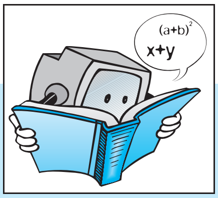
# Le equazioni di secondo grado e di grado superiore

# 5




## Per ricordare

★ Un'**equazione di secondo grado** assume sempre la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$
dove si suppone che sia $a \neq 0$. Se anche i coefficienti $b$ e $c$ non sono nulli, l'equazione si dice completa e per trovare le sue soluzioni si applica la formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se il coefficiente $b$ è un numero pari è più conveniente applicare la forma ridotta di tale formula che si ottiene dividendo numeratore e denominatore per 2:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

L'espressione che compare come argomento della radice quadrata prende il nome di **discriminante** e viene comunemente indicata con il simbolo $\Delta$ : $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$.
A seconda del valore di $\Delta$ si presentano i seguenti casi:

- $\Delta > 0$ si trovano due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$ si trovano due soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali perchè non è possibile calcolare la radice quadrata di un numero negativo.

Per esempio:

- $2x^2 - 7x + 6 = 0$ applicando la prima formula con $a = 2$, $b = -7$ e $c = 6$, si ottengono le soluzioni: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \dfrac{7 \pm 1}{4} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$

- $4x^2 + 8x - 5 = 0$ applicando la seconda formula perché $b$ è pari, si ottengono le soluzioni:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

- $x^2 - 3x + 7 = 0$ non ha soluzioni reali perchè $\Delta = 9 - 28 = -19 < 0$.

★ La formula risolutiva si può sempre applicare nell'ipotesi che sia $a \neq 0$, quindi anche quando uno degli altri coefficienti è nullo; tuttavia, in questi particolari casi, è più conveniente applicare algoritmi diversi:

- se $c = 0$, l'equazione assume la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$
  e per risolverla si può scomporre il polinomio al primo membro raccogliendo $x$ ed applicando la legge di annullamento del prodotto
- se $b = 0$, l'equazione assume la forma $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$
  e, se $a$ e $c$ sono discordi, si può risolvere applicando la definizione di radicale algebrico:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Per esempio:

- $4x^2 - 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x(4x-5) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ 4x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = \frac{5}{4}$
- $4x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2}$

★ Fra i coefficienti $a$, $b$, $c$ di un'equazione di secondo grado e le sue soluzioni $x_1$ e $x_2$ sussistono le seguenti relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Esse consentono di risolvere particolari problemi, fra i quali:

- trovare rapidamente le soluzioni di un'equazione senza applicare la formula risolutiva in alcuni casi semplici:

  $$x^2 - 6x + 5 = 0$$

  le soluzioni sono i due numeri la cui somma è 6 ed il cui prodotto è 5, cioè $x = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$
- trovare due numeri sapendo che la loro somma è $s$ ed il loro prodotto è $p$:
  i due numeri sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - sx + p = 0$
- scomporre un trinomio di secondo grado se $\Delta \geq 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
  dove $x_1$ e $x_2$ sono le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

★ Non esistono formule facilmente applicabili per risolvere equazioni di grado superiore al secondo; in generale, una volta scritta l'equazione nella forma $A(x) = 0$, dove $A(x)$ è un polinomio di grado $n$ nell'incognita $x$, si cerca di scomporre $A(x)$ nel prodotto di fattori al più di secondo grado e si applica la legge di annullamento del prodotto.
Per esempio:

$$2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(2x-5) - (2x-5) = 0 \quad \rightarrow \quad (2x-5)(x^2-1) = 0$$

e applicando la legge di annullamento: $2x - 5 = 0 \ \vee \ x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{2} \ \vee \ x = \pm 1$

Quando l'equazione si presenta in una forma particolare si possono utilizzare altri algoritmi di calcolo; ricordiamo i casi più importanti:

- equazioni **binomie** della forma $ax^n + b = 0$

  Si risolvono ricavando l'espressione di $x^n$ e applicando la definizione di radicale. Per esempio

  $$4x^4 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^4 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- equazioni **trinomie** della forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

  Si risolvono operando il cambio di variabile $x^n = t$ e risolvendo l'equazione di secondo grado $at^2 + bt + c = 0$ che si ottiene.

  Nel caso particolare in cui $n = 2$ l'equazione prende il nome di **biquadratica.**
  Per esempio:

  $$3x^4 - x^2 - 10 = 0 \quad \text{poniamo } x^2 = t \quad \rightarrow \quad 3t^2 - t - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} 2 \\ -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

  Operando la sostituzione inversa: $x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$

  $x^2 = -\frac{5}{3}$ impossibile

  Le sole soluzioni dell'equazione sono quindi $\pm\sqrt{2}$.

## Esercizi di Consolidamento

*Risolvi in R le seguenti equazioni di secondo grado applicando la formula risolutiva.*

**1** $x^2 - 5x + 4 = 0$ $[S = \{1, 4\}]$

**2** $4x^2 - 6x + 1 = 0$ $\left[S = \left\{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}\right\}\right]$

**3** $-2x^2 + 3x - 1 = 0$ $\left[S = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}\right]$

**4** $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$ $[S = \{4\}]$

**5** $\frac{3}{2}x^2 + 5x + 8 = 0$ $[S = \varnothing]$

**6** **ESERCIZIO SVOLTO**

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - 2x\right)^2 + 4 = 0$$

Svolgiamo innanzi tutto i calcoli fino a scrivere l'equazione nella sua forma normale:

$$x^2 - \frac{1}{4} - 4x^2 + 2x + 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 12x^2 - 8x - 15 = 0$$

Applichiamo adesso la formula risolutiva:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-15)}}{2 \cdot 12} = \frac{8 \pm \sqrt{784}}{24} = \frac{8 \pm 28}{24} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{6} \end{cases}$$

Osserviamo che, essendo il coefficiente $b$ pari, si può applicare la formula ridotta che rende più semplice il calcolo:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 12 \cdot (-15)}}{12} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{12} = \frac{4 \pm 14}{12} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{6} \end{cases}$$

