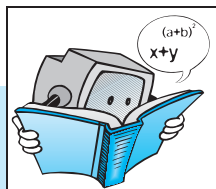


# LE FRAZIONI ALGEBRICHE



## Per ricordare

- ★ Una **frazione algebrica** è una frazione che ha al numeratore e al denominatore dei polinomi; essa ha quindi significato per tutti i valori reali delle lettere che in essa compaiono ad eccezione di quelli che annullano il denominatore:

$$\frac{3x - y}{2x + 1} \quad \text{ha significato per ogni } y \text{ reale e per ogni } x \neq -\frac{1}{2}$$

Per essa valgono tutte le proprietà caratteristiche delle frazioni; in particolare la **proprietà invariante** che afferma che due frazioni algebriche sono equivalenti se si moltiplicano o si dividono il numeratore e il denominatore della frazione per uno stesso polinomio non nullo.

Grazie a questa proprietà:

- una frazione può essere semplificata:  $\frac{3x - 3}{x^2 - 1} = \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x+1}$
- due frazioni si possono ricondurre ad avere lo stesso denominatore, che è il *m.c.m.* fra i polinomi al denominatore:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 1} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)} & \frac{x+3}{x^2 - x - 2} &= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} \\ \text{diventano} & \frac{x(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} & & \frac{(x+3)(x-1)}{(x-2)(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

- ★ Per operare con le frazioni algebriche si devono tenere presenti le stesse regole per le analoghe operazioni con le frazioni numeriche; in particolare:

- per eseguire l'addizione e la sottrazione si devono prima ricondurre le frazioni ad avere lo stesso denominatore e poi si esegue la somma o la differenza fra i numeratori:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 - 4} + \frac{x-1}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{2x}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-1}{(x+2)(x+1)} = \frac{2x(x+1) + (x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \\ &= \frac{3x^2 - x + 2}{(x-2)(x+2)(x+1)} \end{aligned}$$

- per eseguire il prodotto si moltiplicano i numeratori e i denominatori fra loro semplificando le due frazioni con le stesse regole che si usano per il calcolo frazionario:

$$\frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{3x} = \frac{x(x+1)}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{3x} = \frac{(x+1)(x-2)}{3(x-1)} = \frac{x^2 - x - 2}{3(x-1)}$$

- per eseguire la divisione si moltiplica la prima frazione per la reciproca della seconda:

$$\frac{y^2 - 2y}{2y + 1} : \frac{ay^2 - 2ay}{2y^2 - y - 1} = \frac{y(y-2)}{2y+1} \cdot \frac{(2y+1)(y-1)}{ay(y-2)} = \frac{y-1}{a}$$

- per calcolare la potenza di una frazione si elevano a quella potenza il polinomio al numeratore e quello al denominatore:

$$\left[ \frac{3a-b}{(a+b)^2} \right]^3 = \frac{(3a-b)^3}{(a+b)^6}$$

## ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

Stabilisci per quali valori delle lettere le seguenti frazioni algebriche hanno significato:

### 1 ESERCIZIO GUIDATO

a.  $\frac{x-y}{x}$       b.  $\frac{2x+1}{x^2-1}$

a. la frazione ha significato per qualsiasi valore di  $y$  e per ogni  $x \neq 0$

b. scomponendo il polinomio al denominatore otteniamo la frazione  $\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}$  che ha significato se  $x-1 \neq 0$ , cioè se  $x \neq 1$ , e se  $x+1 \neq 0$ , cioè se  $x \neq -1$ ; in definitiva l'insieme di esistenza della frazione è  $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ .

2 a.  $\frac{3a+b}{b}$       b.  $\frac{a+b^2}{7a^2}$

[a.  $b \neq 0$ ; b.  $a \neq 0$ ]

3 a.  $\frac{a-b}{a-3}$       b.  $\frac{b+5}{b-7}$

[a.  $a \neq 3$ ; b.  $b \neq 7$ ]

4 a.  $\frac{x^2}{3x+3}$       b.  $\frac{2x+4}{x(x-1)}$

[a.  $x \neq -1$ ; b.  $x \neq 0 \wedge x \neq 1$ ]

5 a.  $\frac{a}{a+1}$       b.  $\frac{a-2}{a^2+4}$

[a.  $a \neq -1$ ; b.  $\forall a \in \mathbb{R}$ ]

Semplifica le seguenti frazioni.

### 6 ESERCIZIO SVOLTO

$$\frac{4x^5y^2}{3x^3y^5}$$

Per semplificare questa frazione, che è il rapporto fra due monomi interi, basta applicare le proprietà delle potenze:

$$\frac{4x^5y^2}{3x^3y^5} = \frac{4x^2}{3y^3}$$

$$7 \quad \frac{10a^5b^4c^2}{2a^3b^2} \quad \frac{3xy}{9x^4y^2} \quad \frac{-5x^3y^5t^2}{4x^4y^3t} \quad \left[ 5a^2b^2c^2; \frac{1}{3x^3y}; -\frac{5y^2t}{4x} \right]$$

$$8 \quad \frac{x^2y^4z^5}{-2xz^2} \quad \frac{4x^3}{6x^2y} \quad \frac{-4x^3y^2z}{6x^4y^3} \quad \left[ -\frac{1}{2}xy^4z^3; \frac{2x}{3y}; -\frac{2z}{3xy} \right]$$

