Approfondimento

I fasci di parabole

Come l'equazione di un fascio di rette è la combinazione lineare di due particolari rette, le sue *generatrici*, anche un fascio di parabole è la combinazione lineare di due particolari di esse.
Consideriamo per esempio le parabole:

$$y = x^2 + 2x - 2 \qquad \text{e} \qquad y = -3x^2 - 2x + 6$$

Per costruire il fascio che le ha come generatrici

- scriviamo le due equazioni in forma implicita: $y - x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad y + 3x^2 + 2x - 6 = 0$
- costruiamo una loro combinazione lineare: $y - x^2 - 2x + 2 + k(y + 3x^2 + 2x - 6) = 0$
- riorganizziamo i termini: $(1 + k)y = (1 - 3k)x^2 + 2(1 - k)x + (6k - 2)$

Per $k \neq -1$, l'equazione ottenuta si può scrivere nella forma canonica:

$$y = \frac{1 - 3k}{1 + k}x^2 + \frac{2(1 - k)}{1 + k}x + \frac{6k - 2}{1 + k}$$

Essa rappresenta quindi un fascio di parabole che ha come *generatrici* quelle di equazioni $y = x^2 + 2x - 2$ e $y = -3x^2 - 2x + 6$.
Come nel caso del fascio di rette, la prima parabola si ottiene dall'equazione del fascio per $k = 0$, la seconda non si ottiene per alcun valore finito di k e si dice che è quella che corrisponde a $k \to \infty$.
Tutte le altre parabole del fascio si ottengono attribuendo al parametro k particolari valori; per esempio:

- per $k = 0$: $\qquad y = x^2 + 2x - 2$
- per $k = 1$: $\qquad y = -x^2 + 2$

e così via.

Osserviamo che per $k = \frac{1}{3}$ non abbiamo più l'equazione di una parabola, bensì quella di una retta:

- per $k = \frac{1}{3}$: $\qquad y = \dfrac{1 - 3 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}x^2 + \dfrac{2\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{1 + \frac{1}{3}}x + \dfrac{6 \cdot \frac{1}{3} - 2}{1 + \frac{1}{3}} \quad \to \quad y = x$

Inoltre, se consideriamo l'equazione del fascio nella sua forma implicita e poniamo in esso $k = -1$, otteniamo:

$$-4x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \to \quad x^2 + x - 2 = 0$$

cioè scomponendo: $(x + 2)(x - 1) = 0$

Per questo valore di k non abbiamo quindi più una parabola, ma le due rette di equazione

$$x = -2 \qquad \text{e} \qquad x = 1$$

Si dice che la parabola *degenera* in queste due rette parallele all'asse y.

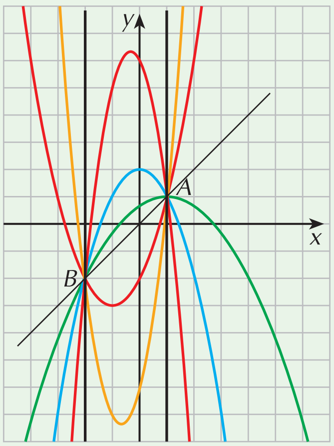
Le parabole di un fascio possono avere dei punti in comune che prendono il nome di **punti base** del fascio. Se esistono, essi si determinano intersecando due qualsiasi parabole del fascio, le generatrici oppure due altre parabole qualsiasi.

Nel caso del precedente esempio, se intersechiamo le due generatrici otteniamo:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -3x^2 - 2x + 6 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad A(1,\ 1) \quad B(-2,\ -2)$$

Il fascio di parabole considerato ha dunque due punti base; tutte le altre parabole del fascio passano per gli stessi punti, compresa la retta $y = x$ e le due rette della parabola degenere (in ***figura 1*** le due generatrici sono in rosso).

