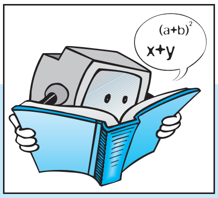
LA PARABOLA E LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

6

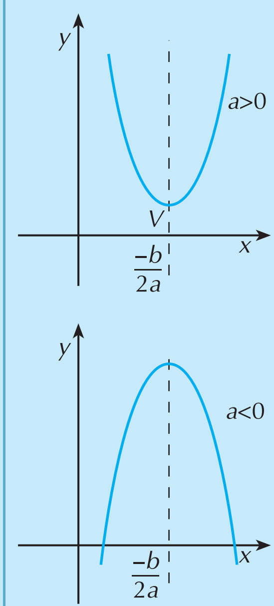


Per ricordare

★ Una funzione di secondo grado la cui equazione assume la forma $y = ax^2 + bx + c$ si chiama **parabola.**
Le sue caratteristiche sono le seguenti (osserva la ***figura 1***):

- se $a > 0$ la parabola è concava verso l'alto, se $a < 0$ è concava verso il basso
- è una curva simmetrica rispetto alla retta $x = -\dfrac{b}{2a}$ che prende il nome di **asse** della parabola
- il punto V di tale asse che appartiene alla parabola si chiama **vertice** ed ha coordinate $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ essendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

Figura 1



Per esempio, la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$, dove $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, ha:

- concavità rivolta verso l'alto
- per asse di simmetria la retta $x = \dfrac{2}{2} = 1$
- vertice V nel punto di coordinate

$$x_V = 1 \qquad y_V = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-12 - 4}{4} = -4 \qquad \rightarrow \qquad V(1, -4)$$

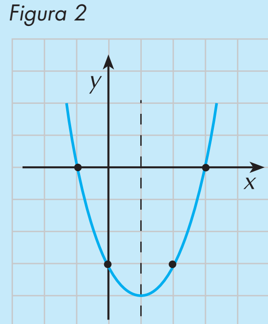
L'ordinata del vertice si può anche trovare sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola:

$$y_V = 1 - 2 - 3 = -4$$

Per costruire il grafico di una parabola si devono determinare il vertice e le coordinate di qualche punto; conviene poi individuare anche i simmetrici di tali punti rispetto all'asse della parabola.
Per trovare le coordinate di qualche punto si attribuiscono alla variabile x alcuni valori e si calcolano i corrispondenti valori di y come nella tabella che segue e che si riferisce alla precedente parabola $y = x^2 - 2x - 3$:

x	0	-1
y	-3	0

Figura 2



La scelta dei valori di x è del tutto arbitraria, ma conviene prenderli tutti dalla stessa parte rispetto all'asse di simmetria per evitare di trovare proprio i simmetrici di punti già noti. Il grafico della parabola è in ***figura 2***.

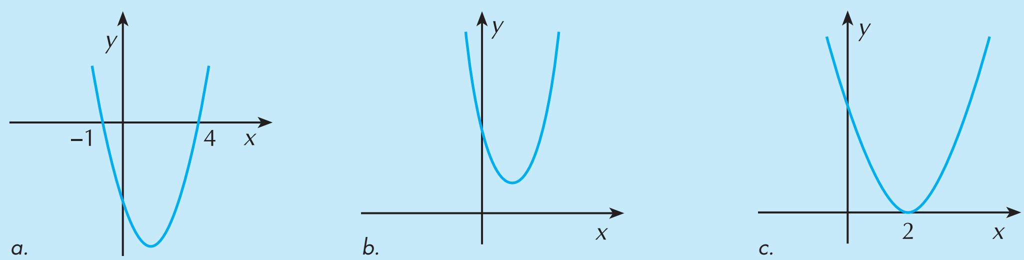
★ Punti rilevanti del grafico di una parabola sono le sue intersezioni con l'asse delle ascisse che prendono il nome di **zeri** della funzione e che si trovano risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.
A seconda del discriminante dell'equazione, una parabola può quindi avere:

- due zeri se $\Delta > 0$
- un solo zero se $\Delta = 0$
- nessuno zero se $\Delta < 0$.

Per esempio:

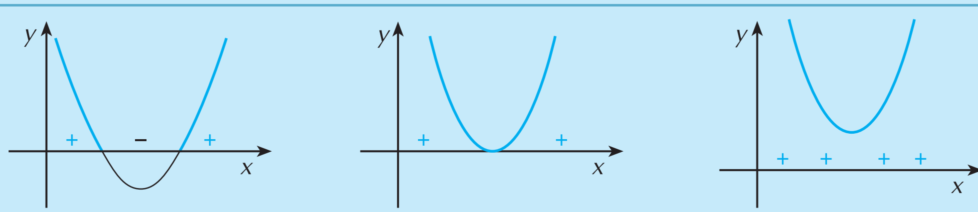
- la parabola $y = x^2 - 3x - 4$, essendo $x^2 - 3x - 4 = 0$ se $x = -1 \ \vee \ x = 4$, ha due zeri (***figura 3a***)
- la parabola $y = 2x^2 - 4x + 3$ non ha zeri perchè l'equazione $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ha un discriminante negativo: $\Delta = 16 - 24$ (***figura b***)
- la parabola $y = x^2 - 4x + 4$ ha un solo zero perchè l'equazione $x^2 - 4x + 4 = 0$ ammette la sola soluzione $x = 2$.

Figura 3



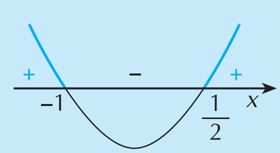
★ Il segno di un trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ può essere dedotto dal grafico della parabola $y = ax^2 + bx + c$ ad esso associata (in ***figura 4*** il caso $a > 0$); il trinomio è positivo per i valori di x che corrispondono ai rami positivi della parabola (quelli che si trovano al di sopra dell'asse delle ascisse), è negativo per i valori di x che corrispondono ai rami negativi (quelli che si trovano al di sotto dell'asse delle ascisse), si annulla per i valori di x che si trovano sull'asse delle ascisse (sono gli zeri della funzione).