### 9 ESERCIZIO SVOLTO

$$\frac{3x+15}{x^2-25}$$

Scomponiamo in fattori i polinomi al numeratore e al denominatore

$$\frac{3x+15}{x^2-25} = \frac{3(x+5)}{(x+5)(x-5)}$$

Semplifichiamo la frazione applicando la proprietà invariantiva:

$$\frac{\cancel{3(x+5)}}{(\cancel{x+5})(x-5)} = \frac{3}{x-5}$$

$$10 \quad \frac{ax^2+axy-x-y}{ax^2-x} \quad \frac{a+b-bx-ax}{a(1-x)-b(1-x)} \quad \left[ \frac{x+y}{x}; \frac{a+b}{a-b} \right]$$

$$11 \quad \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} \quad \frac{ax^5+ax^3+2ax^2}{a^2x^3+a^2x^2} \quad \left[ \frac{x+2}{x-2}; \frac{x^2-x+2}{a} \right]$$

$$12 \quad \frac{xy-ax+x+a(y-a+1)}{x^3-2x+ax^2-2a} \quad \frac{10xyz-5x^3y}{6z^2-3zx^2} \quad \left[ \frac{y-a+1}{x^2-2}; \frac{5xy}{3z} \right]$$

$$13 \quad \frac{2x(x^2y-y^2)}{4xy^2-xy^3} \quad \frac{x^4y-xy^2}{ax^3-ay} \quad \left[ \frac{2y-2x^2}{y^2-4y}; \frac{xy}{a} \right]$$

$$14 \quad \frac{2xyz}{2xy-4x^2z^2} \quad \frac{b^2-2b^2x+b^2x^2}{abx^2-ab} \quad \left[ \frac{zy}{y-2xz^2}; \frac{bx-b}{a+ax} \right]$$

$$15 \quad \frac{4x^2-8xy+4y^2}{3x^2y-3xy^2} \quad \frac{x(3x+1)+3xy-6x+y-2}{6x^2+5x+1} \quad \left[ \frac{4(x-y)}{3xy}; \frac{x+y-2}{2x+1} \right]$$

$$16 \quad \frac{ax(a+c)-b(a+c)}{ax-b+a^2x-ab} \quad \frac{2x^4-18}{(x-1)(2x-3)-(x-2)(x-3)} \quad \left[ \frac{a+c}{a+1}; 2x^2+6 \right]$$

$$17 \quad \frac{x^4-8x^2+16}{16x+4x^2+16} \quad \frac{a(x+a)-bx-ab}{x(a-b)+y(a-b)} \quad \left[ \frac{(x-2)^2}{4}; \frac{x+a}{x+y} \right]$$

$$18 \quad \frac{3x^2+6xz}{2x+4z-ax-2az} \quad \frac{x^2+2xz-x+z^2-z}{x^2z^2+xz^3} \quad \left[ \frac{3x}{2-a}; \frac{x+z-1}{xz^2} \right]$$

$$19 \quad \frac{abc+a^2-ab^3c-a^2b^2}{a-ab^2} \quad \frac{4x^3+4x^2-7x+2}{2x^3+5x^2+x-2} \quad \left[ a+bc; \frac{2x-1}{x+1} \right]$$

$$20 \quad \frac{x^{2n}+x^n-2}{x^{2n}+3x^n+2} \quad \frac{ax^{2n}-a}{a^2x^n-a^2} \quad \left[ \frac{x^n-1}{x^n+1}; \frac{x^n+1}{a} \right]$$

$$21 \quad \frac{3x^{3n}-3y^{3m}}{9(x^{2n}+x^ny^m+y^{2m})} \quad \frac{a^2x^{2n}+a^2x^n-6a^2}{ax^{2n}-ax^n-2a} \quad \left[ \frac{x^n-y^m}{3}; \frac{a(x^n+3)}{x^n+1} \right]$$

Riduci allo stesso denominatore i seguenti gruppi di frazioni.

22

**ESERCIZIO SVOLTO**

$$\frac{2x}{3x^2 - 3y^2} \quad \frac{x+y}{x-y} \quad \frac{3y}{x^2 - xy}$$

Scomponiamo i denominatori delle tre frazioni:

$$\frac{2x}{3(x-y)(x+y)} \quad \frac{x+y}{x-y} \quad \frac{3y}{x(x-y)}$$

Nessuna delle frazioni può essere semplificata; calcoliamo dunque il *m.c.m.* fra i denominatori:  $3x(x-y)(x+y)$

Le frazioni date sono dunque equivalenti a:

$$\frac{2x^2}{3x(x-y)(x+y)} \quad \frac{3x(x+y)^2}{3x(x-y)(x+y)} \quad \frac{9y(x+y)}{3x(x-y)(x+y)}$$

23

$$\frac{2}{x^2} \quad -\frac{5}{3y^3} \quad \frac{3}{6xy^2} \quad \left[ \frac{12y^3}{6x^2y^3}; -\frac{10x^2}{6x^2y^3}; \frac{3xy}{6x^2y^3} \right]$$

24

$$\frac{2a-2b}{6(a+b)} \quad \frac{3a}{9a^2+9b^2+18ab} \quad \frac{5b}{10a+10b} \quad \left[ \frac{2(a^2-b^2)}{6(a+b)^2}; \frac{2a}{6(a+b)^2}; \frac{3b(a+b)}{6(a+b)^2} \right]$$

