Luoghi, sistemi di riferimento e curve

Obiettivi

- riferire l'equazione di una curva ad un sistema di riferimento diverso da quello cartesiano
- scrivere l'equazione di una curva in forma parametrica
- scrivere l'equazione di una sfera, determinare piani tangenti
- individuare metodi per valutare errori di misura e saper gestire la loro propagazione

1. I LUOGHI DI PUNTI E IL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO

Conosciamo, per averlo più volte espresso, il concetto di luogo di punti.

Luogo di punti è l'insieme di tutti e soli i punti che possiedono una medesima proprietà che viene detta *proprietà caratteristica del luogo*.

Per esempio, nel piano:

- la parabola è il luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice
- la circonferenza è il luogo dei punti equidistanti dal centro
- l'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento

e così via.

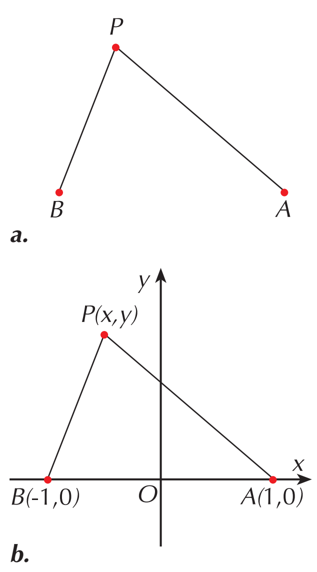
Un luogo di punti è sempre una figura geometrica e i luoghi ricordati ne sono un esempio. Se il luogo si riferisce ai punti di un piano, fissando un sistema di riferimento cartesiano ortogonale si può scrivere l'equazione del luogo che ne costituisce il modello algebrico.
Cerchiamo, per esempio, l'equazione del luogo dei punti del piano per i quali è costante ed è uguale a 2 il rapporto delle distanze da due punti fissi A e B. Con riferimento alla ***figura 1a***, dobbiamo cercare il luogo dei punti P per i quali $\frac{PA}{PB} = 2$.

Lavoriamo nel piano cartesiano e fissiamo il sistema di riferimento in modo che l'origine O sia il punto medio del segmento AB e scegliamo come unità di misura il segmento OA; in questo modo (***figura 1b***):

$$A(1, 0) \qquad B(-1, 0)$$

P è il punto che descrive il luogo ed ha quindi coordinate variabili (x, y).

Figura 1



Essendo: $\overline{PA} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$ $\qquad$ $\overline{PB} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

l'equazione del luogo è: $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 2$

che, svolgendo i calcoli, diventa:

$$3x^2 + 3y^2 + 10x + 3 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$$

Il luogo cercato è quindi una circonferenza avente centro in $C\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$ e raggio $r = \dfrac{4}{3}$.

Per trovare l'equazione di un luogo di punti nel piano è quindi necessario:
- individuare la regola che esprime la proprietà caratteristica
- fissare un sistema di riferimento nel piano
- scrivere l'equazione che rappresenta il modello algebrico della regola individuata.

Di seguito presentiamo altri esempi.

ESEMPI

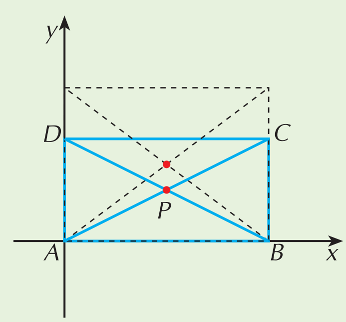
1. Un rettangolo $ABCD$ ha un lato variabile e un lato di lunghezza fissa 4; qual è il luogo dei punti d'intersezione delle sue diagonali?

Regola che esprime la proprietà caratteristica: essere il punto di intersezione delle diagonali di un rettangolo.

Fissiamo il sistema di riferimento cartesiano in modo che il rettangolo abbia il lato fisso sull'asse x, ponendo per esempio il primo vertice A nell'origine; in questo modo $A(0, 0)$ e $B(4, 0)$ (***figura 2***).

Gli altri due vertici C e D del rettangolo hanno l'ascissa uguale rispettivamente a quelle dei punti B ed A e ordinate variabili, uguali tra loro, che indichiamo con k; quindi: $C(4, k)$ e $D(0, k)$.