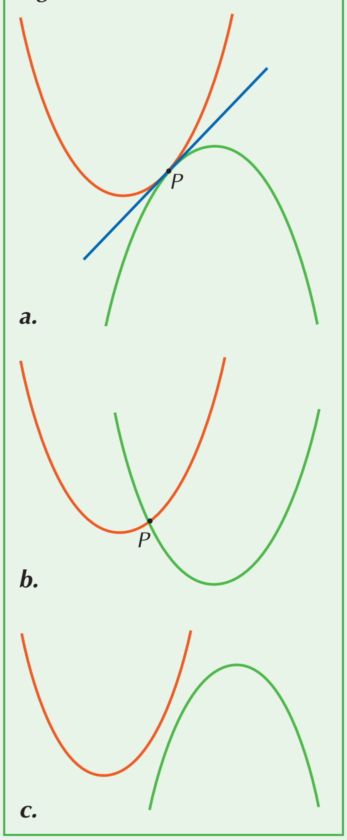
Figura 1



In generale, un fascio di parabole può avere:

- due punti base distinti come nel caso precedente
- due punti base coincidenti in un punto P, come nel caso delle ***figura 2a*** in cui le parabole sono tangenti, cioè hanno la stessa retta tangente in P
- un solo punto base, come nel caso della ***figura 2b*** in cui le parabole si intersecano in un solo punto
- nessun punto base, come nel caso della ***figura 2c*** in cui le parabole non si intersecano.

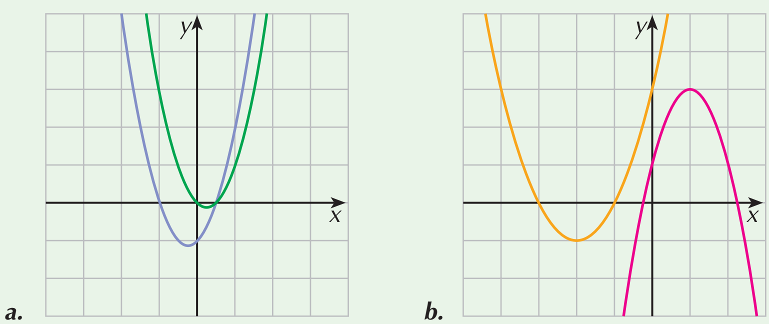
Figura 2



Per esempio, il fascio generato dalle due parabole:

- $p_1 : y = 2x^2 + x - 1$ e $p_2 : y = 2x^2 - x$ ha un solo punto base perché p_1 e p_2 si intersecano solo in $A\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ (***figura 3a***)
- $p_1 : y = -2x^2 + 4x + 1$ e $p_2 : y = x^2 + 4x + 3$ non ha punti base perché le due parabole non si intersecano (***figura 3b***).

Figura 3



In modo analogo si ottiene l'equazione di un **fascio di parabole il cui asse è parallelo all'asse *x***. Per esempio, il fascio generato dalle parabole

$$p_1 : x = y^2 - y \qquad \text{e} \qquad p_2 : x = \frac{1}{2}y^2 + y - 2$$

ha equazione $\quad x - y^2 + y + k\left(x - \frac{1}{2}y^2 - y + 2\right) = 0$

cioè $\quad 2x(k+1) - (k+2)y^2 - 2y(k-1) + 4k = 0$

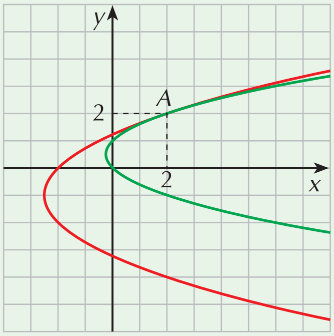
che, per $k \neq -1$, si può riscrivere nella forma

$$x = \frac{k+2}{2(k+1)}y^2 + \frac{k-1}{k+1}y - \frac{2k}{k+1}$$

Per determinare i punti base del fascio intersechiamo le due generatrici:

$$\begin{cases} x = y^2 - y \\ x = \dfrac{1}{2}y^2 + y - 2 \end{cases}$$

Figura 4



Le due parabole si intersecano in $A(2, 2)$ e sono tangenti.
Il fascio ha quindi due punti base coincidenti (***figura 4***).
La parabola degenere si ottiene ponendo $k = -1$ nell'equazione del fascio:

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (y-2)^2 = 0$$

che corrisponde alla retta $y = 2$ contata due volte (parabola degenere in due rette coincidenti).
Per $k = -2$ si ottiene l'equazione $x = 3y - 4$ che rappresenta la retta passante per A e tangente a tutte le parabole del fascio.