(Suggerimento: semplifica prima le frazioni quando è possibile)

25

$$\frac{3-2x}{-2x^2+5x-3} \quad \frac{5x-10}{x^2-x-2} \quad \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} \quad \left[ \frac{x+1}{x^2-1}; \frac{5(x-1)}{x^2-1}; \frac{(x-2)(x-1)}{x^2-1} \right]$$

26

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-ab+3a-3b} \quad \frac{3a}{a-2} \quad \frac{2a+4}{3a^2-12} \quad \left[ \frac{3(a-2)(a+b)}{3(a-2)(a+3)}; \frac{9a(a+3)}{3(a-2)(a+3)}; \frac{2(a+3)}{3(a-2)(a+3)} \right]$$

Esegui le addizioni e le sottrazioni fra le seguenti frazioni algebriche

27

**ESERCIZIO SVOLTO**

$$\frac{10}{x-2} + \frac{x+2}{x} + \frac{2}{3x^2-x}$$

Scomponiamo il denominatore della terza frazione:  $\frac{10}{x-2} + \frac{x+2}{x} + \frac{2}{x(3x-1)}$

Il *m.c.m.* fra i denominatori è  $x(x-2)(3x-1)$

La somma è quindi:  $\frac{10x(3x-1) + (x+2)(x-2)(3x-1) + 2(x-2)}{x(x-2)(3x-1)}$

Sviluppando i calcoli al numeratore otteniamo:  $\frac{3x^3 + 29x^2 - 20x}{x(x-2)(3x-1)}$

Scomponiamo adesso il numeratore e semplifichiamo la frazione:

$$\frac{x(3x^2 + 29x - 20)}{x(x-2)(3x-1)} = \frac{3x^2 + 29x - 20}{3x^2 - 7x + 2}$$

$$28 \quad \frac{1}{b-3} + \frac{3}{4b-12} \quad \left[ \frac{7}{4(b-3)} \right]$$

$$29 \quad \frac{3}{5x+5} - \frac{x+1}{10x+10} \quad \left[ \frac{5-x}{10(x+1)} \right]$$

$$30 \quad \frac{3}{x-2} - \frac{5}{2-x} \quad \left[ \frac{8}{x-2} \right]$$

$$31 \quad \frac{1}{y^2} - \frac{y-1}{y} + \frac{y}{y-2} \quad \left[ \frac{3y^2 - y - 2}{y^2(y-2)} \right]$$

$$32 \quad \frac{x}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{x-2} \quad [1]$$

$$33 \quad -\frac{10}{x-2} + \frac{x+2}{x} + \frac{2}{3x^2-x} \quad \left[ \frac{(3x-31)x}{(3x-1)(x-2)} \right]$$

$$34 \quad \frac{x}{x+y} - \frac{x-1}{x+2y} - \frac{xy}{x^2+3xy+2y^2} \quad \left[ \frac{1}{x+2y} \right]$$

$$35 \quad \frac{x-1}{ax-y} + \frac{3-x}{xy} - \frac{x^2y-3y}{ax^2y-xy^2} \quad \left[ \frac{a(x-3)}{y(y-ax)} \right]$$

$$36 \quad \frac{1-a^3}{a^2-2a+1} - \frac{a^2-1}{a^3-3a^2+3a-1} + \frac{a^2}{a-1} \quad \left[ \frac{a(a+1)}{(a-1)^2} \right]$$

(Suggerimento: semplifica prima la seconda frazione)

$$37 \quad \frac{y+z}{(x-y)(x-z)} + \frac{x+z}{(x-y)(y-z)} - \frac{x+y}{(x-z)(y-z)} \quad \left[ \frac{2(y+z)}{(x-y)(x-z)} \right]$$

$$38 \quad \frac{a^2-1}{a+b} + \frac{a-1}{a^2-2ab-3b^2} - \left[ \frac{a+1}{a^2-9b^2} + \frac{2ab-2a-4b}{(a^2-9b^2)(a+b)} \right] \quad \left[ \frac{a^2-1}{a+b} \right]$$

$$39 \quad \frac{a^2}{a-b} + \frac{b+2}{a+b+1} - \left[ \frac{2a-3b-2b^2}{a(a+1)-b(b+1)} + \frac{b}{a-b} \right] \quad \left[ \frac{a^2}{a-b} \right]$$

$$40 \quad \frac{x}{x+1} + \frac{1}{3x-2} - \left( 1 + \frac{3}{3x^2+x-2} \right) \quad \left[ \frac{-2x}{(x+1)(3x-2)} \right]$$

$$41 \quad \frac{a(x+2y)}{x^2+2yx+y^2} - \left( \frac{ax^2+3ay^2+4axy}{(x+y)^3} - \frac{a^2}{ax+ay} \right) + \frac{ay}{(x+y)^2} \quad \left[ \frac{a}{x+y} \right]$$

$$42 \quad \frac{x^2-4a^2}{x^2+4ax+4a^2} - \left[ \frac{ax+a^2-1}{a(x+a)} - \left( \frac{4a^2-1}{ax+2a^2} - \frac{1}{x^2+3ax+2a^2} \right) \right] \quad [0]$$

$$43 \quad \frac{x}{x+2} - \left[ \frac{a+2}{x^2+2x-ax-2a} - \left( \frac{1}{x-a} - 2 \right) \right] \quad \left[ -\frac{x+3}{x+2} \right]$$