7 $3x\left(\frac{1}{3} + x\right) = \frac{9x - 1}{3}$ $\left[S = \left\{\frac{1}{3}\right\}\right]$

8 $\left(2x - \frac{1}{5}\right)(x - 1) + \frac{2}{5} = 0$ $\left[S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right\}\right]$

9 $\frac{3x + 2}{4} - \frac{4x^2 - 1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{1}{2}x\right) - 1$ $\left[S = \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}\right\}\right]$

10 $\frac{(x + 2)}{3}\left(\frac{1}{4}x + 1\right) - \frac{1}{4}\left[x + 2x\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{4}x\right)\right] = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{6}x^2\right)$ $[S = \varnothing]$

11 $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + x = \frac{1}{4}\left(7x + \frac{3}{4}\right) - \frac{9}{64}$ $\left[S = \left\{\frac{1}{8}\right\}\right]$

12 $\frac{1}{2}(x + 1)^2(x - 1) + \frac{x + 2}{3} = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{1}{3}\right) - \frac{5x - 1}{6}$ $\left[S = \left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}\right]$

13 $(x - 3)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1 - x(16 + x)}{4}$ $\left[S = \left\{-4, \frac{1}{3}\right\}\right]$

14 $4x - \left[\frac{1}{2} - 3x\left(\frac{1}{9} + \frac{3}{4}x\right)\right] = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + \frac{1}{2}$ $\left[S = \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}\right]$

15 $\frac{2}{3}x^2 - 2x + \frac{x - 2x^2}{3} = \frac{x(1 - x)}{3} - 3$ $[S = \{3\}]$

16 $\frac{(1 - 2x)^2}{12} + (x + 1) \cdot \frac{(1 - 2x)}{3} = \frac{2x - 1}{4}$ $\left[S = \left\{-4, \frac{1}{2}\right\}\right]$

17 $(\sqrt{3} - 1)x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1) = \sqrt{3}x - x^2$ $\left[S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}\right]$

*Risolvi le seguenti equazioni incomplete.*

18 **ESERCIZIO SVOLTO**

$4x^2 - 9x = 0$

In questa equazione manca il termine noto e possiamo quindi raccogliere $x$: $x(4x - 9) = 0$

Applicando adesso la legge di annullamento del prodotto si ottiene: $x = 0 \lor x = \frac{9}{4}$

19 $x^2 - 4x = 0$ $[S = \{0, 4\}]$

20 $5x^2 - 7x = x(x-1)$ $\left[S = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}\right]$

21 $7x^2 - 3x = 2x(x-1)$ $\left[S = \left\{0, \frac{1}{5}\right\}\right]$

22 $\frac{1}{2}x\left(2x - \frac{1}{3}\right) = \left(x + \frac{1}{6}\right)(-2 + 3x) + \frac{1}{3}$ $\left[S = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}\right]$

23 **ESERCIZIO SVOLTO**

$3x^2 - 16 = 0$

Manca il termine di primo grado, quindi possiamo ricavare $x^2$ ed applicare la definizione di radicale:

$$x^2 = \frac{16}{3} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

24 $5x^2 - 8 = 0$ $\left[S = \left\{\pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right\}\right]$

25 $\frac{x-1}{3} + \frac{x(2x+3)}{6} = 1 + \frac{5}{6}x$ $[S = \{\pm 2\}]$

26 $3x^2 - 1 + \frac{x+2}{5} = \frac{1}{5}x$ $\left[S = \left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}\right]$

27 $(2x-1)^2 - (5-x)^2 = \frac{9}{2} - \frac{3-12x}{2}$ $[S = \{\pm 3\}]$

28 $\frac{4}{x+4} = 1 - \frac{2}{x+2}$ $[S = \{\pm 2\sqrt{2}\}]$

*Risolvi in R le seguenti equazioni frazionarie di secondo grado.*

29 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\frac{x}{x-1} = \frac{10}{3x-1}$$

Per l'esistenza dell'equazione deve essere

$$x - 1 \neq 0 \ \wedge \ 3x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 1 \ \wedge \ x \neq \frac{1}{3}$$

Il dominio dell'equazione è quindi $R - \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$.

Svolgiamo i calcoli riconducendo l'equazione alla sua forma normale:

$$\frac{x(3x-1)}{(x-1)(3x-1)} = \frac{10(x-1)}{(x-1)(3x-1)} \quad \rightarrow \quad 3x^2 - x = 10x - 10 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 11x + 10 = 0$$

Applichiamo la formula risolutiva: $x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} = \begin{cases} 2 \\ \frac{5}{3} \end{cases}$

**30** $\frac{x+1}{x-2}=\frac{8-x^2}{x^2-4x+4}$ $\left[S=\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}\right]$

**31** $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-3}=\frac{1}{x^2-x-2}$ $\left[S=\left\{1, \frac{5}{3}\right\}\right]$

**32** $1+\frac{x+1}{2x-1}+\frac{4}{x-3}=0$ $\left[S=\left\{-1, \frac{4}{3}\right\}\right]$

**33** $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+3}=\frac{20x^2}{x^2+4x+3}$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}\right]$

**34** $\frac{1}{x}(3x^2-2x+1)=5x-1$ $\left[S=\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}\right]$

**35** $\frac{2x-1}{x+3}+\frac{x}{x-2}-\frac{5x^2}{x^2+x^3-6x}=0$ $\left[S=\left\{\frac{1}{3}\right\}\right]$

**36** $\frac{2-x}{x-3}+\frac{5x-7}{x^2-2x-3}=\frac{1-2x}{x+1}$ $[S=\{2\}]$

**37** $1+\frac{x-5}{x^2-2x-3}=\frac{2}{x-3}$ $[S=\{-2, 5\}]$

**38** $\frac{x^2-9}{(x+1)(x-2)(x+3)}+\frac{x^2+4}{x^2-x-2}+\frac{3x}{x+1}=0$ $\left[S=\left\{1, \frac{1}{4}\right\}\right]$