Figura 4

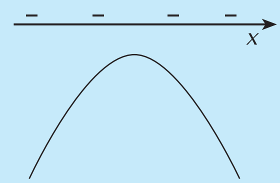


Non è quindi necessario trovare il vertice della parabola e costruire il grafico con precisione, basta sapere qual è la sua concavità e in quanti punti interseca l'asse delle ascisse. Per esempio:

- il trinomio $2x^2 + x - 1$ è associato alla parabola $y = 2x^2 + x - 1$ che interseca l'asse x nei punti di ascissa -1 e $\dfrac{1}{2}$ ed è:
  - positivo per $x < -1 \ \vee \ x > \dfrac{1}{2}$
  - negativo per $-1 < x < \dfrac{1}{2}$
  - uguale a zero per $x = -1 \ \vee \ x = \dfrac{1}{2}$



- il trinomio $-x^2+4x-7$ è associato alla parabola $y=-x^2+4x-7$ che ha concavità verso il basso e non interseca l'asse delle ascisse perché $\Delta = 16-28<0$; il trinomio è quindi negativo per ogni valore di x.



★ Lo studio del segno di un trinomio ci permette di risolvere agevolmente le disequazioni di secondo grado, che assumono quindi la forma $ax^2+bx+c \gtrless 0$, dove possiamo sempre supporre che sia $a>0$ perchè in caso contrario si possono cambiare segno e verso alla disequazione.

In pratica si procede così:

- si individuano gli zeri della funzione trovando le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$
- si disegna la parabola (che ha sempre concavità verso l'alto per la condizione posta su a) rispettando la sua posizione relativamente all'asse delle ascisse
- si scelgono gli intervalli che rendono il trinomio positivo o negativo a seconda del verso della disequazione.

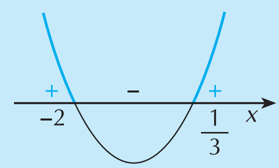
Per esempio:

- $3x^2+5x-2>0$

  equazione associata: $3x^2+5x-2=0$

  soluzioni: $x=-2 \;\vee\; x=\dfrac{1}{3}$

  Poiché si vuole sapere quando il trinomio è positivo, l'insieme delle soluzioni è l'intervallo esterno alla due radici: $x<-2 \;\vee\; x>\dfrac{1}{3}$

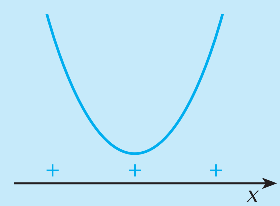


- $x^2-6x+15<0$

  equazione associata: $x^2-6x+15=0$

  essendo $\Delta = 36-60<0$ non vi è nessuna soluzione reale

  Poiché si vuole sapere quando il trinomio è negativo, l'insieme delle soluzioni è vuoto.



Esercizi di Consolidamento

Descrivi le caratteristiche delle parabole che hanno le seguenti equazioni e costruiscine il grafico.

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

$y=-x^2+6x-5$

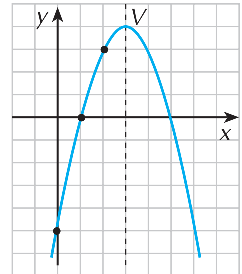
Essendo $a=-1$, la parabola è concava verso il basso; troviamo il suo vertice:

$x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{-2} = 3 \qquad y_V = -9+18-5=4 \qquad$ pertanto $\qquad V(3,4)$

L'asse di simmetria è quindi la retta di equazione $x = 3$.
Troviamo alcuni punti della parabola attribuendo ad x valori a nostra scelta e calcolando i corrispondenti valori di y :

x	0	1	2
y	-5	0	3

Il grafico della parabola è in figura.



2 $y = x^2 - x - 3$ $\left[\text{concavità verso l'alto; } V\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right); \text{ asse } x = \frac{1}{2}\right]$

3 $y = -3x^2 - 12x + 4$ [concavità verso il basso; $V(-2, 16)$; asse $x = -2$]

4 $y = -x^2 + 2x + 5$ [concavità verso il basso; $V(1, 6)$; asse $x = 1$]

5 $y = 5x^2 + 10x + 5$ [concavità verso l'alto; $V(-1, 0)$; asse $x = -1$]

6 $y = 4x^2 - 8x - 2$ [concavità verso l'alto; $V(1, -6)$; asse $x = 1$]

7 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ [concavità verso il basso; $V(0, 1)$; asse $x = 0$]

8 $y = x^2 - 2$ [concavità verso l'alto; $V(0, -2)$; asse $x = 0$]

9 $y = \frac{1}{2}x^2$ [concavità verso l'alto; $V(0, 0)$; asse $x = 0$]

10 $y = -4x^2$ [concavità verso il basso; $V(0, 0)$; asse $x = 0$]

11 $y = x^2 + 2x$ [concavità verso l'alto; $V(-1, -1)$; asse $x = -1$]

12 $y = -\frac{1}{3}x^2 + x$ $\left[\text{concavità verso il basso; } V\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right); \text{ asse } x = \frac{3}{2}\right]$

Determina le ascisse dei punti di intersezione con l'asse delle ascisse (gli zeri) delle seguenti parabole.

13 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = -x^2 + 3x - 2$

Devi risolvere l'equazione $-x^2 + 3x - 2 = 0$ cioè $x^2 - 3x + 2 = 0$ $[1, 2]$

14 **a.** $y = 2x^2 + 4x + 2$ **b.** $y = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ $\left[\textbf{a. } -1; \textbf{ b. } -\frac{1}{3}, 1\right]$

15 **a.** $y = x^2 - \frac{1}{4}$ **b.** $y = 6x^2 - x - 1$ $\left[\textbf{a. } \pm\frac{1}{2}; \textbf{ b. } -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

16 **a.** $y = -2x^2 + 5x - 2$ **b.** $y = 5x + 6x^2 + 1$ $\left[\textbf{a. } \frac{1}{2}, 2; \textbf{ b. } -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right]$

17 **a.** $y = 2x^2 + 5x - 3$ **b.** $y = 3x^2 - 5x + 2$ $\left[\textbf{a. } -3, \frac{1}{2}; \textbf{ b. } \frac{2}{3}, 1\right]$

18 **a.** $y = 3x^2 - 3$ **b.** $y = -6x^2 + 4x$ $\left[\textbf{a. } \pm 1; \textbf{ b. } \frac{2}{3}, 0\right]$

Studia come varia il segno dei seguenti trinomi di secondo grado.