$$44 \quad \frac{ax^2}{x^2+2yx+y^2} + \frac{1+axy^2}{(x+y)^3} - \left( \frac{ax}{x+y} - \frac{axy}{x^2+2xy+y^2} \right) \quad \left[ \frac{1+axy^2}{(x+y)^3} \right]$$

$$45 \quad \frac{2x-1}{ax-1} + \left[ \frac{x}{ax-2} - \left( \frac{2-2x-ax}{a^2x^2-3ax+2} + \frac{2x^2}{ax^2-2x} \right) \right] \quad \left[ \frac{x}{ax-2} \right]$$

$$46 \quad \frac{x}{x^2 + 2xy + y^2} - \left[ \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^3} - \left( \frac{y}{xy + y^2} - \frac{2y}{x^2 + 2xy + y^2} \right) \right] \quad \left[ \frac{x}{(x+y)^2} \right]$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni fra frazioni algebriche e calcola il valore delle espressioni

### 47 ESERCIZIO SVOLTO

$$\frac{x^2 + x - 2}{3x + 9} \cdot \frac{2x + 6}{4x - 4}$$

Scomponiamo i polinomi delle due frazioni:  $\frac{(x+2)(x-1)}{3(x+3)} \cdot \frac{2(x+3)}{4(x-1)}$

Semplifichiamo:  $\frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{3\cancel{(x+3)}} \cdot \frac{2\cancel{(x+3)}}{4\cancel{(x-1)}}$

Moltiplichiamo i numeratori e i denominatori rimasti:  $\frac{x+2}{6}$

$$48 \quad \frac{24a^2b^3c}{xy^2} \cdot \frac{5x^2y^2}{6abc^3} \quad \frac{3xy^2}{4ab^3} \cdot \frac{8axb^2}{5x^4} \cdot \frac{20x^3y}{3xy} \quad \left[ \frac{20ab^2x}{c^2}; \frac{8y^2}{b} \right]$$

$$49 \quad -\frac{32a^5b^5}{13x^4} \cdot \frac{26x^3}{ab^4} \cdot \left( -\frac{xy}{64a^5b} \right) \quad \frac{x^3yz^3}{3xy} \cdot \frac{16x^2y^2}{9ac^2} \cdot \left( -\frac{27axc^2}{2x^4y} \right) \quad \left[ \frac{y}{a}; -8xyz^3 \right]$$

$$50 \quad \frac{14b^3c^3}{4ax^2y^2} \cdot \frac{6x^2y^2z}{7a^2bc^3} \cdot \frac{20a^3b}{3z} \quad \frac{5a^5b^5}{6xy} \cdot \left( -\frac{34x^3}{25b^4y} \right) \cdot \left( -\frac{xy^2z}{17a^5b} \right) \quad \left[ 20b^3; \frac{1}{15}x^3z \right]$$

$$51 \quad \frac{a^4 - 9}{2abc^3} \cdot \frac{a^2c^2 + 3c^2}{a^3 - 3a} \cdot \frac{2a^2}{(a^2 + 3)^2} \quad \left[ \frac{1}{bc} \right]$$

$$52 \quad \frac{18b^3c^3}{4ax^2y^2} \cdot \frac{2by^2z}{b^3a^4 - b^3a^2} \cdot \left( -\frac{a^4x^2 + a^3x^2}{3c^3z} \right) \quad \left[ \frac{3b}{1-a} \right]$$

$$53 \quad \frac{4a^2 - 2a}{b^2} \cdot \left[ -\frac{ab - 2a^2b}{(2a - 1)^2} \right] \cdot \left( -\frac{3b}{4a} \right) \quad \left[ -\frac{3}{2}a \right]$$

$$54 \quad \frac{1 - x^2}{ax^2} \cdot \frac{3a^3}{x+1} \cdot \left( -\frac{4xy}{x-1} \right) \quad \left[ \frac{12a^2y}{x} \right]$$

$$55 \quad \frac{2x^3y}{12b - 3a} \cdot \frac{a^2 - 3ab - 4b^2}{y^3} \cdot \left( -\frac{6y^2}{4ab^2 + 4b^3} \right) \quad \left[ \frac{x^3}{b^2} \right]$$

$$56 \quad \frac{a+1}{9bc^2} \cdot \frac{81a^2c^2}{3a^2 + 15a + 12} \cdot \left( -\frac{4ab + 16b}{12a - 12} \right) \cdot (1 - a) \quad [a^2]$$

$$57 \quad \frac{x+x^3}{3ay^2} \cdot \frac{2x-4}{x^4} \cdot \left( -\frac{\frac{3}{2}x+3}{ax^2+a} \right) \cdot \frac{a^2x}{2-x} \quad \left[ \frac{x+2}{x^2y^2} \right]$$

$$58 \quad \frac{a^2b^2 + 3ab + 2}{ab^3} \cdot \left( -\frac{a^2(ab+2)}{a^2b^2 - 2ab - 3} \right) \cdot \left( -\frac{b^3}{a^3b^2 + 4a^2b + 4a} \right) \quad \left[ \frac{1}{ab-3} \right]$$

$$59 \quad \frac{a^5 - 8a^3b^2 + 16ab^4}{9bx^4} \cdot \left( -\frac{15x^3y}{a^2bc^2 - 4b^3c^2} \right) \cdot \frac{3b^2c^2}{5ay} \cdot \frac{x}{2a+4b} \quad \left[ \frac{2b-a}{2} \right]$$

$$60 \quad \left(\frac{1}{x-2} + 1\right) \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \quad [1]$$