Primo esempio

Date le parabole di equazioni $y = x^2 + 4x - 1$ e $y = -x^2 + 5$, scriviamo l'equazione del fascio da esse generato e stabiliamone il tipo. Determiniamo poi l'equazione della parabola del fascio che passa per l'origine degli assi.

L'equazione del fascio che ha per generatrici le parabole date è una combinazione lineare delle loro equazioni (ricorda che devi prima scriverle in forma implicita):

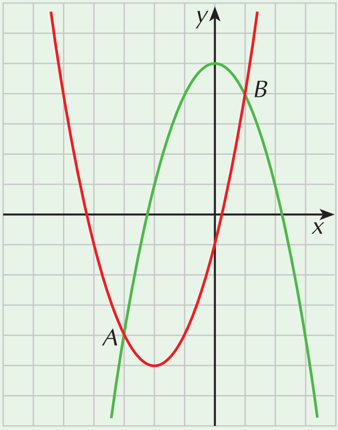
$$y - x^2 - 4x + 1 + k(y + x^2 - 5) = 0 \quad \text{cioè} \quad (1+k)y - (1-k)x^2 - 4x + 1 - 5k = 0$$

Per determinare il tipo del fascio intersechiamo le parabole generatrici

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 1 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$$

che risolto dà le soluzioni $\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

Figura 5



Tutte le parabole del fascio passano per i punti base di coordinate $A(-3, -4)$ e $B(1, 4)$ (***figura 5***).
Per determinare la parabola del fascio che passa per l'origine dobbiamo imporre che sia nullo il termine noto della sua equazione:

$1 - 5k = 0 \quad$ da cui $\quad k = \dfrac{1}{5}$

La parabola richiesta ha dunque equazione $y = \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{10}{3}x$.

Secondo esempio

Data l'equazione $y = (k+2)x^2 - 2kx + 1 + 3k$ che rappresenta un fascio di parabole, vogliamo determinarne il tipo e successivamente scrivere l'equazione della parabola il cui vertice appartiene alla retta $x = 3$.

Per determinarne il tipo, dobbiamo stabilire se ci sono dei punti base; possiamo allora intersecare due qualsiasi parabole del fascio, siano esse le generatrici o due qualsiasi altre, oppure una qualsiasi parabola con la retta la cui equazione appartiene al fascio (si ottiene per $k = -2$). Seguiremo questa seconda possibilità che risulta più semplice nei calcoli.

- Per $\quad k = -2 \quad$ otteniamo $\quad y = 4x - 5 \quad$ (retta del fascio)
- Per $\quad k = 0 \quad$ otteniamo $\quad y = 2x^2 + 1 \quad$ (parabola generatrice del fascio)

Il sistema delle due equazioni non ha soluzioni reali. Il fascio non ha dunque punti base.
Fra tutte le parabole del fascio, quella il cui vertice appartiene alla retta data ha l'ascissa del vertice uguale a 3. Quindi, essendo

$$-\frac{b}{2a}=\frac{2k}{2(k+2)} \qquad \text{basta porre} \qquad \frac{2k}{2(k+2)}=3$$

Risolvendo tale equazione otteniamo $k=-3$.
Sostituendo il valore trovato al posto di k nell'equazione del fascio, si ha l'equazione della parabola richiesta: $y=-x^2+6x-8$.

Terzo esempio

Dato il fascio di parabole di equazione $(k+1)x+(1-k)y^2-8ky-19k-3=0$

a. troviamo le due generatrici e individuiamo le caratteristiche del fascio

b. determiniamo per quale valore di k si ottiene la parabola che ha vertice sulla retta $r: y=2x$ e troviamo poi l'equazione della parabola corrispondente.

a. Per trovare le due generatrici riscriviamo l'equazione del fascio raccogliendo k:

$$x+y^2-3+k(x-y^2-8y-19)=0$$

Le due generatrici hanno quindi equazione: $x=-y^2+3$ e $x=y^2+8y+19$

e sono parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse x.