**39** $\frac{x-2}{x}+\frac{2x}{x^2-x}=\frac{2x}{x-1}$ $[S=\{-2\}]$

**40** $\frac{x-4}{1-x}=\frac{2(x+5)}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}$ $\left[S=\left\{-3, \frac{4}{3}\right\}\right]$

**41** $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x^2+x-4}{x^2+x-2}=\frac{x}{x+2}$ $[S=\{-4, 2\}]$

**42** $\frac{1-2x}{2x}=\frac{1}{2}-\frac{x+3}{x^2}$ $[S=\{-1, 2\}]$

**43** $\frac{x}{2x-1}+\frac{x-2}{2x+15}=\frac{8}{4x(x+7)-15}$ $[S=\{-3\}]$

**44** $\frac{3x+1}{2x-1}+2=2\left(\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}+\frac{1}{2x-2}\right)$ $\left[S=\left\{\frac{4}{7}, 2\right\}\right]$

**45** $(x-1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{1-3x}{2x-1}$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}\right]$

**46** $\frac{1}{x-2}-\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+2x}+\frac{x-1}{x^2-2x}=0$ $[S=\{3\}]$

**47** $\frac{x^3}{2x^2-8}=\frac{1}{2}x-\frac{6}{(x+2)^2}$ $[S=\{-6, 1\}]$

*Di due numeri sono noti la somma s e il prodotto p; determina tali numeri nei seguenti casi.*

**48 ESERCIZIO SVOLTO**

$s = 2 \qquad p = -\frac{1}{3}$

Dobbiamo risolvere l'equazione

$$x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0 \quad \to \quad 3x^2 - 6x - 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

I due numeri sono quindi: $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$.

**49** $s = -\frac{5}{2} \qquad p = -\frac{3}{2}$ $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$

**50** $s = \frac{7}{2} \qquad p = 3$ $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

**51** $s = -\frac{1}{4} \qquad p = -\frac{3}{4}$ $\left[-1, \frac{3}{4}\right]$

**52** $s = -\frac{24}{5} \qquad p = -1$ $\left[-5, \frac{1}{5}\right]$

**53** $s = \frac{21}{5} \qquad p = \frac{18}{5}$ $\left[\frac{6}{5}, 3\right]$

**54** $s = -\frac{5}{2} \qquad p = 1$ $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

**55** $s = \frac{29}{12} \qquad p = \frac{5}{4}$ $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right]$

**56** $s = \frac{1}{6} \qquad p = -\frac{1}{6}$ $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

**57** $s = \frac{1}{2} \qquad p = -\frac{3}{16}$ $\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

*Scrivi l'equazione che ha per soluzioni i numeri dati:*

**58 ESERCIZIO SVOLTO**

$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{4}$

Somma delle soluzioni: $s = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ Prodotto delle soluzioni: $p = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{8}$

L'equazione che ha per soluzioni i numeri dati è quindi:

$$x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0 \qquad \text{cioè} \qquad 8x^2 - 2x - 3 = 0$$

**59** $x_1 = 8 \qquad x_2 = -2$ $[x^2 - 6x - 16 = 0]$

**60** $x_1 = \frac{3}{4} \qquad x_2 = 2$ $[4x^2 - 11x + 6 = 0]$

61 $x_1 = -3 \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$ $[2x^2 + 9x + 9 = 0]$

62 $x_1 = \frac{1}{6} \qquad x_2 = -\frac{1}{6}$ $[36x^2 - 1 = 0]$

63 $x_1 = \sqrt{3} + 1 \qquad x_2 = \sqrt{3} - 1$ $[x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0]$

64 $x_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3} \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$ $[9x^2 - 6x - 1 = 0]$

*Scomponi in fattori i seguenti trinomi:*

65 **ESERCIZIO SVOLTO**

$10x^2 - x - 3$

Ricordiamo che il trinomio $ax^2 + bx + c$ si scompone in $a(x - x_1)(x - x_2)$ essendo $x_1$ e $x_2$ le soluzioni dell'equazione associata al trinomio.

Risolviamo dunque l'equazione: $10x^2 - x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{20} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} \end{cases}$

Il trinomio si scompone quindi in $10\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right)$ cioè $(2x + 1)(5x - 3)$.

66 $x^2 + 4x - 12$ $[(x + 6)(x - 2)]$

67 $2x^2 - 5x - 3$ $[(x - 3)(2x + 1)]$

68 $6x^2 - 7x - 20$ $[(3x + 4)(2x - 5)]$

69 $2x^2 - x - 6$ $[(x - 2)(2x + 3)]$

70 $30x^2 + 19x - 4$ $[(6x - 1)(5x + 4)]$

71 $25x^2 - 5x - 2$ $[(5x - 2)(5x + 1)]$

72 $12x^2 + 23x - 9$ $[(3x - 1)(4x + 9)]$

*Risolvi in R, mediante scomposizione, le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.*

73 **ESERCIZIO SVOLTO**

$6x^3 - 9x = 8x^2 - 12$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro: $6x^3 - 9x - 8x^2 + 12 = 0$

Scomponiamo il polinomio al primo membro mediante un raccoglimento parziale e poi totale:

$$3x(2x^2 - 3) - 4(2x^2 - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad (2x^2 - 3)(3x - 4) = 0$$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto: $2x^2 - 3 = 0 \quad \vee \quad 3x - 4 = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x = \frac{4}{3}$$

**74** $4x^3 - 8x^2 = x - 2$ $\left[S = \left\{\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right\}\right]$

**75** $(x+3)x^2 + 2x^2 + 7x + 3 = 0$ $[S = \{-3, -1\}]$

**76** $x^2(2x-3) = 3x - 2$ $\left[S = \left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}\right]$

**77** $(2x+1)(x-1) = 2x - x^3 - 1$ $[S = \{1, 0, -3\}]$

**78** $\frac{1}{2}(3-x) + x^2 = 4x(2 - 2x - x^2)$ $\left[S = \left\{-3, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}\right]$