(Suggerimento: esegui prima le operazioni dentro le parentesi tonde e poi moltiplica)

$$61 \quad \frac{3-a}{a^2-2a-3} \left(\frac{a^2-2a}{a-3} + \frac{3}{3-a}\right) \quad [-1]$$

$$62 \quad \frac{1-4x^2}{4x+18} \left(\frac{4}{2x+1} - \frac{5}{2x-1}\right) \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$63 \quad \left(\frac{3a}{a^2-4a+3} + \frac{4}{1-a}\right) \left(\frac{a-6}{12-a} + \frac{1}{3}\right) \quad \left[\frac{2}{3(a-1)}\right]$$

$$64 \quad \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-1}\right) \cdot \left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{a+1}\right) \cdot \left(a-2 + \frac{1}{a}\right) \quad \left[-\frac{4a}{(a+1)^2}\right]$$

$$65 \quad \frac{1}{y-4} \left(\frac{1}{y-4} + \frac{y}{4-y^2}\right) \left(-\frac{2-y}{4} + \frac{5-2y}{y+2}\right) \left(y+4 + \frac{4}{y}\right) \quad \left[\frac{y-1}{y^2-2y}\right]$$

Esegui i calcoli indicati nei seguenti esercizi nei quali compaiono le potenze di frazioni algebriche.

$$66 \quad \left(\frac{2ac}{x^2}\right)^4 \left(\frac{3ab^2}{xy}\right)^{-2} \left(\frac{3x^3b^2}{4c^2y}\right)^2 \quad [a^2]$$

$$67 \quad \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 \left(\frac{x^2-4}{x^2+2x+1}\right) \left(\frac{x+2}{3x}\right)^{-1} \quad \left[\frac{3x}{x-2}\right]$$

$$68 \quad \left(\frac{x^4-18x^2+81}{a^3x+2a^3}\right) \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{-2} \left(\frac{a^3}{x+3}\right)^2 \cdot a^{-2} \quad [a(x+2)]$$

$$69 \quad \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3 \left(\frac{4}{b^2x-b^2}\right)^{-1} \left(\frac{2x-2}{2bx+b}\right)^2 \quad [2x+1]$$

$$70 \quad \left(\frac{3ab}{2xy^2}\right)^2 \cdot \frac{a^2x^4-9a^2x^2}{8a^2b^2y^2} \cdot \left(\frac{4y^3}{3ax+9a}\right)^2 \quad \left[\frac{x-3}{2(x+3)}\right]$$

$$71 \quad \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left[\frac{(x^2+1)^2}{3xy}\right]^{-1} \left(\frac{x^3+x}{y(x^2+1)}\right)^3 \quad \left[\frac{3}{y^2}\right]$$

$$72 \quad \left(\frac{cx^2}{x-2}\right)^4 \left(\frac{c^3}{xy-2y}\right)^{-2} \left(\frac{cx^2-4c}{x^3y+2x^2y}\right)^2 \quad [x^4]$$

$$73 \quad \left(\frac{3ab^2c}{2xy}\right)^2 \left(\frac{12ab^2c^3}{x^8y^2}\right)^{-1} \left(\frac{2c}{ax^2}\right)^3 \quad \left[\frac{3b^2c^2}{2a^2}\right]$$

$$74 \quad \left(\frac{a^2-1}{b^2c}\right)^3 \left(\frac{3a+3}{b^2c}\right)^{-2} \left(\frac{3b^2c}{a^2-2a+1}\right) \quad \left[\frac{1}{3}(a^2-1)\right]$$

$$75 \quad \left(\frac{ax^2-5ax+6a}{b^2}\right)^2 \left(\frac{b^3}{2cx-4c}\right)^3 \left(\frac{b^2x-3b^2}{4c}\right)^{-2} \quad \left[\frac{2a^2b}{c(x-2)}\right]$$

Esegui le seguenti divisioni fra frazioni algebriche e calcola il valore delle espressioni.

76

**ESERCIZIO SVOLTO**

$$\frac{6x^2 + 3x - 9}{x^2 + ax - 2a^2} : \frac{6ax - 6x - 6a + 6x^2}{x^2 + 3ax + 2a^2}$$

Scomponiamo i polinomi che compongono le due frazioni e contemporaneamente trasformiamo la divisione in una moltiplicazione:

$$\frac{\cancel{3}(x-1)(2x+3)}{(x-a)\cancel{(x+2a)}} \cdot \frac{\cancel{(x+2a)}(x+a)}{\cancel{6}(x-1)\cancel{(x+a)}} = \frac{2x+3}{2(x-a)}$$