Troviamo i punti base, se esistono, intersecando le due generatrici:

$$\begin{cases} x=-y^2+3 \\ x=y^2+8y+19 \end{cases}$$ il sistema non ha soluzioni reali, quindi il fascio non ha punti base.

In alternativa si possono attribuire due valori a k e risolvere il sistema formato dalle equazioni ottenute; i valori più "comodi" da sostituire sono $k=1$ e $k=-1$:

$$\begin{cases} 2x-8y-22=0 \\ 2y^2+8y+16=0 \end{cases}$$ anche in questo caso il sistema non ha evidentemente soluzioni.

b. Riscriviamo l'equazione del fascio in forma esplicita: $x=\frac{k-1}{k+1}y^2+\frac{8k}{k+1}y+\frac{19k+3}{k+1}$

Il vertice di questa parabola ha coordinate: $y_V=-\frac{4k}{k-1}$ $\quad x_V=\frac{3k^2-16k-3}{k^2-1}$

ed appartiene alla retta $y=2x$ se: $-\frac{4k}{k-1}=2\cdot\frac{3k^2-16k-3}{k^2-1}$

Risolvendo l'equazione si ottiene: $k=3 \lor k=-\frac{1}{5}$. Il problema ha quindi due soluzioni rappresentate dalle parabole $p_1: x=\frac{1}{2}y^2+6y+15$ e $p_2: x=-\frac{3}{2}y^2-2y-1$.

1 Di un fascio di parabole si sa che due di esse non hanno punti di intersezione; si può dire che:

a. il fascio non ha punti base V F

b. nessuna parabola del fascio può incontrare un'altra parabola del fascio V F

c. tutte le parabole hanno lo stesso asse di simmetria V F

d. le due generatrici non si intersecano. V F

2 ## ESERCIZIO GUIDATO

Dato il fascio di parabole di equazione $y = kx^2 + (2k - 3)x + 1$ determina:

a. le coordinate dei punti base

b. la parabola del fascio passante per $P(1, 4)$

c. la parabola del fascio avente asse di equazione $x = -4$

d. la parabola del fascio tangente alla retta di equazione $y = -3x$.

a. I punti base del fascio si possono determinare intersecando due qualsiasi parabole che gli appartengono; per ottenere le loro equazioni puoi attribuire a k due particolari valori. Ad esempio:

- per $k = 1$ ottieni la parabola di equazione $y = x^2 - x + 1$
- per $k = 2$ ottieni la parabola di equazione $y = 2x^2 + x + 1$

Basta adesso risolvere il sistema delle due equazioni.

b. Sostituendo le coordinate di P nell'equazione del fascio ottieni

$4 =$ .... da cui ricavi $k =$ ....

La parabola cercata ha dunque equazione $y =$ ....

c. Per $k \neq 0$, l'asse della generica parabola del fascio ha equazione $x = \dfrac{3 - 2k}{2k}$ (ricorda la formula $x = -\dfrac{b}{2a}$). Nel nostro caso deve essere $\dfrac{3 - 2k}{2k} =$ ....

d. Considera il sistema formato dall'equazione del fascio e da quella della retta e imponi la condizione di tangenza.

[**a.** $(0, 1), (-2, 7)$; **b.** $y = 2x^2 + x + 1$; **c.** $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 1$; **d.** $y = x^2 - x + 1$]

3 Del fascio di parabole rappresentato dall'equazione $y - 2x^2 + 3x + k(y - x^2 + x) = 0$ puoi dire che:

a. le due generatrici sono le parabole di equazioni $y = 2x^2 - 3x$ e $y = x^2 - x$ V F

b. il fascio ha almeno un punto base V F

c. il fascio non ha punti base V F

d. la parabola degenere si spezza nelle due rette parallele $x = 0$ e $x = 2$ V F

e. tutte le parabole del fascio passano per l'origine. V F

4 Dato il fascio di parabole di equazione $y = (k + 2)x^2 + 4kx + 3(k - 1)$ determinane le caratteristiche; successivamente individua:

a. quella passante per $P(1, -2)$ $\left[y = \dfrac{15}{8}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{27}{8}\right]$

b. quella il cui vertice ha ascissa 0 $[y = 2x^2 - 3]$

c. quella tangente alla retta di equazione $y = -5x$ $\left[y = -\dfrac{3}{2}x^2 - 14x - \dfrac{27}{2}\right]$

d. quella che ha il vertice che appartiene alla retta $y + 1 = 0$. $[y = 4x^2 + 8x + 3]$

