# Costruzioni geometriche al computer

Negli esercizi che ti proponiamo di seguito affronteremo il problema di costruire figure geometriche di cui sono noti alcuni elementi o alcune caratteristiche particolari; le descrizioni che daremo saranno volutamente essenziali in modo che i suggerimenti dati possano essere messi in atto usando entrambi i software che abbia imparato ad usare nelle precedenti esercitazioni, GeoGebra o Cabri.
Osserviamo che la risoluzione di un problema potrà condurre a una sola soluzione, a più di una soluzione, a nessuna soluzione, vale a dire che potranno essere individuate una o più figure o nessuna con le caratteristiche evidenziate; dovremo allora procedere ad una attenta analisi del problema per trovare tutte le possibili situazioni che si possono presentare. Per esempio, se vogliamo costruire un triangolo note le lunghezze dei suoi lati, vedremo che il problema può avere una soluzione o anche nessuna se le tre lunghezze non soddisfano le disuguaglianze triangolari.

**1** **ESERCIZIO GUIDA**

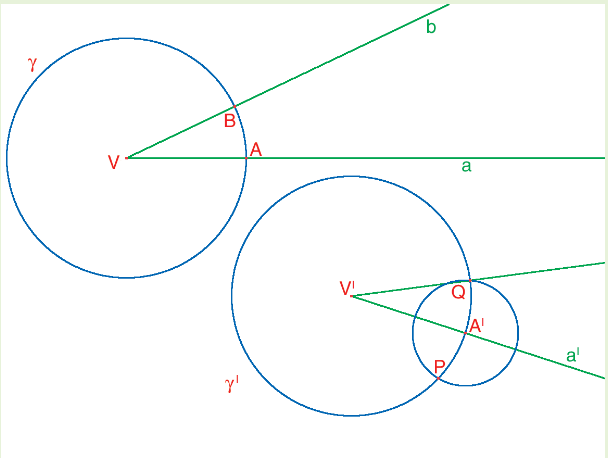
Capita frequentemente di dover costruire due angoli congruenti; risolviamo dunque il seguente problema:

dato un angolo $\widehat{ab}$ di vertice $V$, costruire un angolo di vertice assegnato $V'$ che sia congruente ad $\widehat{ab}$.

Disegniamo un angolo qualsiasi $\widehat{ab}$ e indichiamo con $V$ il suo vertice; prendiamo poi un punto $V'$ e tracciamo una semiretta $a'$ uscente da $V'$ che sarà il primo lato dell'angolo che dobbiamo costruire.
Procediamo poi in questo modo (puoi seguire la costruzione nella figura che segue):

- tracciamo una qualsiasi circonferenza $\gamma$ avente centro in $V$
- troviamo le intersezioni $A$ e $B$ di tale circonferenza con i lati dell'angolo
- disegniamo la circonferenza $\gamma'$ di centro $V'$ avente come raggio il segmento $VA$
- troviamo l'intersezione $A'$ di $\gamma'$ con la semiretta $a'$
- disegniamo la circonferenza di centro $A'$ e raggio $AB$
- troviamo i punti di intersezione $P$ e $Q$ di tale circonferenza con $\gamma'$
- tracciamo la semiretta $V'P$ oppure $V'Q$ a seconda del semipiano in cui si desidera disegnare l'angolo (in figura abbiamo disegnato $VQ$).

L'angolo $\widehat{QV'A'}$ è congruente a quello dato.



**2** Servendoti della costruzione dell'esercizio precedente, costruisci un angolo congruente al doppio di un angolo dato $\widehat{ab}$ avente vertice in un punto $O$ assegnato del piano.