77

$$\frac{x^2 + 7}{5xy} : \frac{3x^2 + 21}{10y}$$

$$\frac{9x^2 - y^2}{x + 3y} : \frac{y - 3x}{2x + 6y}$$

$$\left[ \frac{2}{3x}; -2(3x + y) \right]$$

78

$$\frac{ab + a^2}{a - 2} : \frac{a + b}{a^2 - 5a + 6}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4 - b^2}{b^2x} : \frac{2x - 4 + 2b}{b^2x}$$

$$\left[ a(a-3); \frac{x(x-b-2)}{2b} \right]$$

79

$$\frac{ab^2 - b^3}{axy} : \frac{abx^2 - abx - b^2x^2 + b^2x}{a^2(x-1)}$$

$$\frac{(x+4)(x-2)^4}{x^2 + 4 - 4x} : \frac{x^2 + 2x - 8}{x + 1}$$

$$\left[ \frac{ab}{x^2y}; (x-2)(x+1) \right]$$

80

$$\frac{(a+bc)^3}{a^2 - a + abc - bc} : \frac{a^2 + b^2c^2 + 2abc}{4a - 4}$$

$$\frac{3a - 3b}{2a^2 + 2b^2} : \left( -\frac{bc - ac}{2b^2c} \right)$$

$$\left[ 4; \frac{3b^2}{a^2 + b^2} \right]$$

81

$$\frac{9a^2 - b^2 - 4a^2b - 4a^4}{a} : \frac{3a^2 - 2ab - b^2 + 2a^3 - 2a^2b}{b - a}$$

$$\left[ \frac{2a^2 - 3a + b}{a} \right]$$

82

$$\left( \frac{ax^2y}{2(ax - xb + a - b)} : \frac{2y}{4x^2 - 4} \right) \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{x^3 - x^2}$$

$$[a^2 - ab]$$

83

$$\frac{4x}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 - 9y^4}{2x + 4y - 6y^2} : \frac{x^2 + 2xy + 3xy^2}{4x + 8}$$

$$\left[ \frac{8}{x-2} \right]$$

84

$$\left( \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x - 15} : \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x - 5} \right) \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x - x^2}$$

$$\left[ \frac{3-x}{x+1} \right]$$

85

$$\left( \frac{a^2b + a^2 + b^3 + b^2 - ab^2 - ab}{b-1} : \frac{ab + b^2 + a + b}{ab + b^2 - a - b} \right) : (a^3 + b^3)$$

$$\left[ \frac{1}{a+b} \right]$$

86

$$\left( \frac{9x^2 - 24x + 16 - 4y^2}{3x^2 - x - 4 - 2yx - 2y} : \frac{6x - 8 + 4y}{x^2 - 1} \right) : \left( \frac{1}{x} - 1 \right)$$

$$\left[ -\frac{1}{2}x \right]$$

87

$$\frac{5a^2 - 1 - 4a^4}{2a^2 + 3a - 2} : \left( \frac{2a^3 + a^2 - 2a - 1}{1 - a} \cdot \frac{a^2 - 1}{a + 2} \right)$$

$$\left[ \frac{1}{a+1} \right]$$

88

$$\left( \frac{3x^2 + 4x + 1}{2x^2 - 2} : \frac{3x^2 + 4x + 1}{x + 1} \right) \cdot \left( \frac{x^2 - 1}{x} : \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2} \right)$$

$$\left[ \frac{x}{2(x-3)} \right]$$

89

$$\frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} : \left( \frac{4x^2 + 3x - 1}{ax^2 + ax} \cdot \frac{a^2}{4x - 1} \right)$$

$$\left[ \frac{x+1}{a} \right]$$



## ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

Semplifica le seguenti espressioni.

$$1 \quad \frac{x^2 - ax + x - a}{6ax - 4a} : \left( \frac{abx^2 - a^2b - a^2bx + abx}{a^2x - a^3} : \frac{12bx - 8b}{x^2 - a^2} \right) \quad \left[ \frac{2}{x+a} \right]$$

$$2 \quad \frac{a^3 + 1}{3a^2 + 3} : \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a + 1} : \left[ \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{6(a^4 - 1)} \cdot (a^3 + 1) \right] \quad \left[ \frac{2}{a+1} \right]$$

$$3 \quad \left[ \left( \frac{9a - 3x}{x^3 - 2x} - 1 + \frac{3a}{x} \right) \cdot \frac{1 - x^2}{x - 3a} - \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2} \right] : \frac{1 - x}{x} \quad \left[ \frac{1}{2 - x^2} \right]$$

$$4 \quad \left[ \left( \frac{2x - 4}{x + 2} - \frac{3x + 6}{x - 2} \right) \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{4} \right) - \frac{x + 20}{4} \right]^2 : \left[ \left( \frac{x - 1}{2x + 1} + \frac{x + 1}{1 - 2x} \right) \cdot \frac{4x^2 - 1}{6x} \right] + \frac{1}{x} \quad \left[ \frac{x - 1}{x^2} \right]$$

$$5 \quad \frac{4x^2 - y^2}{x^2 - xy - 6y^2} \cdot \left( \frac{2x^2 - 4xy - 6y^2}{12x - 6y} : \frac{2x^2 + 3xy + y^2}{x + 2y} \right) + \frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} \cdot \frac{x - 3}{2x^2 - x - 1} \quad \left[ \frac{x + 2}{3(x - 1)} \right]$$

$$6 \quad \left[ \left( \frac{1}{x - 1} + \frac{x}{x^2 - 1} + 1 \right) : \left( 1 + \frac{1}{x + 1} \right) - \left( 1 - \frac{1}{x^2 - 1} \right) \right] \cdot (x - 1) \quad \left[ \frac{x + 2}{x + 1} \right]$$