5 Dato il fascio di parabole di equazione $y = (k+1)x^2 - 3kx - 4$, determina:

a. le coordinate dei punti base [$A(0, -4)$; $B(3, 5)$]

b. la parabola del fascio avente fuoco di ascissa 3 [$y = -x^2 + 6x - 4$]

c. la parabola del fascio passante per $P(-1, 1)$ [$y = 2x^2 - 3x - 4$]

d. le parabole del fascio tangenti alla retta di equazione $y = 2x - 5$. $\left[y = x^2 - 4;\ y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 4\right]$

6 Dato il fascio di parabole di equazione $y = (k-1)x^2 + (k+2)x + 3k$, determina:

a. le coordinate dei punti base [non ci sono punti base]

b. la parabola del fascio con asse coincidente con l'asse y [$y = -3x^2 - 6$]

c. la parabola del fascio passante per l'origine [$y = -x^2 + 2x$]

d. la parabola del fascio passante per $P(-1, 3)$ [$y = x^2 + 4x + 6$]

e. le parabole del fascio aventi direttrice di equazione $y = \frac{7}{4}$. $\left[y = x^2 + 4x + 6;\ y = -\frac{10}{11}x^2 + \frac{23}{11}x + \frac{3}{11}\right]$

7 Dato il fascio di parabole di equazione $y = (k-1)x^2 + 2kx + k - 3$, determina:

a. le coordinate dei punti base e le caratteristiche del fascio [$A(-1, -4)$; fascio di parabole tangenti in A alla retta di equazione $y = 2x - 2$]

b. la parabola del fascio passante per $P(0, -3)$ [$y = -x^2 - 3$]

c. la parabola del fascio tangente all'asse x $\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}\right]$

d. la parabola del fascio avente vertice sulla retta di equazione $3x - 2y + 6 = 0$. $\left[y = \frac{1}{11}x^2 + \frac{24}{11}x - \frac{21}{11}\right]$

8 Dato il fascio di parabole di equazione $y - x^2 + 2x + 3 + k(2y + x^2 - 2x - 3) = 0$, determina:

a. le coordinate dei punti base e le parabole generatrici [$A(-1, 0)$; $B(3, 0)$]

b. la parabola del fascio passante per $P(2, 6)$ [$y = -2x^2 + 4x + 6$]

c. la parabola del fascio avente il vertice sulla retta di equazione $x + y - 2 = 0$ $\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right]$

d. la parabola del fascio tangente alla retta di equazione $y = -1$. $\left[y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right]$

9 Dato il fascio di parabole di equazione $y = 4kx^2 - 4kx + k + 1$, determina:

a. i punti base e le caratteristiche del fascio $\left[\text{un solo punto base } V\left(\frac{1}{2}, 1\right)\text{; tutte le parabole sono tangenti in } V \text{ alla retta } y = 1 \text{ e hanno asse } x = \frac{1}{2}\right]$

b. la parabola del fascio passante per $P(3, 0)$ $\left[y = -\frac{4}{25}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{24}{25}\right]$

c. la parabola del fascio tangente alla retta di equazione $y = 2x + 1$ $\left[y = -x^2 + x + \frac{3}{4}\right]$

d. la parabola del fascio con fuoco in $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. $\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{15}{16}\right]$

10 Dato il fascio di parabole di equazione $x = (k+2)y^2 - 4(k+1)y + 3k$, determina:

a. i punti base [punti base $A(-2, 1)$ e $B(6, 3)$]

b. la parabola del fascio passante per $P(-1, 2)$ $[x = 3y^2 - 8y + 3]$

c. la parabola del fascio con vertice sulla retta di equazione $x - 3y + 5 = 0$

$[x = -y^2 + 8y - 9;\ x = 2y^2 - 4y]$

d. la parabola del fascio tangente alla retta di equazione $y = x + 5$.

$\left[x = \frac{9}{2}y^2 - 14y + \frac{15}{2};\ x = \frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{9}{2}\right]$