**3** Costruisci un triangolo equilatero nota la lunghezza del suo lato.

**4** Costruisci un triangolo conoscendo la posizione dei punti medi dei suoi lati.
(Suggerimento: il triangolo si ottiene tracciando da ogni punto la parallela alla retta degli altri due; spiega perché)

**5** Costruisci un triangolo isoscele del quale sono assegnati l'altezza relativa alla base e uno dei lati congruenti.
(Suggerimento: disegna il segmento $AH$ dell'altezza e la retta ad esso perpendicolare passante per $H$; traccia poi la circonferenza avente centro in $A$ e raggio .........)

**6** Costruisci un triangolo rettangolo del quale sono assegnati l'ipotenusa e un cateto.

**7** Costruisci un triangolo rettangolo dati l'ipotenusa e un angolo acuto.

**8** Costruisci un rombo note le sue diagonali.

**9** Costruisci un rombo essendo note le lunghezze del lato e di una diagonale.

**10** Costruisci un rettangolo nota la sua diagonale; quante soluzioni ha il problema?

**11** Disegna un parallelogramma essendo note le lunghezze dei due lati consecutivi e l'ampiezza dell'angolo fra essi compreso.

**12** Data una circonferenza $\gamma$, costruisci le rette ad essa tangenti che sono perpendicolari ad una retta $r$ assegnata.

**13** Sono dati una retta $r$ e un suo punto $A$, un punto $B$ non appartenente a $r$. Trova la circonferenza passante per $B$ e tangente in $A$ alla retta $r$.

**14** **ESERCIZIO GUIDA**

Sono dati una circonferenza $\gamma$, un suo punto $A$ e un punto $B$ non appartenente a $\gamma$. Trova la circonferenza $\gamma'$ passante per $B$ e tangente in $A$ a $\gamma$.

Due circonferenze sono tangenti in un punto se in quel punto hanno la stessa retta tangente; tracciata la retta $t$ tangente in $A$ a $\gamma$, il centro di $\gamma'$ deve appartenere alla retta $r$ passante per $A$ e perpendicolare a $t$. Esso deve poi essere equidistante da $A$ e da $B$.

**15** E' dato un angolo $\alpha$; fissato un punto $P$ su uno dei suoi lati, trova la circonferenza che è tangente ai lati dell'angolo in modo che $P$ sia uno dei punti di tangenza.

**16** E' data una circonferenza di raggio $r$; costruisci il triangolo isoscele in essa inscritto avente un segmento dato come lato obliquo. Quali caratteristiche deve avere tale segmento affinché la costruzione sia possibile?

**17** Sono dati una circonferenza $\gamma$ e un punto $P$ ad essa esterno; costruisci la circonferenza che ha centro in $P$ ed è tangente a $\gamma$; traccia poi la tangente comune nel punto di tangenza.

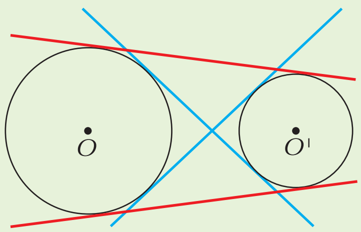
**18** Tenendo presente anche l'esercizio precedente, disegna due circonferenze tangenti internamente e traccia la tangente comune passante per il punto di tangenza.

**19** Costruisci una circonferenza tangente a tre rette date che si intersecano a due a due. Il problema ha soluzione se due delle tre rette sono parallele? E se sono tutte e tre parallele?
(Suggerimento: le tre rette definiscono un triangolo; esistono quindi la circonferenza in esso inscritta e le tre circonferenze che hanno per centri i punti di intersezione delle bisettrici di due angoli esterni)

## 20 ESERCIZIO GUIDA

Sono date due circonferenze $\gamma$ e $\gamma'$ di centri $O$ e $O'$ e raggi $r$ e $r'$ non congruenti fra loro ed esterne una all'altra; trova le tangenti esterne comuni alle due circonferenze.

