{n-1})^2 \end{cases}$

4 $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = \left(\dfrac{1}{a_{n-1}}\right)^n \end{cases}$

5 $\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} + (-1)^n \end{cases}$

6 Determina le caratteristiche dell'insieme numerico $I = \left\{ x \in R \mid x = \dfrac{2n^2+1}{2n+1}, \text{ con } n \in N \right\}$.

7 Individua i punti di accumulazione degli insiemi $C = \left\{ x \in R \mid x = \dfrac{n-1}{n+1}, \; n \in N \right\}$ e $D = \left\{ x \in R \mid x = \dfrac{\sqrt{n}}{2n}, \; n \in N_0 \right\}$.

8 Data la successione $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = \sqrt{a_{n-1}} \end{cases}$, determinane il carattere. [converge a zero]

9 Verificare che diverge a ∞ la successione definita dalla formula ricorsiva $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = -3a_{n-1} \end{cases}$.

10 Data la successione 1, 3, 5, 7, ... scrivi l'espressione di a_n in funzione di $a_n - 1$ e definisci ricorsivamente la successione; successivamente, se possibile, scrivi l'espressione di a_n in funzione di n e determinane il carattere.

$\left[\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \end{cases} ; \; a_n = 2n+1, \; n \in N; \text{ divergente} \right]$

11 Data la successione 0, 1, 3, 6, 10, 15, ... scrivi l'espressione di a_n in funzione di $a_n - 1$ e definisci ricorsivamente la successione; successivamente, se possibile, scrivi l'espressione di a_n in funzione di n e determinane il carattere.

$\left[\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{cases} ; \; a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \; n \in N; \text{ divergente} \right]$

12 Considera la successione definita in modo ricorsivo dalla seguente formula $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2 \end{cases}$

per $n \geq 2$. Stabilisci se la successione $\{b_n\}$ definita ponendo $b_n = a_n + 1$ $(n > 0)$ è una progressione geometrica; esprimi b_n in funzione di n e stabilisci il carattere delle due successioni.

$[b_n = 3^{n-1}, \text{ entrambe divergenti}]$

13 Data la successione definita per ricorrenza dalla formula $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2}{2a_{n-1}} \end{cases}$:

a. mostra che $a_n > \sqrt{2}$

b. mostra che la successione è decrescente

c. usa il teorema della monotonia per stabilire il carattere della successione

d. dimostra che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{2}$.

14 Scrivi i primi quattro termini della successione $\begin{cases} a_0 = x \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2 + a_n} \end{cases}$; stabilisci poi se per $x = 1$ la successione converge e, in caso affermativo, calcolane il limite anche in modo approssimato. (Suggerimento: si tratta della successione delle frazioni continue) $[\sqrt{2} - 1]$

15 Verifica che la successione definita ricorsivamente dalla formula $\begin{cases} a_0 = x, \quad a_1 = y \\ a_{n+1} = a_n + (a_n - a_{n-1})^{\frac{n+1}{n}} \end{cases}$

con $x, y \in R$ converge quando $|x - y| < 1$, diverge se $|x - y| > 1$ oppure se $y - x = 1$, è indeterminata se $x - y = 1$.

Nel caso in cui la successione converge, dimostra che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{x^2 - xy + y}{x - y + 1}$.

16 Considerata la successione definita in modo ricorsivo dalla formula

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sin(a_n) & \text{per } n \text{ pari} \\ a_{n+1} = \cos(a_n) & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

verifica, servendoti anche di una calcolatrice, che si tratta di una successione oscillante fra i due valori limite $p = 0{,}768169$ e $q = 0{,}6948197$.

Verifica inoltre che $\arcsin p = \cos q$ e $\arccos q = \sin p$.

17 Sia ABC un triangolo equilatero di lato unitario. Costruisci la successione dei triangoli inscritti ciascuno nel precedente che hanno vertici nei punti medi dei lati del triangolo precedente.

a. Stabilisci che tipo di successione si ottiene considerando le aree di tali triangoli e determinane il carattere.

b. Calcola la somma dei primi n termini di tale successione e calcolane poi il limite per $n \to +\infty$.

[progressione geometrica di ragione $q = \dfrac{1}{4}$, termine iniziale $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$; la successione converge a 0; $S_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right)$, limite: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$]

18 Sia Q_0 un quadrato di lato unitario; costruisci la successione dei quadrati inscritti ciascuno nel precedente e aventi i vertici nei punti medi dei lati del quadrato precedente. Dopo aver trovato l'espressione della lunghezza del lato di ciascuno di tali quadrati:

a. verifica che si tratta di una successione geometrica e determinane il carattere

b. calcola la somma dei primi n termini della successione dei perimetri di tali quadrati e determinane il limite per $n \to +\infty$.