$$7 \quad \left[ \left( \frac{y^3}{y^2 + 2y + 1} - y \right) \cdot \left( -\frac{y^2 - 1}{4y + 2} \right)^2 : \left( -\frac{y^2 - y}{8y + 4} \right) + (y - 1)^2 \right] : (y - 1) \quad [y]$$

$$8 \quad \left( \frac{4b^2 + 4bc + c^2 - a^2}{ac - c^2} : \frac{2b + c + a}{1 - c} \right) \cdot \frac{c^2}{2b + c + ac - 2bc - c^2 - a} + \left( \frac{c^2 + a^2 + ca}{c^3 - a^3} - \frac{1}{c - a} \right) \quad \left[ \frac{c}{a - c} \right]$$

$$9 \quad \left( \frac{abc^3}{c + 1} \cdot \frac{a - 2}{abc^2 + 4abc} \right)^2 : \frac{(ac - 2c)^2}{c^2 + 2c + 1} - \frac{c}{c + 4} \quad \left[ -\frac{4c}{(c + 4)^2} \right]$$

$$10 \quad \left( \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{ax + a} \cdot \frac{x^2 + xa + 2x + 2a}{x^2 - 3x + 2} \right) : \frac{(x + 2)^2}{a^3} - \frac{(ax)^3}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x + 2}{ax^2} \quad \left[ \frac{a^3}{x - 1} \right]$$

$$11 \quad \left[ \left( \frac{ax}{ax - 2} - \frac{2}{a^2x^2 - 3ax + 2} + 1 \right) \cdot \frac{3a^2x - 3a}{x^2} - \left( 1 - \frac{x - 3a}{x} \right)^2 \right] \cdot \frac{x^2}{2x - 3} \quad [3a^2]$$

$$12 \quad \left[ \frac{y + by}{2y + y^2 - 3} \cdot \left( \frac{y + 1 - b}{y + b} - \frac{6 + 3b}{y^2 + by} \right) : \left( \frac{b + 1}{y - 1} - \frac{y - b}{y + b} \right)^2 \right] \cdot (y + b) \quad \left[ \frac{4}{y + b} \right]$$

$$13 \quad \frac{x + 1}{3x^2 + 7x + 2} \cdot \left( a - \frac{a - 2ax}{x + 2} \right) \cdot \frac{x^2 - 4}{ax + a} - \left( \frac{x}{x + 2} - 1 \right) \left( \frac{x}{x + 2} + 1 \right) \quad \left[ \frac{x(x + 4)}{(x + 2)^2} \right]$$

$$14 \quad \left[ \left( \frac{2ac}{x + y} \right)^4 \left( \frac{3b^2}{2x^2 + 2y^2 + 4xy} \right)^{-2} - \frac{16}{9} b^4 \right] \cdot \frac{9b^4}{8c^2a^2 - 4b^4} - 2(b^2 - ac)(b^2 + ac) \quad [2(b^4 + 5a^2c^2)]$$

$$15 \quad \left( \frac{x + 2}{x^2} - \frac{x}{x + 2} + \frac{x - 4}{x - 1} + \frac{9}{x^2 + x - 2} \right) \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{ax^2 - a} - \frac{12}{ax^3 - ax^2} \quad \left[ \frac{4}{ax^2} \right]$$

$$16 \quad \left[ \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^2 \left(\frac{z^4 + 2z^2 + 1}{3zy}\right)^{-1} \left(\frac{z}{y(z^2 + 1)}\right)^3 - \left(\frac{1}{yz^2 + y}\right)^3 \right] : \left(\frac{1}{yz^2 + y}\right)^2 \quad \left[\frac{3y-1}{y(z^2+1)}\right]$$

$$17 \quad \left[ \left(\frac{3x-1}{y+2}\right)^3 : \frac{(9x^2 - 6x + 1)^2}{(y^2 + 3y + 2)^3} + 2y^2 + 2 + 4y \right] : \frac{(y+1)^2(x-1)}{6x-2} - \frac{2(6x-1)}{x-1} \quad \left[\frac{2y}{x-1}\right]$$

$$18 \quad \left[ \left(\frac{x^2 - 8x + 18}{x^2 - 6x + 8} - \frac{1}{x-4}\right) : \frac{3ax - 15a}{xy^2 + y} - \frac{y\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)}{3ax - 6a} \right] \cdot \left(\frac{2a}{2y-1}\right)^2 - \frac{ay}{6y-3} \quad \left[\frac{ay}{3(2y-1)}\right]$$

$$19 \quad \left[ \left(\frac{x+2}{a-1}\right)^3 : \frac{x^2 + 4 + 4x}{a^3 - a^2 - a + 1} - 2x - 4 \right] \left[ \frac{x+1}{3x^2 + 7x + 2} \cdot \left(a - \frac{a-2ax}{x+2}\right) \cdot \frac{x^2 - 4}{ax + a} \right] \cdot \frac{1}{2-x} \quad \left[\frac{a-3}{a-1}\right]$$

$$20 \quad \left[ \left(\frac{x+1}{x^2 - 16}\right)^{-1} - \frac{5x^2 - 4 + x^3}{x^2 + 5x + 4} \right] : \left(-\frac{2}{x+4}\right) \left(\frac{1}{x+6} - \frac{2}{x+10}\right) + \frac{x}{2x+2} \quad \left[-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$21 \quad \left[ \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} + 1\right)^2 : \frac{a+b}{a^2 - 3ab - 4b^2} \right] \cdot \left(-\frac{2ab}{a+b}\right)^3 - 2ab(4b-a)(a+b) \quad [0]$$