Figura 2



Il punto d'intersezione delle diagonali si determina risolvendo il sistema delle rette AC e BD :

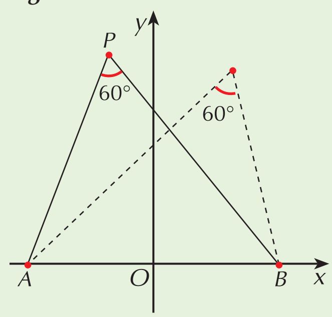
- equazione della retta AC : $\quad y = \dfrac{k}{4}x$
- equazione della retta BD : $\quad y = -\dfrac{k}{4}x + k$
- punto d'intersezione: $\begin{cases} y = \dfrac{k}{4}x \\ y = -\dfrac{k}{4}x + k \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2}k \end{cases} \quad \rightarrow \quad P\left(2, \dfrac{1}{2}k\right)$

L'ascissa del punto P è fissa e vale 2, mentre la sua ordinata è variabile; questo ci dice che P appartiene alla retta $x = 2$ qualunque sia il valore di k.
Il luogo dei punti cercato è quindi la retta asse del segmento AB.

2. Due punti A e B devono essere visti da un punto P sotto un angolo di $60°$. Qual è il luogo dei punti P?

Regola che esprime la proprietà caratteristica: l'angolo $\widehat{APB}$ deve essere di $60°$ (***figura 3a***).
Fissiamo il sistema di riferimento in modo che i punti A e B appartengano all'asse x e l'origine sia il punto medio del segmento AB; scegliendo come unità di misura il segmento OB, avremo che $A(-1, 0)$ e $B(1, 0)$.
Il luogo cercato è quello per il quale le rette PA e PB formano un angolo di $60°$; l'angolo α formato da due rette di coefficienti angolari m e m' soddisfa la relazione

Figura 3a



$$\tan\alpha = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}$$

nella quale viene definita la tangente sia dell'angolo acuto che dell'angolo ottuso che le due rette formano; se si vuole considerare solo l'angolo acuto (cioè valori positivi della tangente) occorre considerare il modulo dell'espressione al secondo membro.
Posto $P(x, y)$, abbiamo che:

- i coefficienti angolari delle rette PA e PB sono rispettivamente: $m_{PA} = \dfrac{y-0}{x+1}$ $\qquad m_{PB} = \dfrac{y-0}{x-1}$
- $\tan 60° = \sqrt{3}$

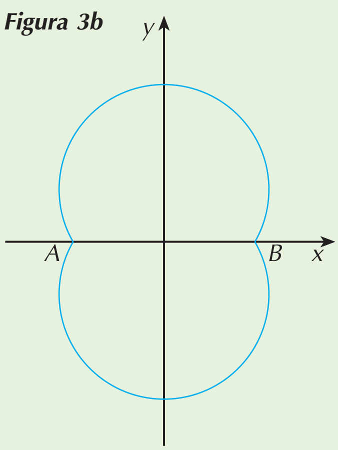
Il luogo cercato ha quindi equazione: $\sqrt{3} = \left| \dfrac{\dfrac{y}{x+1} - \dfrac{y}{x-1}}{1 + \dfrac{y}{x+1} \cdot \dfrac{y}{x-1}} \right| \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} = \left| \dfrac{-2y}{x^2 + y^2 - 1} \right|$

Tenendo presente che, per questioni geometriche, i punti P rendono positivo il denominatore di questa relazione (i punti che rendono positivo il denominatore sono quelli esterni alla circonferenza avente centro nell'origine e raggio unitario, quindi tutti i punti P tali che $\widehat{APB} < 90°$), l'equazione del luogo è:

$$\sqrt{3} = \frac{2|y|}{x^2 + y^2 - 1} \qquad \text{cioè} \qquad x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}|y| - 1 = 0$$

Per $y \geq 0$ essa diventa $x^2 + y^2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$ e rappresenta l'arco di circonferenza di centro $C\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e raggio $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ che appartiene al semipiano positivo delle ordinate.
Per $y < 0$ essa diventa $x^2 + y^2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$ ed ottieniamo l'arco simmetrico del precedente che si trova nel semipiano negativo delle ordinate.
Il grafico di questo luogo è quello in ***figura 3b***.