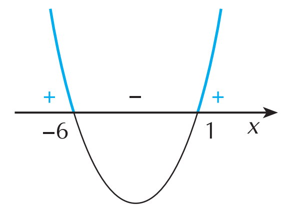
19 **ESERCIZIO SVOLTO**

$x^2 + 5x - 6$

Dobbiamo trovare i punti di intersezione della parabola $y = x^2 + 5x - 6$ con l'asse delle ascisse e stabilire la sua posizione rispetto a tale asse.

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

La parabola ha concavità verso l'alto e interseca l'asse x nei punti di ascissa -6 e 1.



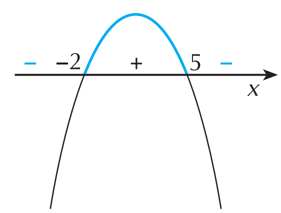
Il trinomio è quindi:

- positivo se $x < -6 \ \vee \ x > 1$
- negativo se $-6 < x < 1$
- si annulla se $x = -6 \ \vee x = 1$

20 **ESERCIZIO GUIDATO**

$-x^2 + 3x + 10$

La parabola $y = -x^2 + 3x + 10$ ha la concavità verso il basso e interseca l'asse x nei punti di ascissa -2 e 5.



Il trinomio è quindi:

- positivo se ....
- negativo se ....
- si annulla se ....

21 $x^2 + 2x - 3$ $\quad [y > 0 \text{ se } x < -3 \ \vee \ x > 1;\ y < 0 \text{ se } -3 < x < 1]$

22 $-x^2 + 9$ $\quad [y > 0 \text{ se } -3 < x < 3;\ y < 0 \text{ se } x < -3 \ \vee \ x > 3]$

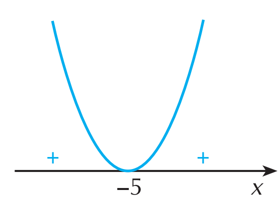
23 $5x^2 - 9x - 2$ $\quad \left[y > 0 \text{ se } x < -\frac{1}{5} \ \vee \ x > 2;\ y < 0 \text{ se } -\frac{1}{5} < x < 2\right]$

24 $-3x^2 - 2x + 1$ $\quad \left[y > 0 \text{ se } -1 < x < \frac{1}{3};\ y < 0 \text{ se } x < -1 \ \vee \ x > \frac{1}{3}\right]$

25 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x^2 + 10x + 25$

La parabola $y = x^2 + 10x + 25$ è concava verso l'alto e l'equazione $x^2 + 10x + 25 = 0$ ha soluzione $x = -5$.



Il trinomio è quindi:

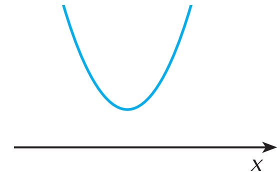
- positivo se ....
- negativo ....
- si annulla se ....

26 ESERCIZIO GUIDATO

$2x^2 + 4$

La parabola è concava verso l'alto e non interseca l'asse delle ascisse perchè ....

Il trinomio è quindi sempre ....



27 $9x^2 + 6x + 1$ $\left[y > 0\ \forall x \neq -\frac{1}{3}\right]$

28 $-x^2 - 3x - 5$ $[y < 0\ \forall x \in R]$

29 $4x^2 + 1$ $[y > 0\ \forall x \in R]$

30 $-4x^2 + 12x - 9$ $\left[y < 0\ \forall x \neq \frac{3}{2}\right]$

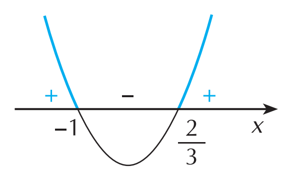
Risolvi le seguenti disequazioni intere di secondo grado.

31 ESERCIZIO SVOLTO

$3x^2 + x - 2 \geq 0$

Risolviamo l'equazione associata: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Disegniamo la parabola evidenziandone la posizione rispetto all'asse x.



L'intervallo delle soluzioni è quello che corrisponde ai valori di x che rendono positivo o nullo il trinomio, cioè

$$x \leq -1 \ \vee \ x \geq \frac{2}{3}$$

32 ESERCIZIO GUIDATO

$6x^2 - x > 0$

Risolvi l'equazione: $6x^2 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = ...\ \vee\ x = ...$

Completa il disegno rappresentando la posizione della parabola rispetto all'asse x e riporta i segni assunti dal trinomio.

L'insieme delle soluzioni è: ....

33 $2x^2 - 11x + 12 \geq 0$ $\left[x \leq \frac{3}{2}\ \vee\ x \geq 4\right]$

34 $3x^2 - 7x + 2 < 0$ $\left[\frac{1}{3} < x < 2\right]$

35 $x^2 - 27 \geq 0$ $[x \leq -3\sqrt{3}\ \vee\ x \geq 3\sqrt{3}]$

36 $25 - 9x^2 \leq 0$ $\left[x \leq -\frac{5}{3} \vee x \geq \frac{5}{3}\right]$

(Suggerimento: cambia prima i segni ed il verso della disequazione)

37 $-25x^2 < 100$ $[S = R]$

38 $9 - x^2 \leq 0$ $[x \leq -3 \vee x \geq 3]$

39 $3x - x^2 \geq 0$ $[0 \leq 0 \leq 3]$

40 $4x - 5x^2 - \frac{3}{5} \leq 0$ $\left[x \leq \frac{1}{5} \vee x \geq \frac{3}{5}\right]$

(Suggerimento: prima di trovare le soluzioni dell'equazione associata, fai il denominatore comune che puoi eliminare moltiplicando per 5)

41 $x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} < 0$ $\left[-3 < x < \frac{3}{4}\right]$

42 $x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} \leq 0$ $\left[x = \frac{2}{5}\right]$

43 $x^2 - \frac{7}{12}x - 1 > 0$ $\left[x < -\frac{3}{4} \vee x > \frac{4}{3}\right]$

44 $\frac{x-1}{3} + 3\left(x - \frac{1}{2}\right) < x^2 + \frac{1}{2}$ $\left[x < 1 \vee x > \frac{7}{3}\right]$

45 $2 - \frac{x^2+2}{4} \geq \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{12-5x}{2}\right)$ $[-3 \leq x \leq 2]$

46 $\frac{1-4x}{5} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{3x-4}{5}\right) < 1 - x^2$ $\left[-\frac{2}{5} < x < 1\right]$