**79** $2x - 3x^2(1-x^4) - 2x^5 = x^4 - 1$ $\left[S = \left\{-1, -\frac{1}{3}, 1\right\}\right]$

**80** $x(x-2) + 1 + x^2 - x^3(2-x) = 0$ $[S = \{1\}]$

**81** $x^2 - 6x + 9 + (x-3)(x-6) = (3-x)^3$ $[S = \{0, 3, 4\}]$

**82** $(x^2+1)(x-2) = x + x^2 - 6$ $[S = \{-1, 2\}]$

**83** $x(1-3x) = x^3(1-x) - 2$ $[S = \{-1, 1, 2\}]$

**84** $(x^2+3x)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^2 + \frac{23}{3}x - \frac{8}{3}$ $\left[S = \left\{-4, \frac{1}{3}, 2\right\}\right]$

**85** $(x-1)^3 - 2(x-1)^2 + x = 1$ $[S = \{1, 2\}]$

**86** $2x^2 - x(2x+1) = 2(x+1)^3 - 17$ $[S = \{1\}]$

**87** $(x+4)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 4x - 2x^2 - \frac{3}{2}$ $\left[S = \left\{-5 \pm 2\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right\}\right]$

**88** $\frac{1}{30}(x^2-1) + \frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{1}{10}\right) = x^3 - x$ $\left[S = \left\{-\frac{5}{6}, 0, \frac{6}{5}\right\}\right]$

**89** $(x+2)^4 - 2x^3 = x^4$ $[S = \{-2\}]$

**90** $x^6 = (x^3 - x)^2$ $\left[S = \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right\}\right]$

*Risolvi in R le seguenti equazioni binomie.*

**91** **ESERCIZIO SVOLTO**

$4x^4 - 81 = 0$

Ricaviamo l'espressione di $x^4$ : $x^4 = \frac{81}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{\frac{81}{4}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

**92** $\frac{1}{125} = 8x^3$ $\left[S = \left\{\frac{1}{10}\right\}\right]$

**93** $\frac{1}{x^4} = \frac{1}{81}$ $[S = \{\pm 3\}]$

94 $81x^4 - 1 = 0$ $\left[S = \left\{\pm\frac{1}{3}\right\}\right]$

95 $730 - x^3 = 1$ $[S = \{9\}]$

96 $\frac{1}{216} = 6x^4$ $\left[S = \left\{\pm\frac{1}{6}\right\}\right]$

97 $125x^3 = 81\sqrt{3}$ $\left[S = \left\{\frac{3\sqrt{3}}{5}\right\}\right]$

98 $\frac{x^{10}}{2} = 16$ $[S = \{\pm\sqrt{2}\}]$

99 $x^3 = \frac{512}{x^3}$ $[S = \{\pm 2\sqrt{2}\}]$

*Risolvi in R le seguenti equazioni trinomie.*

100 **ESERCIZIO SVOLTO**

$27x^6 - 46x^3 - 16 = 0$

Ponendo $x^3 = t$ l'equazione diventa $27t^2 - 46t - 16 = 0$ ed ha soluzioni

$$t = 2 \quad \vee \quad t = -\frac{8}{27}$$

Operando la sostituzione inversa si trovano le soluzioni:

$$x^3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2} \qquad \vee \qquad x^3 = -\frac{8}{27} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$$

101 $3x^4 - 14x^2 = 5$ $[S = \{\pm\sqrt{5}\}]$

102 $27x^6 - \frac{1}{27} = 9x^3 - \frac{1}{3}$ $\left[S = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}\right]$

103 $4x^4 + x^8 = 5$ $[S = \{\pm 1\}]$

104 $4x^2 + 1 = 16x^4 - 1$ $\left[S = \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]$

105 $x^{10} - 31(x^5 + 1) = 1$ $[S = \{-1, 2\}]$

106 $x^6 + \frac{5}{8}x^3 + 27 = 12x^3$ $\left[S = \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}\right]$

107 $x^4 - 6x^2 = 2(x^2 - 8)$ $[S = \{\pm 2\}]$

108 $9\sqrt{3}x^5 + x^{10} = x^5 + 9\sqrt{3}$ $[S = \{-\sqrt{3}, 1\}]$

109 $x^6 - \left(2\sqrt{2} - 1\right)x^3 = 2\sqrt{2}$ $[S = \{-1, \sqrt{2}\}]$

110 $4x^3 + x^3(3 + 8x^3) = 1$ $\left[S = \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}\right]$

111 $x^4 - x^2\left(8 - 4\sqrt{2}\right) + 4\sqrt{2} - 9 = 0$ $\left[S = \left\{\pm\left(1 - 2\sqrt{2}\right)\right\}\right]$

## ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

*Risolvi in R le seguenti equazioni letterali intere di secondo grado.*

**1** ESERCIZIO SVOLTO

$(a-1)(x+2)+a=ax^2-3x(x-a)$

Svolgiamo i calcoli:

$ax-x+2a-2+a=ax^2-3x^2+3ax \qquad \rightarrow \qquad 3x^2-ax^2-2ax-x+3a-2=0$

Raccogliamo $x^2$ fra i primi due termini e $x$ fra i secondi due in modo da scrivere l'equazione in forma normale:

$$(3-a)x^2-(2a+1)x+3a-2=0$$

Nell'ipotesi in cui $3-a\neq 0$ cioè $a\neq 3$ possiamo applicare la formula risolutiva:

$$x=\frac{(2a+1)\pm\sqrt{(2a+1)^2-4(3-a)(3a-2)}}{2(3-a)}=\frac{(2a+1)\pm(4a-5)}{2(3-a)}= \begin{cases} \dfrac{3a-2}{3-a} \\ 1 \end{cases}$$

Se invece $a=3$ non si può applicare la formula; sostituendo 3 al posto di $a$ nell'equazione otteniamo:

$$-7x+7=0$$

che è un'equazione di primo grado con soluzione $x=1$.