Figura 3b



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Quali tra i seguenti sono esempi di luoghi di punti?

a. l'ellisse **b.** un ramo di iperbole
c. un arco di circonferenza **d.** la bisettrice di un angolo.

2. Nel piano cartesiano, il luogo dei punti equidistanti dall'origine e dal punto $A(2, 2)$ è:

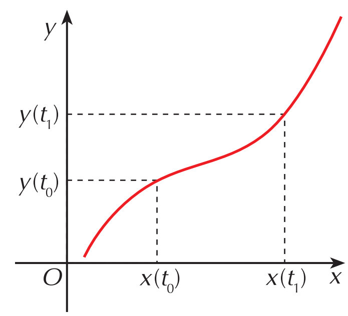
a. la retta di equazione $y = x + 2$
b. la retta di equazione $y = -x + 2$
c. la circonferenza di centro $(1, 1)$ e raggio 1
d. l'ellisse di centro O che passa per A.

2. EQUAZIONI PARAMETRICHE E CURVE IN CINEMATICA

La cinematica si occupa di studiare i moti descrivendo tramite modelli matematici la posizione di un corpo in un fissato sistema di riferimento. Consideriamo un punto che si muove su un piano descrivendo una certa curva; fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la sua posizione è individuata, istante dopo istante, da una coppia di coordinate (x, y) ciascuna delle quali dipende dal tempo t.

Per esempio, se il punto P si muove lungo la linea rappresentata in ***figura 4***, all'istante t_0 l'ascissa di P è $x_0 = x(t_0)$ e la sua ordinata è $y_0 = y(t_0)$; all'istante t_1 l'ascissa P è $x_1 = x(t_1)$ e la sua ordinata è $y_1 = y(t_1)$, e così via. In casi come questo l'ascissa e l'ordinata di un punto che appartiene a una curva sono date in funzione di un parametro t.

Figura 4



Il moto di una pallina che viene lanciata con una certa velocità è un esempio di un moto di questo tipo; se la velocità di lancio è di $4m/s$ ed ha un'inclinazione di 30° rispetto alla linea orizzontale (***figura 5a***), il moto lungo l'asse x è rettilineo uniforme con velocità $v_x = 2\sqrt{3}$m/s, quello lungo l'asse y è uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9{,}8\text{m/s}^2$ e velocità iniziale $v_y = 2$m/s.

Se il sistema di riferimento è fissato come in ***figura 5b***:

- il moto in orizzontale è descritto dalla legge

  $x = v_x \cdot t$ cioè $x = 2\sqrt{3}t$

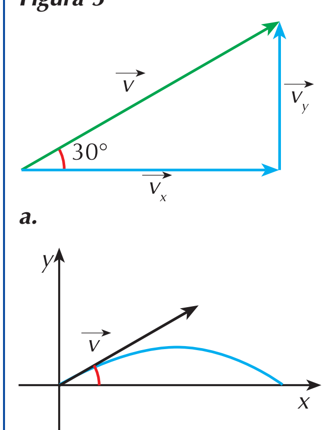
- il moto in verticale è descritto dalla legge

  $y = v_y \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2$ cioè $y = 2t - 4{,}9t^2$

La posizione del punto P nel piano dove avviene il moto è quindi descritta da entrambe le equazioni contemporaneamente, cioè dal sistema:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

Figura 5



Molti fenomeni, per essere descritti in modo completo, hanno bisogno di una rappresentazione algebrica di questo tipo nel quale le coordinate di un punto dipendono entrambe da uno stesso parametro. In generale, possiamo dire che:

L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI UNA CURVA

fissato un sistema di riferimento cartesiano, l'equazione di una curva si può esprimere in forma parametrica mediante il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

dove le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ esprimono le coordinate di un punto P della curva in funzione di t.

Vediamo come si possono esprimere in forma parametrica le equazioni dei principali luoghi di punti.