47 $x(x-1) + \frac{1}{5}(9-x) \geq \frac{1}{5}$ $[S = R]$

48 $x(x-1) + \frac{1}{3} < \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ $[S = \varnothing]$

49 $\frac{3x^2+4}{3} + \frac{2x-1}{2} \geq \frac{5x^2-2}{6}$ $[x \leq -\sqrt{2} - 3 \vee x \geq \sqrt{2} - 3]$

50 $\frac{12}{5}x\left(\frac{1-x}{2} - \frac{1}{3}\right) \geq \frac{9}{5}x - 1$ $\left[-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}\right]$

51 $\frac{4x - (4\sqrt{3} - 1)}{8} + x^2 - \frac{1}{16} < 4 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\left[-\frac{9}{4} < x < \frac{7}{4}\right]$

52 $\frac{(2x-1)^2}{-2} - 4 > 2x - \frac{13}{2}$ $[-1 < x < 1]$

53 $(x-1)^2 + \frac{4x-5}{2} \geq \frac{(x-\sqrt{3})^2}{2}$ $[x \leq -\sqrt{3} - 3 \vee x \geq -\sqrt{3} + 3]$

54 $\frac{(x+1)^2}{5} - \frac{2}{3}x \leq \frac{5}{3} + \frac{1}{5}(2x+1)$ $\left[-\frac{5}{3} \leq x \leq 5\right]$

55 $\frac{(x-2)(x-3)}{3} - (2 - \sqrt{3}) < \sqrt{3}$ $[0 < x < 5]$

56 $\frac{1}{2}x^2 - (1+\sqrt{2})(x-1) > \frac{1}{2}(2-x^2)$ $[x < 1 \lor x > \sqrt{2}]$

57 $3\sqrt{3}(x^2 + 3\sqrt{3}) - 3x(\sqrt{3}+6) < x^2\sqrt{3}$ $\left[\frac{3}{2} < x < 3\sqrt{3}\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni intere di grado superiore al secondo.

58 **ESERCIZIO SVOLTO**

$(x-3)(x^2-4) < 0$

Per sapere quando l'espressione al primo membro è negativa studiamo il segno dei due fattori ponendo ciascuno di essi maggiore di zero e costruiamo una tabella di segni:

- $x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 3$
- $x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -2 \lor x > 2$

		-2		2		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$
x^2-4	$+$		$-$		$+$		$+$
Prodotto	$-$		$+$		$-$		$+$

Dalla distribuzione dei segni ricavata dalla tabella (stiamo cercando gli intervalli in cui l'espressione al primo membro è negativa), deduciamo l'insieme delle soluzioni:

$$x < -2 \lor 2 < x < 3$$

59 $(x-1)(x^2-x-2) < 0$ $[x < -1 \lor 1 < x < 2]$

60 $(x^2+x-6)(x+4) > 0$ $[-4 < x < -3 \lor x > 2]$

61 $(x+5)(x^2+4-4x) \geq 0$ $[x \geq -5]$

62 $(-x^2+4x-4)(x-4) \leq 0$ $[x = 2 \lor x \geq 4]$

63 $(x^2-9)(x^2+25) \leq 0$ $[-3 \leq x \leq 3]$

64 $(x^2-1)(x^2-16) \geq 0$ $[x \leq -4 \lor -1 \leq x \leq 1 \lor x \geq 4]$

65 $x^3 < 4x^2 - x - 6$ $[x < -1 \lor 2 < x < 3]$

66 $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 > 0$ $[x > -1]$

67 $x^4 < 16$ $[-2 < x < 2]$

68 $17x + 15 \geq x^3 - x^2$ $[x \leq -3 \lor -1 \leq x \leq 5]$

69 $3x^3 \geq x(17x+6)$ $\left[-\frac{1}{3} \leq x \leq 0 \lor x \geq 6\right]$

70 $x^3 + 1 < 3x(x+1)$ $[x < -1 \lor 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}]$

71 $x(x^2-3) > 3x + x(2x+1)$ $[1-2\sqrt{2} < x < 0 \lor x > 1+2\sqrt{2}]$

72 $\frac{1}{2}(x^2+1) - 3(x-4) \leq x^3 + 9$ $[x \geq 1]$

Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie.

73 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\frac{x^2+3x+2}{x-3} \geq 0$$

Per il dominio della disequazione dobbiamo imporre che sia $x \neq 3$.

Studiamo adesso il segno dei fattori al numeratore e al denominatore ponendo quello al numeratore maggiore o uguale a zero, quello al denominatore solo maggiore di zero:

- $x^2+3x+2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq -2 \ \vee \ x \geq -1$
- $x-3>0 \quad \rightarrow \quad x>3$

		-2		-1		3	
x^2+3+2	+	•	−	•	+	‖	+
x−3	−		−		−	‖	+
Frazione	−	•	+	•	−	‖	+

Per indicare nella tabella dei segni che il numero 3 non appartiene al dominio abbiamo messo una doppia linea verticale in corrispondenza di questo numero.

L'insieme delle soluzioni è quello che rende positiva la frazione: $-2 \leq x \leq -1 \ \vee \ x>3$

74 $\dfrac{x(x-2)}{x^2+1} \leq 0$ $[0 \leq x \leq 2]$

75 $\dfrac{3x-1}{x^2-x} > 0$ $\left[0<x<\frac{1}{3} \ \vee \ x>1\right]$

76 $\dfrac{4x^2+4x+1}{x^2+5x} > 0$ $[x<-5 \ \vee \ x>0]$

77 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\frac{x^2+6}{x} < 5+2x$$

Trasportiamo dapprima tutti i fattori al primo membro: $\dfrac{x^2+6}{x}-5-2x<0$

Facciamo il denominatore comune e svolgiamo i calcoli:

$$\frac{x^2+6-5x-2x^2}{x}<0 \quad \rightarrow \quad \frac{-x^2-5x+6}{x}<0$$

Cambiamo i segni al numeratore in modo da avere il coefficiente di x^2 positivo e cambiamo verso alla disequazione:

$$\frac{x^2+5x-6}{x}>0$$

Continua adesso come negli esercizi precedenti. $[-6<x<0 \ \vee \ x>1]$

78 $\dfrac{7x-2}{x^2+2} \leq 2$ $\left[x \leq \frac{3}{2} \ \vee \ x \geq 2\right]$