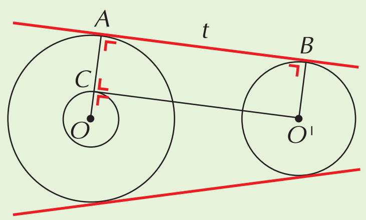
*ex. 2*




Cominciamo col dire che, date due circonferenze esterne, le tangenti comuni sono quattro, simmetriche a due a due rispetto alla retta dei centri; le due rette in colore rosso si dicono tangenti esterne, le due in colore azzurro si dicono tangenti interne (***figura 1a***).

Occupiamoci come richiesto dall'esercizio delle tangenti esterne. Per trovare una procedura che permetta di costruirle ragioniamo in questo modo: supponiamo di avere già risolto il problema e di sapere dunque che la retta $t$ è tangente alle due circonferenze; i raggi nei punti $A$ e $B$ di tangenza, essendo perpendicolari alla stessa retta sono fra loro paralleli (***figura 1b***). Tracciamo da $O'$ la parallela alla retta $t$ che incontra il raggio $OA$ in $C$. Il quadrilatero $CABO'$ è un rettangolo, quindi l'angolo $\widehat{OCO'}$ è retto e il segmento $OC$ è congruente alla differenza dei due raggi: $OC \cong r - r'$. Questo significa che $O'C$ è la retta tangente alla circonferenza di centro $O$ e raggio $CO$.

*ex. 5*

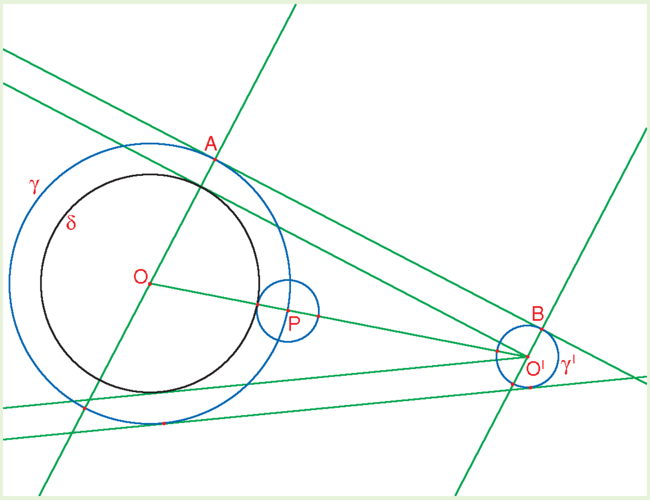



Tenendo presenti questi ragionamenti, per trovare la retta $t$ possiamo allora seguire questa procedura (osserva la figura al termine dell'esercizio):

- disegniamo le due circonferenze $\gamma$ e $\gamma'$ di centri rispettivamente $O$ e $O'$
- tracciamo il segmento che unisce i due centri e troviamo le intersezioni di tale segmento con le due circonferenze
- costruiamo adesso la circonferenza $\delta$ che ha centro in $O$ e raggio $r - r'$ (per determinare il segmento congruente alla differenza dei raggi individua il segmento che definisce il raggio della circonferenza minore, costruisci la circonferenza che ha per raggio tale segmento e centro in $P$)
- tracciamo le rette tangenti a $\delta$ uscenti da $O'$
- costruiamo adesso le perpendicolari uscenti da $O$ e da $O'$ ad una delle rette tangenti
- determiniamo i punti $A$ e $B$ di intersezione di tali perpendicolari con $\gamma$ e $\gamma'$.

La retta $AB$ è una delle due tangenti cercate; possiamo costruire la seconda per simmetria rispetto alla retta dei centri (in verde nella figura).

Possiamo memorizzare anche questa costruzione in una macro di nome *tangenti_esterne* assegnando come oggetti iniziali, nell'ordine, la circonferenza più grande e quella piccola, come oggetti finali le due rette tangenti; attenzione: quando si dovrà poi utilizzare la macro, la circonferenza da selezionare per prima deve essere quella di raggio maggiore.