Le equazioni parametriche di una retta

Sappiamo che l'equazione di una retta che passa per due punti assegnati di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ha la forma

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

che, se poniamo $x_2-x_1=\ell$ e $y_2-y_1=p$, possiamo scrivere in questo modo

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{p}$$

Se ora indichiamo con t il valore comune delle due espressioni, se poniamo cioè $\frac{x-x_1}{\ell}=t$ e $\frac{y-y_1}{p}=t$, otteniamo le equazioni parametriche della retta.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=\ell t+x_1} \\ \boldsymbol{y=pt+y_1} \end{cases}$$

Per esempio, la retta che passa per i punti $A(1,-2)$ e $B(-3,0)$, ha equazione:

- considerando A come primo punto e B come secondo

  $\ell=x_2-x_1=-3-1=-4 \qquad p=y_2-y_1=0+2=2 \qquad \begin{cases} x=-4t+1 \\ y=2t-2 \end{cases}$

- considerando B come primo punto e A come secondo

  $\ell=1+3=4 \qquad p=-2-0=-2 \qquad \begin{cases} x=4t-3 \\ y=-2t \end{cases}$

Le equazioni parametriche di una retta non sono definite in modo unico perché basta prendere i punti in ordine inverso oppure scegliere altri due punti della retta per ottenere equazioni diverse.

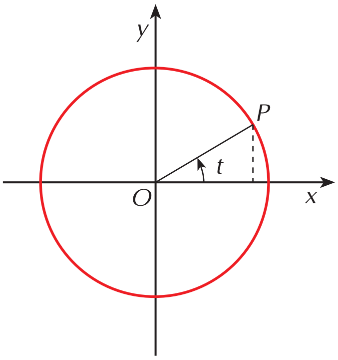
Le equazioni parametriche di una conica

La circonferenza

Consideriamo la circonferenza di raggio r avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali (***figura 6***). Le coordinate di un punto P della circonferenza, indicando con t l'angolo orientato che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle ascisse, sono date dalle relazioni

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases} \qquad \text{con} \quad t\in[0, 2\pi)$$

Figura 6



Queste dunque sono le equazioni parametriche di una circonferenza avente centro nell'origine; se il centro è un punto di coordinate (a, b), basta applicare alle precedenti equazioni la traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$ ottenendo

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=a+r\cos t} \\ \boldsymbol{y=b+r\sin t} \end{cases}$$

Per esempio, la circonferenza di centro $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ e raggio $r=3$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+3\cos t \\ y=1+3\sin t \end{cases}$$

La parabola

Per scrivere le equazioni parametriche di una parabola basta porre uguale a t la variabile indipendente dell'equazione; abbiamo così:

- $\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = at^2 + bt + c} \end{cases}$ se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse $\boldsymbol{y}$

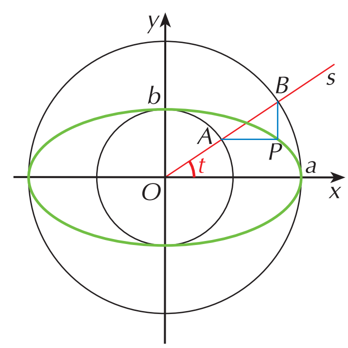
- $\begin{cases} \boldsymbol{x = at^2 + bt + c} \\ \boldsymbol{y = t} \end{cases}$ se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse $\boldsymbol{x}$

L'ellisse

La costruzione di un'ellisse può essere fatta con riga e compasso disegnando due circonferenze concentriche aventi come raggi i semiassi dell'ellisse (***figura 7***); una semiretta s uscente dall'origine (centro comune delle due circonferenze) le interseca in A e B.
Tracciata da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y, il loro punto di intersezione P appartiene all'ellisse.
Indicato con t l'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse con la semiretta s, i punti A e B hanno coordinate

$$A(b \cos t,\ b \sin t) \qquad\qquad B(a \cos t,\ a \sin t)$$

Figura 7



Il punto P ha la stessa ascissa di B e la stessa ordinata di A:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_p = a \cos t} \\ \boldsymbol{y_p = b \sin t} \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0,\ 2\pi)$$

Al variare di t, queste equazioni descrivono l'ellisse.
Per esempio, l'ellisse di semiassi $a = 3$ e $b = 2$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

L'iperbole

Si dimostra che le equazioni parametriche di un'iperbole sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0,\ 2\pi] \ \wedge \ t \neq \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

dove a è il semiasse trasverso e b quello non trasverso.
Per esempio, l'iperbole di semiasse trasverso $a = 1$ e semiasse non trasverso $b = 3$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = 3\tan t \end{cases}$$