79 $\dfrac{1}{3-x^2} < \dfrac{1}{4}$ $[x<-\sqrt{3} \ \vee \ x>\sqrt{3}]$

80 $\dfrac{x^2}{x^2+2} > \dfrac{2}{3}$ $[x<-2 \ \vee \ x>2]$

81 $\dfrac{x^2+6x+4}{x^2+4}+\dfrac{1}{2}<0$ $[S=\varnothing]$

82 $\dfrac{3x^2-2}{x^2-1}\leq\dfrac{1}{3}$ $\left[-1<x\leq-\dfrac{\sqrt{10}}{4}\ \vee\ \dfrac{\sqrt{10}}{4}\leq x<1\right]$

83 $\dfrac{2}{x+2}>\dfrac{1-x}{x+1}$ $[x<-3\ \vee\ -2<x<-1\ \vee\ x>0]$

84 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-3}<\dfrac{2x}{6-2x}$ $[-3<x<0\ \vee\ 1<x<3]$

85 $\dfrac{3(x-2)}{x-1}\geq\dfrac{2x}{x+1}$ $[x\leq-2\ \vee\ -1<x<1\ \vee\ x\geq3]$

86 $\dfrac{x}{x^2-3x}+1<\dfrac{1}{x}$ $[0<x<3]$

87 $\dfrac{2x+5}{x+2}\geq\dfrac{x-5}{x-2}$ $[x\leq-4\ \vee\ -2<x\leq0\ \vee\ x>2]$

88 $\dfrac{1}{x^2+2}-\dfrac{7}{6}<\dfrac{3x}{x^2+2}$ $\left[x<-2\ \vee\ x>-\dfrac{4}{7}\right]$

89 $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x^2}{x^2-1}\leq\dfrac{1}{2}$ $[-1<x<1]$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

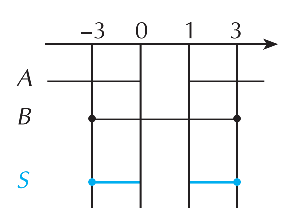
90 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{cases} x^2-x>0 & (A) \\ x^2-9\leq0 & (B) \end{cases}$$

Per risolvere un sistema di disequazioni si deve risolvere ciascuna disequazione e trovare poi l'intersezione delle soluzioni:

- disequazione A : $x^2-x>0 \quad \rightarrow \quad x<0\ \vee\ x>1$
- disequazione B : $x^2-9\leq0 \quad \rightarrow \quad -3\leq x\leq3$

Costruiamo la tabella delle soluzioni:



L'insieme delle soluzioni è formato dagli intervalli in cui entrambe le disequazioni A e B sono verificate, cioè:

$$-3\leq x<0\ \vee\ 1<x\leq3$$

91 $\begin{cases} x^2-2x<0 \\ 4x-x^2\geq3 \end{cases}$ $[1\leq x<2]$

92 $\begin{cases} 2x<3-x^2 \\ (7-5x)+6x^2\geq6 \end{cases}$ $\left[-3<x\leq\dfrac{1}{3}\ \vee\ \dfrac{1}{2}\leq x<1\right]$

93 $\begin{cases} x^2-4<0 \\ 4x+x^2\geq-4 \end{cases}$ $[-2<x<2]$

94 $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 < 0 \\ 3x^2 - 5x \geq 2 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

95 $\begin{cases} 10x^2 - 3x > 1 \\ 3(x+2) \geq x^2 + 4x + 4 \end{cases}$ $\left[-2 \leq x < -\frac{1}{5} \vee \frac{1}{2} < x \leq 1\right]$

96 $\begin{cases} -(x^2 + 4) < 0 \\ 25x^2 - 10x \geq -1 \end{cases}$ $[S = R]$

97 $\begin{cases} 2 \geq \dfrac{x^2 - 3x}{5} \\ x^2 - \dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{2} > 0 \end{cases}$ $\left[-2 \leq x < -\frac{1}{2} \vee 3 < x \leq 5\right]$

98 $\begin{cases} \dfrac{5}{2}x\left(1 + \dfrac{2}{5}x\right) \geq \dfrac{3}{2} \\ -x + \dfrac{1}{2} < 5 \end{cases}$ $\left[-\frac{9}{2} < x \leq -3 \vee x \geq \frac{1}{2}\right]$

99 $\begin{cases} x^2 - \dfrac{8}{3}x \geq 1 \\ \dfrac{2}{3} \leq 6x^2 - 3x \end{cases}$ $\left[x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq 3\right]$

100 $\begin{cases} 5 - x^2 \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + 3}{4} > x + 2 \end{cases}$ $[x \leq -2 \vee x > 5]$

101 $\begin{cases} 3x + 6x^2 + \dfrac{1}{3} \leq 0 \\ 4 - 2x^2 > 7x \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{3} \leq x \leq -\frac{1}{6}\right]$

102 $\begin{cases} 3(x-1)(2x-2) + (x+2)^2 \geq 10 \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$ $[2 < x < 4]$

103 $\begin{cases} x^2 - 6x > 0 \\ 3 - x^2 > 2x \\ x^2 > 1 \end{cases}$ $[-3 < x < -1]$

104 $\begin{cases} x^2 + x(x-1) > 3 \\ 2x - 4x^2 \leq 0 \\ x^2 < 0 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

105 $\begin{cases} 4x^2 + 3(x-1) \geq 4x \\ 2x - x(x+1) \leq -2x \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases}$ $\left[-2 < x \leq -\frac{3}{4}\right]$

106 $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 < x(x-1) \\ x^2 \leq 2x(3x-5) \\ 3x^2 + 7 > 0 \end{cases}$ $\left[x < -\frac{1}{3}\right]$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

Risolvi le seguenti disequazioni di vario tipo.