[converge a 0; $4(2 + \sqrt{2})$]

19 In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O è dato il punto $A_0\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}, a\right)$ (con $a > 0$). Siano A_1 la proiezione di A_0 sull'asse x, A_2 la proiezione di A_1 sulla retta OA_0, A_3 la proiezione di A_2 sull'asse x e così di seguito i punti A_i si ottengono proiettando alternativamente quello immediatamente precedente sull'asse x e sulla retta OA_0; si ottiene in questo modo la spezzata $\Gamma : A_0A_1A_2A_3$....... nella quale i vertici di indice dispari appartengono all'asse x.

a. Dimostra che le lunghezze dei lati di Γ sono in progressione geometrica e calcola la lunghezza ℓ_n della spezzata. $\left[\ell_n = 2a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\right]$

b. Determina il limite a cui tende ℓ_n al tendere di n all'infinito. $[2a]$

20 In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali di origine O è dato il punto $P(a, a)$ (con $a > 0$). Considerato il quadrato Q_0 che ha un vertice in P e le cui diagonali si intersecano in O, inscrivi in esso il cerchio C_0; nel cerchio inscrivi il quadrato Q_1 con i lati paralleli a Q_0, in Q_1 inscrivi il cerchio C_1 e così via. Ottieni così la successione di quadrati Q_0, Q_1, Q_2, ... e quella dei cerchi C_0, C_1, C_2, ... Dimostra che le successioni dei perimetri, delle aree dei quadrati, delle lunghezze delle circonferenze e delle aree dei cerchi sono convergenti e trova il limite a cui tende la somma dei termini di ciascuna di esse. $\left[8a\left(2+\sqrt{2}\right);\ 8a^2;\ 2\pi a\left(2+\sqrt{2}\right);\ 2\pi a^2\right]$

21 In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali di origine O, una retta r passa per il punto $A(0, 1)$ e α è l'angolo che essa forma con semiasse positivo delle ascisse, con $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$. Sia B_n il punto sulla retta r che dista $\sqrt{n^2+1}$ da A e sia C_n il punto del segmento $\overline{AB_n}$ che soddisfa la condizione $\overline{AC_n} : \overline{AB_n} = 1 : n$. Indicate con C'_n e B'_n rispettivamente le proiezioni di C_n e B_n sull'asse delle ascisse, calcola, al variare di α, il limite della successione $\{a_n\}$ dove $a_n = \dfrac{\left(\overline{OB'_n}\right)^n}{\left(\overline{OC'_n}\right)^n}$.

$[\alpha = 0 : a_n = 1;\ \alpha \ne 0 : a_n \to +\infty]$

22 Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ e preso un punto $P_n(x_n, f(x_n))$ sul suo grafico, proiettalo sull'asse y ottenendo il punto Q_n. Sia H_n il simmetrico di Q_n rispetto alla retta $y = x$ e sia P_{n+1} il punto del grafico di f che ha la stessa ascissa di H_n.

a. Calcola l'ascissa x_{n+1} di P_{n+1} in funzione di x_n ottenendo una successione data per ricorrenza. $\left[x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{x_n+2}\right]$

b. Posto $x_0 = 3$, stabilisci se la successione precedente converge e calcola l'eventuale limite. (Suggerimento: mostra che la successione è decrescente, limitata inferiormente dal valore 0; questo garantisce la convergenza. Il valore del limite, che esiste, si calcola imponendo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$) $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0\right]$

23 In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O è data la circonferenza di raggio unitario e centro O. Sia A_0 un punto di tale circonferenza appartenente al primo quadrante; il punto A_1 si ottiene ruotando il raggio OA_0 di un angolo (in radianti) pari all'ascissa di A_0; il punto A_2 si ottiene ruotando il raggio OA_1 di un angolo (in radianti) pari all'ascissa di A_1 e così via. Determina la posizione sulla circonferenza del punto limite della successione giustificando il risultato ottenuto. [punto limite: $A(0, 1)$]

24 Siano C_1 e C_2 le due circonferenze di equazioni:

$C_1 :\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \qquad C_2 :\ (x+1)^2 + y^2 = 1$

Considerato un punto A_1 su C_1 si definisce il punto A_2 come il punto di intersezione del cerchio C_2 con la semiretta che ha origine nel centro di C_2 e passante per A_1. Allo stesso modo si definisce A_3 come il punto di intersezione del cerchio C_1 con la semiretta che ha origine nel centro di C_1 e passante per A_2.

Continuando con questa procedura si determina una successione di punti tali che A_{2n+1} appartiene a C_1 e A_{2n} appartiene a C_2.
Stabilisci se questa successione converge e, in caso affermativo, trovane il limite.
(Suggerimento: le ascisse dei punti di indice dispari sono date dall'espressione

$$x_{2n+1} = \frac{1 + x_{2n-1} - 2\sqrt{1 + 4x_{2n-1}}}{\sqrt{5 + 20x_{2n-1} - 4(1 + x_{2n-1})\sqrt{1 + 4x_{2n-1}}}};$$

per $n \to +\infty$ tale espressione tende a zero, e quindi la successione converge nell'origine)