ESEMPI

1. Scriviamo le equazioni parametriche della retta di coefficiente angolare 2 che passa per il punto $A(3,\ -1)$.

Osserviamo che, avendo posto $x_2 - x_1 = \ell$ e $y_2 - y_1 = p$, il coefficiente angolare della retta è proprio il rapporto $\dfrac{p}{\ell}$; possiamo quindi porre $p = 2$ e $\ell = 1$ (oppure $p = 4$ e $\ell = 2$ e così via, in modo che il rapporto sia sempre 2) e scrivere l'equazione della retta: $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$

2. Determiniamo la forma parametrica dell'equazione della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$.

Troviamo innanzi tutto centro e raggio della circonferenza: $C(1, -3)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{4+36-8} = 2\sqrt{2}$.

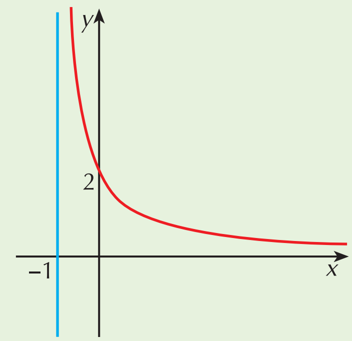
L'equazione in forma parametrica è quindi $\begin{cases} x = 1 + 2\sqrt{2}\cos t \\ y = -3 + 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$

3. Il moto di un punto nel piano è descritto dalle equazioni $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$; dopo aver individuato il tipo di traiettoria, scriviamone l'equazione cartesiana.

La forma dell'equazione indica che si tratta di un'ellisse di semiassi $a = 2$ e $b = 1$. La traiettoria descritta dal punto è quindi l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

4. Individuiamo la traiettoria descritta da un punto la cui posizione in un sistema di riferimento cartesiano è descritta dalle equazioni $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$.

Figura 8



Dobbiamo eliminare il parametro t dalle equazioni; ricaviamo la sua espressione dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$t = \frac{x+1}{2} \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{2}{x+1}$$

Tenendo presente che deve essere $t \geq 0$, quindi $x \geq -1$, e considerando che la funzione non è definita per $x = -1$, la traiettoria è l'arco di iperbole equilatera avente per asintoti l'asse x e la retta $x = -1$ in ***figura 8***.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

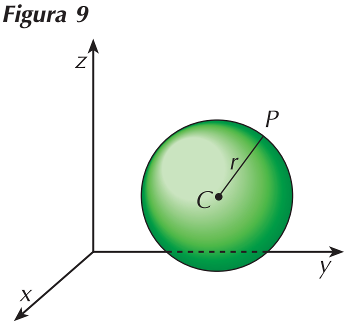
1. La retta che passa per i punti di coordinate $(1, -1)$ e $(2, 3)$ ha equazione (sono possibili più alternative):

a. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -4t - 1 \end{cases}$

2. La circonferenza che ha centro nell'origine e raggio 3 ha equazione parametrica:

a. $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 9\sin t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Figura 9



3. LA SUPERFICIE SFERICA

3.1 L'equazione

La sfera è il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti da un punto fisso che ne costituisce il centro.
Se $C(\alpha, \beta, \gamma)$ è il centro e r è il raggio, un punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene alla sfera di centro C e raggio r se $\overline{CP} = r$ (***figura 9***).

Poiché $\overline{CP} = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$, l'equazione della sfera è rappresentata dall'uguaglianza:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2} = r \qquad \text{cioè} \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2= r^2$$

Svolgendo i calcoli e riordinando i termini in modo opportuno si ottiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0$$

e ponendo:

$$-2\alpha = a \qquad -2\beta = b \qquad -2\gamma = c \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = d \qquad (\mathbf{A})$$

possiamo riscrivere l'equazione nella forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$$

Per esempio, la sfera di centro $C(1, -2, -1)$ e raggio $r = 2$ ha equazione:

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2= 4 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 2 = 0$$

Viceversa, risolvendo le equazioni (**A**) rispetto ad α, β, γ e r otteniamo che:

$$\alpha = -\frac{a}{2} \qquad \beta = -\frac{b}{2} \qquad \gamma = -\frac{c}{2} \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$$

L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ rappresenta allora una sfera solamente se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$.