1 $-6x^3+19x^2-2x-3<0$ $\left[-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2} \lor x>3\right]$

2 $3x^2+x^3\geq 4$ $[x=-2 \lor x\geq 1]$

3 $2(x^3+1)-3x^2\geq 1$ $\left[x\geq -\frac{1}{2}\right]$

4 $(x^2+3x)(2x-1)>x+3$ $\left[-3<x<-\frac{1}{2} \lor x>1\right]$

5 $(3x-4)(x^2-1)\leq 4(x-1)^2$ $\left[x\leq 0 \lor 1\leq x\leq \frac{5}{3}\right]$

6 $\frac{9}{4}(x+2)^3-x>2$ $\left[-\frac{8}{3}<x<-2 \lor x>-\frac{4}{3}\right]$

7 $\frac{(x+4)^3}{9}-x\geq 4$ $[-7\leq x\leq -4 \lor x\geq -1]$

8 $x^3+1\geq 3\left(x-\frac{1}{3}\right)$ $[x\geq -2]$

9 $4(x+1)-\frac{1}{4}(x+2)^3+4<0$ $[-6<x<-2 \lor x>2]$

10 $5x^4\leq \frac{16}{125}$ $\left[-\frac{2}{5}\leq x\leq \frac{2}{5}\right]$

11 $x^4-3x^2-4<0$ $[-2<x<2]$
(Suggerimento: il polinomio al primo membro si scompone in $(x^2-4)(x^2+1)$)

12 $3-x^2>\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2(\sqrt{3}-x)$ $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \lor x>2\sqrt{3}\right]$

13 $x^4+10x^2+3<\frac{2}{3}x^2$ $[S=\varnothing]$

14 $x^4+\frac{1}{3}x^2-3<9x^2$ $[-3<x<3]$

15 $1-\frac{3}{2}x(x^2+1)\leq x^4$ $\left[x\leq -2 \lor x\geq \frac{1}{2}\right]$

16 $6x^3-x^6\leq 5$ $[x\leq 1 \lor x\geq \sqrt[3]{5}]$
(Suggerimento: trasportati tutti i termini al primo membro e cambiato segno e verso alla disequazione, il polinomio ottenuto si scompone in $(x^3-5)(x^3-1)$)

17 $(x^2+1)^2-2x^3\geq 2x-3(x^4-1)$ $\left[x\leq -\frac{1}{2} \lor x\geq 1\right]$

18 $x^4-64\leq x^2+8$ $[-3\leq x\leq 3]$

19 $\dfrac{3x^2-(x+2)^2}{(x-1)(x+3)} \leq \dfrac{1}{x+3}$ $\left[-3<x\leq -\dfrac{1}{2} \vee 1<x\leq 3\right]$

20 $\dfrac{x^2+x\sqrt{5}}{x^2-3} \leq 0$ $[-\sqrt{5}\leq x<-\sqrt{3} \vee 0\leq x<\sqrt{3}]$

21 $\dfrac{x^2}{x^2-3x+2} > \dfrac{1}{4-2x}$ $\left[x<-1 \vee \dfrac{1}{2}<x<1 \vee x>2\right]$

22 $\dfrac{4x-1}{x+1}+\dfrac{9}{x-5} \leq \dfrac{9}{x^2-4x-5}$ $\left[-1<x\leq\dfrac{1}{2} \vee \dfrac{5}{2}\leq x<5\right]$

23 $\dfrac{5-x}{3x-1} \leq \dfrac{2-x}{2x}$ $\left[-2\leq x\leq -1 \vee 0<x<\dfrac{1}{3}\right]$

24 $\dfrac{x^2-7x+4}{x^2-x-2} \leq \dfrac{1-x}{x-2}$ $\left[-1<x\leq\dfrac{1}{2} \vee 2<x\leq 3\right]$

25 $\dfrac{(x^2-4)(x^2+4x+4)}{3x^2+1} > 0$ $[x<-2 \vee x>2]$

26 $\dfrac{x-5}{3x-1} < \dfrac{x-3}{2x}$ $\left[x<0 \vee x>\dfrac{1}{3}\right]$

27 $\dfrac{x-7}{2x^2-9x-5}+\dfrac{1}{2x+1} > \dfrac{1}{5-x}$ $\left[-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{11}{4} \vee x>5\right]$

28 $\dfrac{(x^2-12)(x^2+12)}{(x-1)^2} \leq 0$ $[-2\sqrt{3}\leq x<1 \vee 1<x\leq 2\sqrt{3}]$

29 $\dfrac{x^2-5}{x^2-x\sqrt{5}} \leq 1$ $[x<0]$

30 $\dfrac{1}{x+3\sqrt{3}} \leq \dfrac{2}{x-3\sqrt{3}}$ $[-9\sqrt{3}\leq x<-3\sqrt{3} \vee x>3\sqrt{3}]$

Stabilisci per quali valori del parametro k le seguenti equazioni ammettono radici reali e distinte.

31 $kx^2+(k-1)x+1=0$ $[k<3-2\sqrt{2} \vee k>3+2\sqrt{2}]$

(Suggerimento: l'equazione ha soluzioni reali e distinte se $\Delta>0$, quindi se $(k-1)^2-4k>0$)

32 $-2kx^2+(k+1)x-\dfrac{1}{4}=0$ $[\forall k\in R]$

33 $3x^2+(k-2)x-\dfrac{2}{3}k=0$ $[k\neq -2]$

34 $(k+1)x^2-\sqrt{6k}\,x+k-1=0$ $\left[-\dfrac{1}{2}<k<2\right]$

Determina i valori di k per i quali le seguenti equazioni soddisfano alla condizione indicata.

35 $x^2-2(k+1)x-4k=0$ ammette soluzioni reali $[k\leq -3-2\sqrt{2} \vee k\geq -3+2\sqrt{2}]$

36 $2kx^2-(2k+1)x-1=0$ non ammette soluzioni reali $\left[\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}<k<\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}\right]$

37 $(k+2)x^2-4x+k-1=0$ ammette soluzioni reali distinte $[-3<k<2]$

38 $(1-3k)x^2+(k-3)x+1=0$ ammette soluzioni reali coincidenti oppure non ammette soluzioni reali $[-5\le k\le -1]$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

39 $\begin{cases} 9-4x\le 1+(x-2)^2 \\ \dfrac{x^2+3}{4}>x+2 \end{cases}$ $[x\le -2 \lor x>5]$

40 $\begin{cases} \dfrac{1}{4}(x-2)\le \dfrac{1}{x+1} \\ (x-1)^2\ge 0 \end{cases}$ $[x\le -2 \lor -1<x\le 3]$

41 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-3}\ge \dfrac{8}{9}(1-2x) \\ (x-1)^3<0 \end{cases}$ $\left[\frac{3}{4}\le x<1\right]$

42 $\begin{cases} (x+2)^3\le (1-3x-x^2)(x+2) \\ \dfrac{1}{x-4}<0 \end{cases}$ $\left[x\le -3 \lor -2\le x\le -\frac{1}{2}\right]$