Riassumendo: se $a\neq 3:\quad S=\left\{1,\dfrac{3a-2}{3-a}\right\}$

se $a=3:\quad S=\{1\}$

**2** $\frac{1}{2}(6a+x^2)=x(3+a)-\frac{1}{2}x^2$ $[S=\{3,a\}]$

**3** $5a+x=2\left[3-(x-a)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a\right)\right]$ $[S=\{a-3,2-a\}]$

**4** $2(a-x)+ax(1+x-a)=1+(a-x)^2$ $[a\neq 1: S=\{a-1,-1\}; a=1: S=R]$

**5** $x^2+3a=2x(3+a)-(3a-x^2)$ $\left[a\neq -3: S=\left\{\frac{3a}{a+3}\right\}; a=-3: S=\varnothing\right]$

**6** $3a(2-a)+(2x-3a)(x-a)+ax^2=10\left(x-\frac{6}{5}\right)$ $[a\neq -2: S=\{2,3\}; a=-2: S=R]$

**7** $4x-3(ax+1)=x^2(1-a)$ $\left[a\neq 1: S=\left\{\frac{1}{1-a},3\right\}; a=1: S=\{3\}\right]$

**8** $2x(2a-1)-6a=x^2(1-2a)-3$ $\left[a\neq\frac{1}{2}: S=\{-3,1\}; a=\frac{1}{2}: S=R\right]$

**9** $(x-1)^2+a^2x-3x^2(a^2-1)+a^3x^2=3+a(x+2)$ $\left[a\neq -1\wedge a\neq 2: S=\left\{\frac{2}{2-a},\frac{1}{a-2}\right\};\ a=-1: S=R; a=2: S=\varnothing\right]$

**10** **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\frac{x-a}{a}=\frac{x+a}{a-1}-\frac{x^2+a^2}{a^2-a}$$

L'equazione ha come dominio l'insieme $R$, ma dobbiamo richiedere che sia $a \neq 0 \;\wedge\; a \neq 1$ altrimenti l'equazione, avendo i denominatori nulli, perde significato.
Facendo il denominatore comune e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$x^2-x-a^2+a=0$$

Applica adesso la formula risolutiva.

[$a \neq 0 \wedge a \neq 1 : S=\{1-a, a\}$ : $a=0 \vee a=1$ : l'equazione perde significato]

**11** $x^2-2ax=\dfrac{x-2a}{a}$ $\left[a \neq 0 : S=\left\{2a, \dfrac{1}{a}\right\}; a=0 : \text{l'equazione perde significato}\right]$

**12** $\dfrac{6x+8a^2}{a}+(x+3)(x-2)=\dfrac{1}{a}(2a+x)(4a+x)$ $\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge a \neq 1 : S=\left\{\dfrac{a}{1-a}, 6\right\}; \\ a=0 : \text{l'equazione perde significato;} \\ a=1 : S=\{6\} \end{array}\right]$

**13** $x+\dfrac{ax^2-a}{a+1}=ax$ $\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge a \neq -1 : S=\left\{a, -\dfrac{1}{a}\right\}; \\ a=0 : S=\{0\}; \\ a=-1 : \text{l'equazione perde significato} \end{array}\right]$

*Risolvi in $R$ le seguenti equazioni letterali frazionarie di secondo grado.*

**14** **ESERCIZIO SVOLTO**

$$2-\frac{3a}{x}=\frac{1-a}{x-1}$$

Per l'esistenza dell'equazione deve essere $x \neq 0 \wedge x \neq 1$; il dominio è quindi

$$R-\{0,1\}$$

Svolgiamo i calcoli: $\dfrac{2x(x-1)-3a(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{x(1-a)}{x(x-1)} \quad \rightarrow \quad 2x^2-x(3+2a)+3a=0$

Il coefficiente di $x^2$ non è letterale e non è nullo; possiamo applicare subito la formula:

$$x=\frac{(3+2a)\pm\sqrt{(3+2a)^2-24a}}{4}=\frac{3+2a\pm(3-2a)}{4}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\\ a\end{cases}$$

La soluzione $\dfrac{3}{2}$ è sempre accettabile perchè appartiene al dominio; la soluzione $a$ è accettabile solo se non assume i valori esclusi dal dominio, cioè se è $a \neq 0 \wedge a \neq 1$.

Riassumendo: se $a \neq 0 \;\wedge\; a \neq 1 : S=\left\{\dfrac{3}{2}, a\right\}$

se $a=0 \;\vee\; a=1 : S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

**15** $\frac{2x}{x+a}=\frac{x-2}{a-2}$ $[a\neq 2\wedge a\neq 0: S=\{a,-2\}; a=2:$ l'equazione perde significato$; a=0: S=\{-2\}]$

**16** $\frac{x+a}{x-a}+ax=\frac{2a}{x-a}$ $\left[a\neq 0: S=\left\{-\frac{1}{a}\right\}; a=0: S=\varnothing\right]$

**17** $\frac{2bx-3}{x-1}+\frac{5x-4b+5}{x^2-1}=\frac{b(x+3)}{x+1}$ $\left[b\neq 0\wedge b\neq 1: S=\left\{\frac{b-2}{b}\right\}; b=0\vee b=1: S=\varnothing\right]$

**18** $\frac{2}{b}-\frac{1}{x+b}=\frac{b}{x^2-bx-2b^2}+\frac{2}{2b-x}$ $\left[b\neq 0: S=\left\{b,-\frac{1}{2}b\right\}; b=0:\right.$ l'equazione perde significato$\left.\right]$

**19** $\frac{a}{x-2}+1=\frac{3a-x}{x^2-2x}+\frac{2a}{x}$ $[a\neq 2\wedge a\neq 0: S=\{1,a\}; a=2\vee a=0: S=\{1\}]$

**20** $\frac{x+2b}{x-2b}+\frac{x+b}{x-b}+2=0$ $\left[b\neq 0: S=\left\{0,\frac{3}{2}b\right\}; b=0: S=\varnothing\right]$