Per esempio:

- l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - x + 4y - 3z - 2 = 0$
  essendo $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 1 + 16 + 9 + 8 = 34 > 0$ rappresenta una superficie sferica di centro $C\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{3}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{34}$
- l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + z + 4 = 0$
  essendo $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 + 9 + 1 - 16 = -2 < 0$ non rappresenta una sfera.

In sintesi:

una sfera di centro $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e raggio r ha equazione

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2= r^2$$

Viceversa, l'equazione di secondo grado

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

rappresenta una sfera se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$$

In tal caso, il centro della sfera e il raggio sono dati dalle relazioni

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$$

ESEMPI

1. Scriviamo l'equazione della superficie sferica che ha centro in $C(2, 1, 0)$ e raggio $r = 2$.

Utilizziamo la definizione: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=4$

Sviluppando i calcoli: $x^2+y^2+z^2-4x-2y+1=0$

2. Scriviamo l'equazione della sfera che passa per i punti $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 0, 1)$, $C(1, 1, -1)$, $D(0, 0, 3)$.

L'equazione di una sfera dipende da quattro parametri, quindi per determinarne l'equazione sono necessarie quattro informazioni indipendenti, come per esempio le coordinate di quattro punti che non appartengono allo stesso piano.
Imponiamo il passaggio per i quattro punti:

$$\begin{cases} 1+1+a+b+d=0 & \longleftarrow \quad \text{passaggio per } A \\ 4+1-2a+c+d=0 & \longleftarrow \quad \text{passaggio per } B \\ 1+1+1+a+b-c+d=0 & \longleftarrow \quad \text{passaggio per } C \\ 9+3c+d=0 & \longleftarrow \quad \text{passaggio per } D \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a+b+d=-2 \\ 2a-c-d=5 \\ a+b-c+d=-3 \\ 3c+d=-9 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene: $\begin{cases} a=-3 \\ b=13 \\ c=1 \\ d=-12 \end{cases}$

La sfera ha quindi equazione: $x^2+y^2+z^2-3x+13y+z-12=0$.

Il centro è il punto $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, il raggio è $r=\frac{1}{2}\sqrt{9+169+1+48}=\frac{1}{2}\sqrt{227}$.

3. Scriviamo l'equazione della sfera che ha centro nel punto $C(3, -1, 2)$ e passa per il punto $P(-2, 1, 0)$.

Possiamo procedere in due modi.

- Avendo le coordinate del centro conosciamo i valori dei parametri a, b, c:
  $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+d=0$
  per trovare d imponiamo il passaggio per P: $4+1+12+2+d=0$
  da cui: $d=-19$
  L'equazione della sfera è dunque: $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-19=0$

- Il raggio della sfera è il segmento CP: $r=\sqrt{(3+2)^2+(-1-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{33}$
  L'equazione è quindi:
  $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=33 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-19=0$

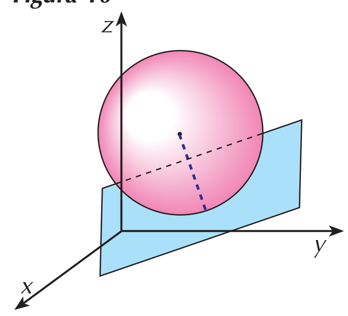
3.2 Il piano tangente a una sfera

Un piano α è tangente a una sfera di centro C se la distanza del centro dal piano è uguale al raggio (***figura 10***):

condizione di tangenza: $d(C, \alpha)=r$

Se, in particolare, si conosce il punto di tangenza P, allora il piano tangente passa per P ed è perpendicolare alla retta CP.

Figura 10



Vediamo alcuni esempi.

ESEMPI

1. Scriviamo l'equazione della sfera che ha centro in $C(1, 0, -1)$ ed è tangente al piano di equazione $2x - 3y + x - 5 = 0$.

Il raggio della sfera è la distanza di C dal piano: $r = \dfrac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 1 - 5|}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$

L'equazione cercata è quindi:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = \frac{8}{7} \quad \rightarrow \quad 7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 14x + 14z + 6 = 0$$

2. Considerata la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 6z + 21 = 0$ e la retta s di equazione normale $x = y = z$, troviamo l'equazione del piano tangente alla sfera che contiene la retta s.