43 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}\le \dfrac{1-3x}{2} \\ (2-x)^2\ge \dfrac{9}{4} \end{cases}$ $\left[x\le \frac{1}{2}\right]$

44 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}<\dfrac{3}{x+1} \\ x+x^2>2 \end{cases}$ $\left[1<x<2 \lor x>\frac{7}{2}\right]$

45 $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}x-3\right)^2-8\ge 1 \\ 4x<-\dfrac{2x}{3(x+2)} \end{cases}$ $\left[x<-\frac{13}{6} \lor -2<x<0\right]$

46 $\begin{cases} x\ge \dfrac{4}{x-3} \\ 5x+6<x^2 \end{cases}$ $[x>6]$

47 $\begin{cases} (2x+1)^3<8 \\ x+2\ge \dfrac{4x+1}{2x-1} \end{cases}$ $\left[-1\le x<\frac{1}{2}\right]$

48 $\begin{cases} x^4 - 4x^2 \geq 0 \\ \frac{1}{3}(x+3) + 1 < \frac{5}{3} \\ (x+2)(2x-3) \geq x^2 - 4 \end{cases}$ $[x \leq -2]$

49 $\begin{cases} x^3 - 2x > 4 \\ x(x^2-1) \leq x+1 \\ \frac{1}{x^2} < -1 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

50 $\begin{cases} \frac{x}{x+1} > 2 \\ x^2 - x > x(x^2+2) \\ \frac{3}{x^2-x} \leq 2 \end{cases}$ $[-2 < x < -1]$

51 $\begin{cases} \frac{2x+5}{3} - \frac{1}{x} < x + \frac{4}{3} \\ \frac{3x^2-1}{x} + \frac{1}{2x-1} \leq 0 \\ x^3 - x > 0 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

52 $\begin{cases} \frac{2}{x-1} > \frac{x}{x+2} \\ 3 + \frac{1}{x} < \frac{x}{x+1} + \frac{31}{12} \\ \frac{x^2-4x-5}{x} \leq 0 \end{cases}$ $[-2 < x < -1 \ \vee \ 3 < x < 4]$

Risolvi le seguenti equazioni con i moduli.

53 **ESERCIZIO SVOLTO**

$|x^2 + 5x - 6| = 6$

Per togliere il modulo dobbiamo valutare il segno del suo argomento:

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ x^2 + 5x - 6 = 6 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0 \\ x^2 + 5x - 6 = -6 \end{cases}$$

Osserviamo che la disequazione dei due sistemi è superflua perchè, per quanto riguarda il primo sistema, se $x^2 + 5x - 6$ deve essere uguale a 6, allora è anche maggiore di zero; analogamente, per quanto riguarda il secondo sistema, se $x^2 + 5x - 6$ deve essere uguale a -6, allora è anche minore di zero.
L'equazione data è quindi equivalente alle due equazioni:

$$x^2 + 5x - 6 = 6 \quad \vee \quad x^2 + 5x - 6 = -6$$

che hanno soluzioni $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{73}}{2} \quad \vee \quad x = 0 \ \vee \ x = -5$

54 $|x^2+3x|=2$ $\left[S=\left\{-2,-1,\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}\right]$

55 $|2x^2+x|+5=0$ $[S=\varnothing]$

56 $|6x^2-x|=1$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}\right]$

57 $|2x^2+x-1|=5$ $\left[S=\left\{-2,\frac{3}{2}\right\}\right]$

58 $-1=|-x^2+x-4|$ $[S=\varnothing]$

59 $3=|2x^2-3x-2|$ $\left[S=\left\{-1,\frac{5}{2},\frac{1}{2},1\right\}\right]$

60 $|2x^2+7x+6|+2=0$ $[S=\varnothing]$

61 $|x^2-3x+9|-7=0$ $[S=\{1,2\}]$

62 $\dfrac{|x^2-3x+2|}{3}=4$ $[S=\{-2,5\}]$

63 **ESERCIZIO SVOLTO**

$|x^2-4|=4+2x$

L'equazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2-4=4+2x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2-4<0 \\ -x^2+4=4+2x \end{cases}$$

Questa volta però non possiamo ritenere superflua la disequazione; questo significa che dovremo vedere se le radici delle due equazioni soddisfano le disequazioni del proprio sistema:

- primo sistema: $\begin{cases} x\leq -2 \ \vee \ x\geq 2 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases}$

  risolvendo l'equazione si ottiene $x=\begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$ che sono entrambe accettabili

- secondo sistema: $\begin{cases} -2<x<2 \\ x^2+2x=0 \end{cases}$

  risolvendo l'equazione si ottiene $x=\begin{cases} -2 \\ 0 \end{cases}$ ed è accettabile solo $x=0$

In definitiva, l'insieme delle soluzioni è $S=\{-2,0,4\}$.

64 $|x^2-3x+3|=2x+3$ $[S=\{0,5\}]$

65 $|2x^2-6|=6-2x$ $[S=\{-3,0,1,2\}]$

66 $|x^2-1|=2x+1$ $[S=\{0,\sqrt{3}+1\}]$

67 $2-|x-2|=x^2-5x$ $\left[S=\left\{0,2(\sqrt{2}+1)\right\}\right]$

68 **ESERCIZIO GUIDATO**

$1 - |x-1| = x + |x^2-4|$

Valutiamo il segno dei polinomi di ciascun modulo e riportiamoli in una tabella:

		-2		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	•	$+$		$+$
x^2-4	$+$	•	$-$		$-$	•	$+$

Devi quindi risolvere i seguenti quattro sistemi:

$$\begin{cases} x \le -2 \\ 1+x-1 = x+x^2-4 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x \le 1 \\ 1+x-1 = x-x^2+4 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} 1 < x \le 2 \\ 1-x+1 = x-x^2+4 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 2 \\ 1-x+1 = x+x^2-4 \end{cases}$$

$[S = \{-2\}]$

69 $|x| + |x^2-4| = x+5$ $\left[S = \left\{-1, 3, 1-\sqrt{10}\right\}\right]$

70 $x + 2|x-1| = x^2 + |3x|$ $\left[S = \left\{\sqrt{6}-2, 1-\sqrt{3}\right\}\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni con i moduli.