**21** $\frac{2(x+1)}{x+2a}-\frac{2x+6}{3ax+2a^2+x^2}=\frac{x+1}{x+a}$ $\left[a\neq 1\wedge a\neq 2\wedge a\neq -\frac{3}{2}\wedge a\neq -3: S=\{-2,3\};\right.$ $a=1\vee a=2: S=\{3\};$ $\left.a=-\frac{3}{2}\vee a=-3: S=\{-2\}\right]$

**22** $\frac{2-5a}{(a-2x)(5x-1)}+\frac{5(3a+2x)}{5x-1}=\frac{5x+2}{2x-a}$ $\left[a\neq\frac{2}{5}\wedge a\neq\frac{1}{5}\wedge a\neq 0: S=\{a,3a-1\};\right.$ $a=\frac{2}{5}: S=\left\{\frac{2}{5}\right\};$ $a=\frac{1}{5}: S=\left\{-\frac{2}{5}\right\};$ $\left.a=0: S=\{-1\}\right]$

**23** $\frac{bx-b}{b-1}+\frac{x+b}{b-1}=\frac{3x}{x-1}$ $\left[b\neq\pm 1: S=\left\{0,\frac{4b-2}{b+1}\right\};\right.$ $b=1:$ l'equazione perde significato; $\left.b=-1: S=\{0\}\right]$

**24** $\frac{x}{x+b}-\frac{x-1}{x-b}=\frac{3-4b}{3b}$ $\left[b\neq 0\wedge b\neq\frac{3}{4}\wedge b\neq 1: S=\left\{2b,\frac{b(3-2b)}{4b-3}\right\}\right.$ $b=0:$ l'equazione perde significato $\left.b=\frac{3}{4}: S=\left\{\frac{3}{2}\right\};\ b=1: S=\{2\}\right]$

**25** $\frac{x+7}{x-a}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{x^2-10+3a}{x^2-x-ax+a}$ $[a\neq -1\wedge a\neq 4: S=\{-1,a-3\};$ $a=-1: S=\{-4\};$ $a=4: S=\{-1\}]$

**26** $\frac{x-2a}{a+1}\left(\frac{2}{a+x}+1\right)+\frac{(2a+1)}{a+x}=0$ $\left[a\neq -1\wedge a\neq 1\wedge a\neq\frac{1}{2}: S=\{-1,a-1\};\right.$ $a=-1:$ l'equazione perde significato; $\left.a=1: S=\{0\}; a=\frac{1}{2}: S=\{-1\}\right]$

*Tenendo presenti le relazioni fra i coefficienti di un'equazione di secondo grado e le sue soluzioni, trova i valori dei parametri che soddisfano le condizioni richieste.*

**27** **ESERCIZIO GUIDATO**

Dette $x_1$ e $x_2$ le soluzioni dell'equazione $x^2 + (k-4)x - 4k = 0$ determina il valore del parametro $k$ affinchè sia:

**a.** $x_1 = x_2$

**b.** $x_1 \cdot x_2 = 3$

**c.** $x_1 + x_2 = -2$

**d.** $x_1 = \frac{1}{2}x_2$

**a.** Le soluzioni sono coincidenti se $\Delta = 0$, cioè se $(k-4)^2 - 4 \cdot (-4k) = 0$

**b.** Il prodotto delle soluzioni è $\frac{c}{a}$ e deve essere uguale a 3 : $-4k = 3 \rightarrow k = \dots\dots\dots$

**c.** La somma delle soluzioni è $-\frac{b}{a}$ e deve essere uguale a $-2$ : $4 - k = -2 \rightarrow k = \dots\dots\dots$

**d.** Scrivi il sistema: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 + x_2 = 4 - k \\ x_1 \cdot x_2 = -4k \end{cases}$

Sostituendo nelle ultime due equazioni l'espressione di $x_1$ ricavata dalla prima ottieni (abbiamo eliminato la prima equazione perché ci interessa determinare solo $k$):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_2 + x_2 = 4 - k \\ \frac{1}{2}x_2^2 = -4k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{8-2k}{3} \\ \frac{1}{2}x_2^2 = -4k \end{cases}$$

Sostituendo infine nella terza equazione l'espressione di $x_2$ ottieni l'equazione:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{8-2k}{3}\right)^2 = -4k$$

che, risolta, dà il valore di $k$ richiesto.

[**a.** $k = -4$; **b.** $k = -\frac{3}{4}$; **c.** $k = 6$; **d.** $k = -8 \vee k = -2$]

**28** Dette $x_1$ e $x_2$ le soluzioni dell'equazione $2a^2 + 2x(x+1) = a + 5ax$, riordinala nella forma normale e determina poi il valore del parametro $a$ affinchè sia:

**a.** $x_1 + x_2 = 1$ [$a = \frac{4}{5}$]

**b.** $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ [$a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$]

**c.** $\frac{3}{2} = x_1 \cdot x_2$ [$a = \frac{3}{2} \vee a = -1$]

**d.** $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 2$ [$a = -3 \vee a = 1$]

**29** Dette $x_1$ e $x_2$ le soluzioni dell'equazione $x^2+2x(1-k)+k^2-2k=0$ determina il valore del parametro $k$ affinchè sia:

**a.** $x_1 = x_2$ [impossibile]

**b.** $x_1 \cdot x_2 = 3$ $[k=-1 \vee k=3]$

**c.** $x_1 - 2x_2 = 0$ $[k=-2 \vee k=4]$

**d.** $x_1^2 + x_2^2 = 4$ $[k=0 \vee k=2]$

(Suggerimento: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$)

**30** Dette $x_1$ e $x_2$ le soluzioni dell'equazione $2x^2-kx-k^2+3k-2=0$ determina il valore del parametro $k$ affinchè sia:

**a.** $x_1+x_2=4$ $[k=8]$

**b.** $x_1=-x_2$ $[k=0]$

**c.** $x_1 \cdot x_2=-1$ $[k=0 \vee k=3]$

**d.** $x_1+2x_2=3$ $\left[k=\frac{8}{3}\right]$

**31** Dette $x_1$ e $x_2$ le soluzioni dell'equazione $x^2-x(k+4)+3+3k=0$, determina il valore del parametro $k$ affinchè:

**a.** $x_1=x_2$ $[k=2]$

**b.** $x_1 \cdot x_2=-2$ $\left[k=-\frac{5}{3}\right]$

**c.** $2x_1+x_2=1$ $[k=-2 \vee k=-6]$

**d.** $x_1^2=3x_2$ $[k=2 \vee k=-4]$

**32** Data l'equazione $ax^2(a+1)-x(3a+2)+2=0$ determina il valore del parametro $a$ affinchè:

**a.** il prodotto delle soluzioni sia uguale a $\frac{1}{3}$ $[a=-3 \vee a=2]$

**b.** la somma delle soluzioni sia uguale a 1 $[a=1\pm\sqrt{3}]$

**c.** le soluzioni siano opposte $\left[a=-\frac{2}{3}\right]$

**d.** la somma dei reciproci delle soluzioni sia uguale a 4 $[a=2]$

**33** Data l'equazione $x^2+x(3-2m)-6m=0$ determina il valore del parametro $m$ affinchè:

**a.** il doppio prodotto delle soluzioni sia uguale alla loro somma $\left[m=\frac{3}{14}\right]$

**b.** le due soluzioni coincidano $\left[m=-\frac{3}{2}\right]$

**c.** non si abbiano soluzioni reali $[\nexists m]$

**34** Data l'equazione $x^2+(3-x)(1-kx)=3x$ determina il valore del parametro $k$ in modo che:

**a.** il doppio del prodotto delle soluzioni sia uguale a 1 $[k=5]$

**b.** il prodotto delle soluzioni superi di 3 la loro somma $\left[k=-\frac{2}{3}\right]$

**c.** il rapporto fra le soluzioni sia uguale a $-2$ $\left[k=-\frac{7}{6} \vee k=-\frac{5}{3}\right]$

**35** Data l'equazione $x(2-x)+ax^2+2a=3ax$, riscrivila nella forma normale e determina poi il valore del parametro $a$ affinchè:

**a.** una soluzione sia uguale a 3 $\left[a=\frac{3}{2}\right]$

**b.** si abbiano due soluzioni coincidenti uguali a 3 $[\nexists a]$

**c.** si abbiano due soluzioni coincidenti uguali a 2 $[a=2]$

**d.** il prodotto delle soluzioni sia uguale a 8 $\left[a=\frac{4}{3}\right]$

**36** Data l'equazione $x^2(a-2)-a(x-1)(a-1)+x=0$, riscrivila nella forma normale e determina poi il valore del parametro $a$ affinchè:

**a.** il prodotto delle soluzioni sia uguale a 6 $[a=3 \vee a=4]$

**b.** una soluzione sia uguale a 3 $\left[a=3 \vee a=\frac{5}{2}\right]$

**c.** le soluzioni siano opposte $\left[a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

*Risolvi in R le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.*

**37** $\dfrac{16x-17}{2x-3}+(2x^2-1)=\dfrac{2}{x}$ $\left[S=\left\{1, \frac{1}{2}\right\}\right]$

**38** $\dfrac{2x+3}{3x}=\dfrac{3x-2}{x^2-2}$ $[S=\{3\}]$

**39** $\dfrac{x}{x^2-3}+\dfrac{2x}{x^2+3}=1$ $[S=\{-\sqrt[3]{3}, 3\}]$

**40** $\dfrac{x^2-1}{x+5}+\dfrac{x+5}{x^2-1}=2$ $[S=\{-2, 3\}]$

**41** $\dfrac{8}{27(x-x^2)}-x=\dfrac{1}{3x}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{3}\right\}\right]$

**42** $\dfrac{x^2+2x-4}{2}=\dfrac{x^4-x-1}{x^2+1}$ $[S=\{1\}]$

**43** $2(x^2-1)+(x^2-1)^2-3=12$ (Suggerimento: poni $x^2-1=t$) $[S=\{2, -2\}]$

**44** $(3x-1)^2-4(3x-1)-5=0$ $[S=\{0, 2\}]$

**45** $\dfrac{x^3+4}{x^3+2}=\dfrac{4}{x^3-1}-\dfrac{6}{x^6+x^3-2}$ $[S=\{\sqrt[3]{3}\}]$

**46** $\dfrac{x+2}{9x^2}-\dfrac{x^2}{4x+8}=\dfrac{1}{4}$ $\left[S=\left\{1, -\frac{2}{3}\right\}\right]$

**47** $\dfrac{2(2x^3+3)}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{4(x^4-1)}=\dfrac{6x}{x^2+1}+\dfrac{6x+12x^4+7}{x^4-1}$ $\left[S=\left\{3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}\right]$

**48** $13(x^2+1)+2(x^2+1)^2+15=0$ $[S=\varnothing]$

**49** $\dfrac{1}{3}(2x-1)^3+\dfrac{4}{3}=(2x-1)^2$ $\left[S=\left\{0, \frac{3}{2}\right\}\right]$

**50** $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=4$ $\left[S=\left\{-\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right\}\right]$

**51** $\frac{x^2-1}{4-x}-\frac{1}{x+1}=1-\frac{3x}{4(x^2-1)}$ $\left[S=\left\{-2,\frac{3}{2}\right\}\right]$

**52** $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2=\frac{x}{2(x^2+1)}$ $[S=\{0,1\}]$

**53** $\frac{1}{6}(2-x)^3+\frac{4}{3}-2(x-2)=4x-x^2-4$ $[S=\{4\}]$

**54** $(2x^3-2x^2)^3=(x^3+x-2)^3$ $[S=\{-1,1,2\}]$

**55** $\left(\frac{x-1}{x^2-2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x^2-2}\right)=3$ $\left[S=\left\{-1,-2,\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right\}\right]$

**56** $x^3-a^3+x^6=a^3x^3$ $[S=\{a,-1\}]$

**57** $\frac{1}{a^2}+\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2=\frac{2}{a}\left(\frac{2x-1}{x}\right)$

$\left[a\neq 0\wedge a\neq\frac{1}{2}: S=\left\{\frac{a}{2a-1}\right\};\ a=0: \text{l'equazione perde significato};\ a=\frac{1}{2}: S=\varnothing\right]$