La sfera ha centro nel punto $C(3,\ 3,\ -3)$ e raggio $r = \sqrt{6}$.

Possiamo vedere la retta s come intersezione dei piani di equazione: $x - y = 0$ e $y - z = 0$

L'insieme dei piani che passano per s (il fascio di piani di origine s) ha quindi equazione

$$x - y + k(y - z) = 0 \quad \rightarrow \quad x + y(k-1) - kz = 0$$

Tra essi, quelli tangenti alla sfera hanno distanza dal centro uguale al raggio della sfera:

- distanza centro-piano: $\dfrac{|3 + 3(k-1) + 3k|}{\sqrt{1 + (k-1)^2 + k^2}} = \dfrac{|6k|}{\sqrt{2k^2 - 2k + 2}}$
- condizione di tangenza: $\dfrac{|6k|}{\sqrt{2k^2 - 2k + 2}} = \sqrt{6}$
- soluzioni dell'equazione: $k = \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad k = -1$

I due piani tangenti hanno quindi equazione:

- per $k = \dfrac{1}{2}$ $\qquad x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - y - z = 0$
- per $k = -1$ $\qquad x - 2y + z = 0$

3. Data la sfera di centro $C(2,\ -3,\ 0)$ e raggio $r = 2$, troviamo le equazioni dei piani ad essa tangenti che sono paralleli al piano α di equazione $3x - y + z = 0$.

La sfera ha equazione: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

Un piano parallelo ad α ha equazione: $3x - y + z + k = 0$

Calcoliamo la distanza del centro della sfera dal piano e imponiamo che sia uguale al raggio:

- distanza centro-piano: $\dfrac{|6 + 3 + k|}{\sqrt{9+1+1}} = \dfrac{|9+k|}{\sqrt{11}}$
- condizione di tangenza: $\dfrac{|9+k|}{\sqrt{11}} = 2$
- soluzioni dell'equazione: $k = -9 \pm 2\sqrt{11}$

I due piani tangenti hanno quindi equazione: $3x - y + z - 9 \pm 2\sqrt{11} = 0$.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0$:

a. ha centro nel punto: ① $C(1, 2, -2)$ ② $C(2, 2, -1)$ ③ $C(2,1, -2)$

b. ha raggio: ① $r = 3$ ② $r = 2$ ③ $r = 1$

2. Il piano di equazione $x - 2y + z = 1$ rispetto alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y = 4$ è:

a. secante **b.** tangente **c.** esterno

3. La sfera di centro $C(2, 0, 1)$ che è tangente al piano $x + y - z = 4$ ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + ...x + ...y + ...z = ...$$

Completa inserendo i coefficienti mancanti.

4. Le equazioni di alcune superfici notevoli

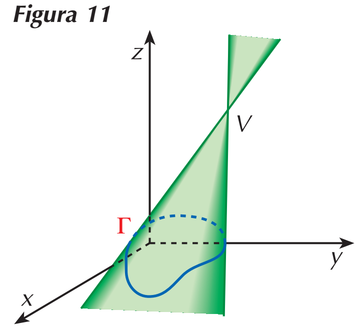
4.1 L'equazione di una superficie cilindrica

In geometria analitica si dice **superficie cilindrica** una qualunque superficie che ha come direttrice una curva Γ appartenente ad un piano e come generatrici le rette che passano per Γ e che sono parallele ad una data retta r (***figura 11***).
Per scrivere l'equazione di un cilindro è necessario quindi conoscere l'equazione di Γ e la direzione delle generatrici.

Particolarmente semplice è il caso in cui il cilindro ha le generatrici parallele ad uno degli assi cartesiani e la curva Γ appartiene al piano coordinato ad esse perpendicolare; si dimostra che, in questi casi, la superficie cilindrica ha nello spazio la stessa equazione che Γ ha nel piano cui appartiene.

Ad esempio, la superficie cilindrica che ha come direttrice la circonferenza del piano xy di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e per generatrici le rette parallele all'asse z che passano per i punti della circonferenza, ha ancora equazione $x^2 + y^2 = 9$; la superficie cilindrica che ha come direttrice la parabola $z = y^2$ del piano yz e come generatrici le rette parallele all'asse x che passano per i punti della parabola ha ancora equazione $z = y^2$.