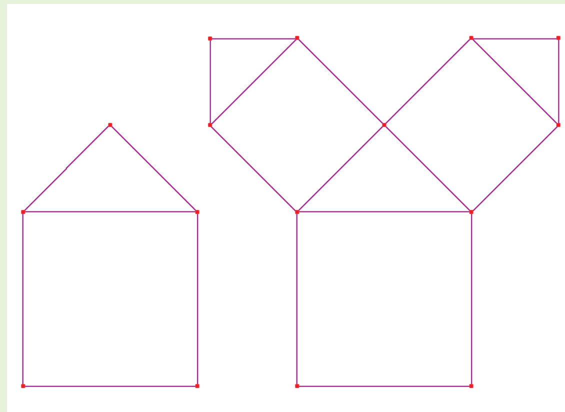


**21** Costruisci le rette tangenti interne a due circonferenze esterne. Il problema ha sempre soluzione? (Suggerimento: devi questa volta tracciare la circonferenza di centro $O$ e raggio $r + r'$)

**22** Dati due segmenti, costruisci il segmento che è medio proporzionale fra essi.
(Suggerimento: disegna i due segmenti in modo che siano adiacenti e considera la circonferenza che ha la loro somma come diametro; tracciando dal punto comune la perpendicolare al diametro ..........)

**23** **ESERCIZIO GUIDA**

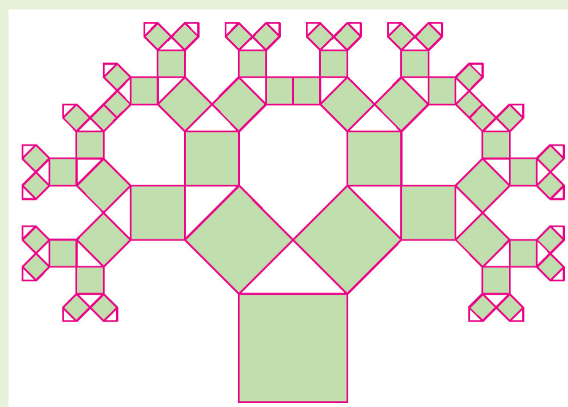
Le figure frattali si possono costruire abbastanza facilmente sia con GeoGebra che con Cabri; consideriamo per esempio l'albero di Pitagora che abbiamo messo nella scheda al termine del capitolo sulle similitudini.
La figura base è costituita da un quadrato con un triangolo sovrapposto; a seconda del tipo di triangolo si possono ottenere diversi tipi di albero. In questo esercizio usiamo un triangolo rettangolo isoscele.
E' necessario preparare due macro:
- una per costruire un quadrato noto il suo lato (macro *quadrato*)
- l'altra per costruire un triangolo rettangolo isoscele nota la sua ipotenusa (macro *trirett*).



Dopo averle costruite disegniamo la forma base come in figura:
- disegniamo un segmento
- costruiamo il quadrato che lo ha per lato
- costruiamo il triangolo rettangolo isoscele che ha come ipotenusa il lato superiore.

Basta adesso ripetere la costruzione indicando ciascun lato obliquo del triangolo come lato di un nuovo quadrato e poi il lato superiore come ipotenusa di un nuovo triangolo.

Iterando il procedimento si ottiene l'albero nella figura che segue.



**24** Costruisci un *albero di Pitagora* usando come figura base un quadrato con sovrapposto un triangolo rettangolo con gli angoli di 30° e 60° e l'ipotenusa coincidente con il lato del quadrato.

**25** Con lo stesso procedimento usato nell'esercizio precedente, costruisci la figura frattale della curva di Kock descritta nella scheda del capitolo sulla similitudine a pagina 156.

**26** Una particolare figura frattale si costruisce a partire da un triangolo equilatero e togliendo ad ogni iterazione il triangolo equilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati (in figura le prime due iterazioni).
Costruisci la figura che prende il nome di *triangolo di Sierpinski*.