## PROBLEMI

**58** Il prodotto di un numero positivo con il suo successivo dà 20. Di che numero si tratta? [4]

**59** Il prodotto di un numero positivo per il numero stesso diminuito di quattro, dà 5. Trova questo numero. [5]

**60** Se al reciproco di un numero si aggiunge il numero stesso si ottiene 2. Trova il numero. [1]

**61** Trova il numero che, moltiplicato per 3 e diminuito di quattro volte il suo reciproco, dà come risultato 4. $\left[-\frac{2}{3},2\right]$

**62** Dato un numero, il prodotto del suo precedente col suo successivo aumentato del numero stesso è pari ad 1. Trova il numero. $[-2,1]$

**63** Carlo ha 4 anni in meno di sua sorella Elisa e il prodotto delle loro età eguaglia quella del nonno, che quando è nato Carlo aveva 54 anni. Quanti anni hanno Carlo, Elisa e il nonno? $[6,10,60]$

**64** Gigi ha tanti scatoloni pieni di libri ed il numero degli scatoloni è uguale al numero dei libri che ciascuno di essi contiene. Se cedesse uno scatolone e mezzo di libri, gli rimarrebbero ancora 126 libri. Quanti scatoloni possiede? [12]

**65** Marco ha dei cofanetti dove tiene riposti i CD della sua collezione. Il numero dei cofanetti è pari al numero di CD che possono stare in ogni cofanetto diviso per 16. Marco ha ancora posto per 4 CD in un cofanetto più un altro cofanetto totalmente libero. Sapendo che il numero dei CD da lui posseduti è 188, trova il numero di cofanetti e di CD per cofanetto. $[4,64]$

**66** Una macchina sta viaggiando a 90km/h (25m/s). Supponendo che la frenata imponga una decelerazione costante di $4\text{m/s}^2$ stabilisci quanto tempo impiega la vettura a percorrere 23m e quanto tempo impiega a fermarsi. $[1\text{s}; 6,25\text{s}]$

**67** Il rapporto fra l'altezza e la base di un rettangolo è $\frac{4}{9}$. Inoltre se allunghiamo l'altezza di 1m e diminuiamo della stessa quantità la base, la misura dell'area non cambia. Calcola le misure della base e dell'altezza del rettangolo. $[1,8\text{m}; 0,8\text{m}]$

**68** L'area di un triangolo equilatero divisa per $\sqrt{3}$ è numericamente uguale alla misura del lato diminuita di 1. Calcola la misura del perimetro del triangolo. $[6]$

**69** In un rettangolo la base supera l'altezza di $\frac{9}{5}$. Se l'area è $\frac{18}{5}$, quanto misurano base e altezza? $\left[3, \frac{6}{5}\right]$

**70** Del trapezio $ABCD$ rettangolo in $A$ e $D$, si sa che l'angolo di vertice $C$ è di 60°, che il lato obliquo $BC$ è lungo 20cm e che la diagonale $DB$ è perpendicolare al lato obliquo. Determina un punto $P$ su $DB$ in modo che la somma dei quadrati delle sue distanze dai lati del trapezio sia uguale a 672. $\left[\overline{DP} = 12\sqrt{3} \vee \overline{DP} = \frac{92}{9}\sqrt{3}\right]$

**71** Del triangolo $ABC$, rettangolo in $B$, si sa che $\overline{AB} = 12$, $\overline{AC} = 13$. Determina un punto $P$ sull'ipotenusa $AC$ in modo che, detta $K$ la proiezione di $P$ su $AB$, l'area del triangolo $APK$ uguagli quella del trapezio $BKPC$. $[\overline{AK} = 6\sqrt{2}]$

**72** Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 7$ e un punto $P$ su di essa, sia $K$ la proiezione di $P$ su $AB$. Determina la lunghezza di $AK$ in modo che sia $\overline{PK} = 2\sqrt{3}$. $[\overline{AK} = 3 \vee \overline{AK} = 4]$

**73** Sia $P$ un punto della semicirconferenza di centro $O$ e diametro $\overline{AB} = 10$; detta $H$ la proiezione di $P$ sul diametro, determina la lunghezza del segmento $AH$ in modo che il triangolo $APO$ abbia area numericamente uguale al diametro. $[\overline{AK} = 2 \vee \overline{AK} = 8]$

**74** Dato il segmento $AB$ lungo 6cm, determina un punto $C$ su di esso in modo che il quadrato costruito su $AC$ abbia area tripla del quadrato costruito su $BC$. $[\overline{AC} = 9 - 3\sqrt{3}]$

**75** Un trapezio isoscele di altezza 3 è equivalente ad un quadrato; sapendo che la base minore è $\frac{2}{3}$ del lato del quadrato e che il lato obliquo misura 5, calcola la misura del lato del quadrato e l'area del trapezio. $[\sqrt{13} + 1; \text{area} = 14 + 2\sqrt{13}]$

**76** In un trapezio scaleno, la base maggiore è $\frac{7}{5}$ di quella minore, mentre l'altezza è $\frac{25}{14}$ della base maggiore. Se inoltre costruiamo un rettangolo sulla base minore con un altezza pari all'altezza del trapezio aumentata di 2, questo risulta essere equivalente al trapezio dato. Calcola le misure delle basi del trapezio. $\left[\frac{28}{5}, 4\right]$

**77** Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e un punto $P$ su di essa, sia $K$ la proiezione di $P$ su $AB$. Determina la lunghezza di $AK$ in modo che valga la seguente relazione:

$$\frac{\overline{PA}^2 - 2\overline{PK}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{3}{8}$$

$\left[\overline{AK} = \frac{3}{2}r\right]$

**78** Nel triangolo equilatero $ABC$ di lato $\ell$ è inscritto un altro triangolo equilatero $A'B'C'$ la cui area è la metà di quella di $ABC$. Calcola la lunghezza del lato di $A'B'C'$. $\left[\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right]$