

## Il prodotto tra vettori

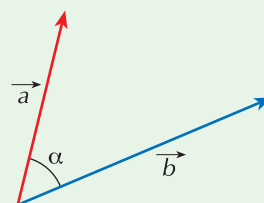
Oltre alle operazioni di addizione e sottrazione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare, in Fisica si definiscono anche due tipi di prodotto tra vettori: il **prodotto scalare**, il cui risultato è uno scalare, e il **prodotto vettoriale**, il cui risultato è un vettore.

### Il prodotto scalare

Il **prodotto scalare** di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  si indica con il simbolo  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; esso è uno scalare (quindi un numero) che, indicato con  $\alpha$  l'angolo formato dai due vettori, si definisce in questo modo (**figura 1**)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Figura 1



Per esempio:

- se il modulo di  $\vec{a}$  è 4, il modulo di  $\vec{b}$  è 6 e i due vettori formano un angolo  $\alpha$  di  $45^\circ$ , allora

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

- se il modulo di  $\vec{a}$  è  $\frac{1}{2}$ , il modulo di  $\vec{b}$  è 8 e i due vettori formano un angolo  $\alpha$  di  $120^\circ$ , allora

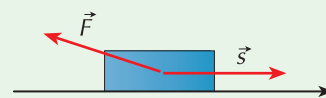
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Il prodotto scalare viene usato in Fisica in diverse occasioni, per esempio per il calcolo di un lavoro, come puoi vedere nel seguente esempio: un corpo che si sta muovendo su una traiettoria rettilinea viene fermato in uno spazio di 15m da una forza  $\vec{F}$  che forma un angolo di  $162^\circ$  con la direzione dello spostamento. Qual è il modulo di  $\vec{F}$  se il lavoro compiuto è di  $-285\text{J}$ ?

Il lavoro  $L$  compiuto da una forza costante  $\vec{F}$  quando il corpo si sposta di un tratto  $\vec{s}$  è dato dal prodotto scalare dei due vettori (**figura 2**)

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad \text{cioè} \quad L = F \cdot s \cos \alpha$$

Figura 2



Sostituendo i valori noti troviamo l'equazione  $-285 = F \cdot 15 \cdot \cos 162^\circ$

da cui ricaviamo che  $F = -\frac{285}{15 \cdot \cos 162^\circ}$  cioè  $F = 19,98\text{N}$

### Il prodotto vettoriale

Dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e indicato con  $\alpha$  l'angolo da essi formato, il loro **prodotto vettoriale** si indica con il simbolo  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; esso è un vettore  $\vec{c}$  che ha:

- modulo dato dall'espressione  $c = ab \sin \alpha$
- direzione perpendicolare al piano definito dai due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$
- verso stabilito dalla regola della mano destra.

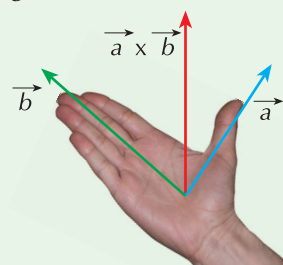
In base a questa regola il verso del vettore risultante si calcola usando le dita della mano destra (osserva la **figura 3**):

- si punta il pollice nella direzione del primo vettore (il vettore  $\vec{a}$ )
- si puntano le altre dita nella direzione del secondo vettore (il vettore  $\vec{b}$ )
- il verso del vettore  $\vec{c}$  è uscente dal palmo della mano.

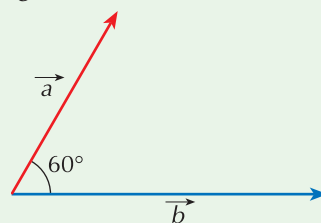
Per esempio, sapendo che i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  appartengono al piano della pagina che stai leggendo e sono orientati come in **figura 4**, che  $\vec{a}$  ha modulo 8,  $\vec{b}$  ha modulo 12 e che l'angolo fra i due vettori è di  $60^\circ$ , del prodotto  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  si può dire che:

- ha modulo uguale a:  $c = 8 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ = 96 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$
- ha direzione perpendicolare al piano della pagina
- verso entrante nella pagina (il pollice nella direzione di  $\vec{a}$ , le altre dita nella direzione di  $\vec{b}$ , la mano è rivolta con il palmo appoggiato alla pagina).

**Figura 3**



**Figura 4**

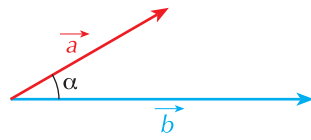
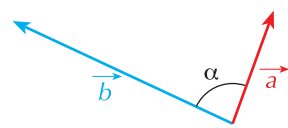


## ESERCIZI

**1** Rappresenta i seguenti vettori e determina il valore del prodotto scalare  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ :

- |    |          |         |                      |         |
|----|----------|---------|----------------------|---------|
| a. | $a = 5$  | $b = 4$ | $\alpha = 45^\circ$  | [14,14] |
| b. | $a = 10$ | $b = 7$ | $\alpha = 135^\circ$ | [-49,5] |
| c. | $a = 9$  | $b = 3$ | $\alpha = 65^\circ$  | [11,41] |

**2** Dati i seguenti vettori, determina il valore del prodotto vettoriale  $\vec{a} \times \vec{b}$  specificando modulo, direzione e verso:

- |    |   |   |  |
|----|---|---|--|
| a. |  | $a = 3$<br>$b = 5$<br>$\alpha = 30^\circ$ | [7,5 direzione $\perp$ foglio, verso entrante] |
| b. |  | $a = 2$<br>$b = 4$<br>$\alpha = 85^\circ$ | [7,97 direzione $\perp$ foglio, verso uscente] |