71 **ESERCIZIO SVOLTO**

$|2x - x^2| < 1$

La disequazione è equivalente ai due sistemi: $\begin{cases} 2x-x^2 \ge 0 \\ 2x-x^2 < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-x^2 < 0 \\ 2x-x^2 > -1 \end{cases}$

Il primo sistema ci dice che l'espressione $2x - x^2$ deve essere compresa fra 0 e 1 o anche uguale a zero; il secondo che deve essere compresa fra -1 e 0. In sostanza $2x - x^2$ deve essere compreso fra -1 e 1. La disequazione data è quindi equivalente al sistema

$\begin{cases} 2x-x^2 > -1 \\ 2x-x^2 < 1 \end{cases}$ che ha soluzione $1-\sqrt{2} < x < 1 \ \vee\ 1 < x < 1+\sqrt{2}$

72 $|x^2+2x| < 4$ $\left[-\sqrt{5}-1 < x < \sqrt{5}-1\right]$

73 $|6x-4x^2-2| < 2$ $\left[0 < x < \frac{3}{2}\right]$

74 $|x^2+4x| < 3$ $\left[-\sqrt{7}-2 < x < -3 \ \vee\ -1 < x < \sqrt{7}-2\right]$

75 $|2x^2+x+1| < -6$ $[S = \varnothing]$

76 **ESERCIZIO SVOLTO**

$|4x^2+3x-1| > 6$

La disequazione è equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} 4x^2+3x-1 \ge 0 \\ 4x^2+3x-1 > 6 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x^2+3x-1 < 0 \\ 4x^2+3x-1 < -6 \end{cases}$$

La prima disequazione di entrambi i sistemi è superflua; basta allora risolvere le due rimanenti disequazioni e unire i due insiemi soluzione:

$4x^2 + 3x - 1 > 6 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 3x - 7 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{7}{4} \vee x > 1$

$4x^2 + 3x - 1 < -6 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 3x + 5 < 0 \quad \rightarrow$ per nessun valore di x

L'insieme delle soluzioni è quindi $x < -\frac{7}{4} \vee x > 1$.

77 $|x^2 - x| > 6$ $[x < -2 \;\vee\; x > 3]$

78 $|x^2 - 3x| > -2$ $[S = R]$

79 $|2x^2 - x + 1| > 2$ $\left[x < -\frac{1}{2} \;\vee\; x > 1\right]$

80 **ESERCIZIO GUIDATO**

$|x^2 - 4x + 5| > x + 1$

La disequazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 5 > x + 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 5 < 0 \\ -x^2 + 4x - 5 > x + 1 \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzione .... Il secondo sistema ha soluzione ....
Unendo i due insiemi trovi la soluzione della disequazione data: $x < 1 \;\vee\; x > 4$

81 $|x^2 - 4| > 3x - 6$ $[R - \{2\}]$

82 $3 - |x^2 - 9| \geq x$ $[-4 \leq x \leq -2 \;\wedge\; x = 3]$

83 $1 + 2x > |x^2 - 4|$ $[1 < x < \sqrt{6} + 1]$

84 $1 - |x^2 - 3x| \leq x - 2$ $[x \leq -1 \;\vee\; x \geq 1]$

85 $|-3x^2 + 5x| < -2(x + 1)$ $[S = \varnothing]$

86 $|2x^2 - 10x| \geq x + 6$ $\left[x \leq -\frac{1}{2} \;\vee\; \frac{9 - \sqrt{33}}{4} \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{33}}{4} \;\vee\; x \geq 6\right]$

87 $|2x^2 - x - 1| \leq x$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right]$

88 $|x^2 - 3x + 2| + 2x < x^2 - 4$ $[x > 6]$

89 $\frac{1}{2}x(2 - |x - 4|) > 0$ $[x < 0 \;\vee\; 2 < x < 6]$

90 **ESERCIZIO GUIDATO**

$|x^2 - 3| - 2x + 4 \geq |4x - 1|$

Determiniamo innanzi tutto la variazione dei segni dei due binomi nei due moduli e riportiamoli in una tabella.

		$-\sqrt{3}$		$\frac{1}{4}$		$\sqrt{3}$	
x^2-3	+	•	−		−	•	+
$4x-1$	−		−	•	+		+

Devi quindi risolvere i seguenti quattro sistemi e determinare l'unione delle soluzioni:

$$\begin{cases} x \le -\sqrt{3} \\ x^2 - 3 - 2x + 4 \ge -4x + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -\sqrt{3} < x \le \dfrac{1}{4} \\ -x^2 + 3 - 2x + 4 \ge -4x + 1 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} \dfrac{1}{4} < x \le \sqrt{3} \\ -x^2 + 3 - 2x + 4 \ge 4x - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x^2 - 3 - 2x + 4 \ge 4x - 1 \end{cases}$$

$[x \le -2 \ \vee \ -\sqrt{7} + 1 \le x \le \sqrt{17} - 3 \ \vee \ x \ge \sqrt{7} + 3]$

91 $x|1 + x| - 2 > |3x + 1|$ $[x > 3]$

92 $\dfrac{7}{4} - |x^2 - 2x + 1| > \left|x^2 - \dfrac{9}{4}\right|$ $\left[\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}\right]$

93 $|x - 2| > 4x^2 - 3|x|$ $\left[\dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2} < x < 1\right]$

94 $3 - |x + 2| \ge \dfrac{|x - 2|}{3}$ $\left[-\dfrac{13}{4} \le x \le \dfrac{1}{2}\right]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

95 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y = \sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{x^2 - 1}$

Un radicale di indice pari esiste se il suo argomento è positivo o nullo; devi quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3 \ge 0 \\ x^2 - 1 \ge 0 \end{cases}$$

$[x \le -\sqrt{3} \ \vee \ x \ge \sqrt{3}]$

96 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x + 1}}$ $[-1 < x \le 0 \ \vee \ x \ge 1]$

97 $y = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 3x^2 + 2x}} + \sqrt{x}$ $\left[0 \le x < \dfrac{5}{3}\right]$

98 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{3x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 2x}}$ $[x > 0]$

99 $y = \dfrac{x + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{2x^2 - 7x + 3}}$ $[x > 3]$

100 $y = \dfrac{x^2 - x\sqrt{x}}{3 + \sqrt{4 - x^2}}$ $[0 \le x \le 2]$