$$22 \quad \left[ \left(-\frac{a-b}{xy}\right)^2 \left(\frac{a^2 - ab}{xy^2(a+b)}\right)^{-1} + \frac{b^2 - a^2}{ax + bx} \right] : \left(\frac{a}{ab - b^2}\right)^{-1} \quad \left[\frac{1}{x}\right]$$

$$23 \quad \left[ \frac{x-4y}{15x^2 - 43xy + 30y^2} \cdot \left(\frac{8}{7} - \frac{y}{2x-y} + \frac{x}{x-4y}\right) - \frac{y}{4x^2 - y^2} \right] \cdot (14x + 7y) \quad \left[\frac{4x-5y}{2x-y}\right]$$

$$24 \quad \left(\frac{3a}{a^2 + y} - \frac{1}{a} + \frac{4a + 2 + y}{a^3 + ay}\right) : \frac{a^2 + 3a + 2}{a^3} - 2 - \frac{4a}{a^3 + ay + 2a^2 + 2y} + \frac{2a}{a^2 + y} \quad \left[-\frac{2y}{a^2 + y}\right]$$

$$25 \quad \left[ \frac{2x^3}{(x+2)^3} + \frac{12ax^2 + 24ax + 16a}{(ax+2a)(x^2 + 4x + 4)} \right] \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 4xy - 5y^2} \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right) - \frac{2}{x-5y} \quad \left[\frac{2x}{x-5y}\right]$$

$$26 \quad \left[ \left(\frac{a}{a^2 - b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2}\right) : \frac{2a}{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3} - \frac{a^2}{a+b} \right] - \frac{b^2}{a+b} \quad \left[-\frac{a^2}{a+b}\right]$$

$$27 \quad \frac{\frac{2ax}{ax+by} + \frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2x^2 + 2axby + b^2y^2}}{\frac{(2ax+by)^2}{2axy}} + \frac{by^2}{(ax+by)^2} \quad \left[\frac{y}{ax+by}\right]$$

$$28 \quad \frac{\left(\frac{2}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6}\right) \cdot \left(2\frac{x+1}{ax^2 + 3ax} + \frac{1}{ax}\right)^{-1}}{\frac{x-2}{x^2 - x - 2}} \quad \left[\frac{ax}{x+1}\right]$$

$$29 \quad \frac{\left[\left(b + \frac{3b}{b-3}\right) \left(\frac{b+2}{b-1} - \frac{1}{b^2}\right) - \frac{b^3 + 2}{b^2 - 4b + 3}\right]^2 - \left(\frac{b+3}{b-3} - 2\right)^2}{\frac{3b-8}{b-3}} \quad \left[\frac{b+10}{b-3}\right]$$

$$30 \quad \frac{\left(\frac{b}{b-1} - \frac{b}{b+1}\right)\left(2 - \frac{4}{b+2}\right)}{\frac{1}{b+2} - \frac{3}{b^2+3b+2} - \frac{b-1}{b+1}} - \frac{b^2-b}{b^2-1} \left(\frac{b}{b+1} - \frac{b}{b-1}\right) \cdot \frac{b^2+2b+1}{2b^2} \quad \left[\frac{3}{1-b}\right]$$

$$31 \quad \frac{3a^3 - 4a^2}{a-1} : (4a - 3a^2) + \left(\frac{a}{a-1} - \frac{1}{1-a}\right) \cdot \frac{a}{a+1} \quad [0]$$

$$\left[\left(\frac{a-1}{a^2-4} - \frac{1}{a+2}\right) : \left(\frac{a^2}{a^2-4} - 1\right)\right]^2 : 4^{-2}$$

$$32 \quad \frac{\frac{1}{2m} - \frac{2m+3}{m^2-3m} \left(\frac{3m}{2m+3} - 1\right)}{\left(\frac{1}{m^2+2m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{3m}\right) \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4(m-2)}\right]} \cdot \frac{4-m^2}{5-2m^2} \quad [6]$$

$$33 \quad \frac{\left(\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1}\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{4x^2}}{1 + \frac{1}{4x^2}}}{\left(\frac{5x}{2x-6} + x-3\right) \cdot \frac{x-3}{2x^2-7x+18}} + \left(\frac{2 - \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 2}\right)^2 \quad [5]$$

$$34 \quad \frac{a^3-1}{1-a} + \frac{\frac{5a+1}{a^2+a-2} - \frac{3}{a+2} - \frac{2}{a-1}}{\frac{3a^2-3b^2}{\frac{2a}{6a+6b}} \cdot 4} \quad [-(a^2+a+1)]$$

$$35 \quad \frac{\frac{x^{3n} - y^{3n}}{x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n}}}{x^{2n} - y^{2n}} - \frac{1}{2}(x^n + y^n) \quad \left[-\frac{x^n y^n}{2(x^n + y^n)}\right]$$

$$36 \quad \frac{\frac{x^n y + x^{n+1} + y^{n+1} + x y^n}{x^{n+1} - x^n y - y^n x + y^{n+1}}}{\frac{x^n + y^n}{x^n - y^n}} - \frac{\frac{x^3}{x^3 - y^3}}{\frac{x^2}{x^2 + y^2 + xy}} \quad \left[\frac{y}{x-y}\right]$$