Figura 11



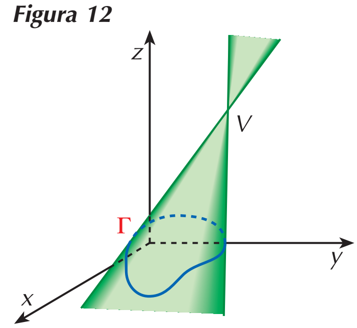
4.2 L'equazione di una superficie conica

Una **superficie conica** è una qualunque superficie che è luogo di rette passanti per un punto fisso V, detto **vertice**, e per i punti di una curva Γ dello spazio che non passi per V, detta **generatrice** (***figura 12***).
Supponiamo ad esempio di voler scrivere l'equazione del cono che ha vertice nel punto $V(0, 1, 0)$ e che ha per generatrice la circonferenza di equazione (intersezione di una superficie sferica con un piano)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Una retta passante per V ha equazioni $\begin{cases} x = \ell t \\ y = 1 + mt \\ z = nt \end{cases}$ (**B**)

Figura 12



Troviamo le intersezioni di tali rette con il piano $x = 1$ cui appartiene la circonferenza

$$\begin{cases} x = \ell t \\ y = 1 + mt \\ z = nt \\ x = 1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \dfrac{m}{\ell} \\ z = \dfrac{n}{\ell} \end{cases}$$

I punti intersezione sono quindi i punti $P\left(1, 1 + \dfrac{m}{\ell}, \dfrac{n}{\ell}\right)$.

Affinché le rette per V siano generatrici del cono, tali punti devono appartenere alla circonferenza, cioè devono soddisfare l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + 1 = 0$$

Troviamo così che deve essere

$$1 + \left(1 + \frac{m}{\ell}\right)^2 + \frac{n^2}{\ell^2} - 2 - \left(1 + \frac{m}{\ell}\right) - \frac{n}{\ell} + 1 = 0$$

cioè $$\frac{m^2}{\ell^2} + \frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m}{\ell} - \frac{n}{\ell} = 0 \qquad \textbf{(C)}$$

Quest'ultima equazione rappresenta la relazione che individua i punti che appartengono al cono. Cerchiamo di riscriverla in funzione delle variabili x, y e z. Ricaviamo allora t dalla prima equazione del sistema **(B)** e sostituiamo nelle altre ottenendo

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{\ell} \\ y = 1 + \dfrac{m}{\ell}x \\ z = \dfrac{n}{\ell}x \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \dfrac{m}{\ell} = \dfrac{y-1}{x} \\ \dfrac{n}{\ell} = \dfrac{z}{x} \end{cases}$$

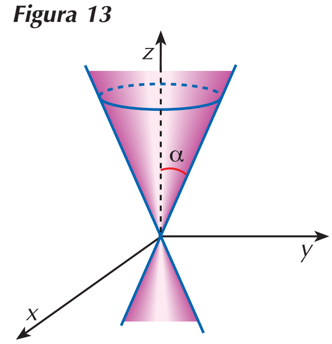
Sostituendo poi le espressioni trovate per i rapporti $\dfrac{m}{\ell}$ e $\dfrac{n}{\ell}$ nell'equazione (**C**) abbiamo infine l'equazione del cono

$$y^2 + z^2 + xy - xz - x - 2y + 1 = 0$$

Un caso in cui si ottiene un'equazione particolarmente semplice si ha quando il cono è generato dalla rotazione di una retta r per l'origine attorno a uno degli assi cartesiani. Se α è l'ampiezza dell'angolo formato da r con tale asse (***figura 13***), l'equazione del cono è

- $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha$ se la rotazione avviene attorno all'asse z
- $x^2 + z^2 = y^2 \tan^2\alpha$ se la rotazione avviene attorno all'asse y
- $y^2 + z^2 = x^2 \tan^2\alpha$ se la rotazione avviene attorno all'asse x

Figura 13



Ad esempio l'equazione $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}z^2$ rappresenta una superficie conica avente vertice in O, asse di rotazione coincidente con l'asse z e angolo di semiapertura $\alpha = 30°$ ($\tan^2\alpha = \dfrac{1}{3}$ implica $\alpha = 30°$).

4.3 L'equazione di una superficie di rotazione

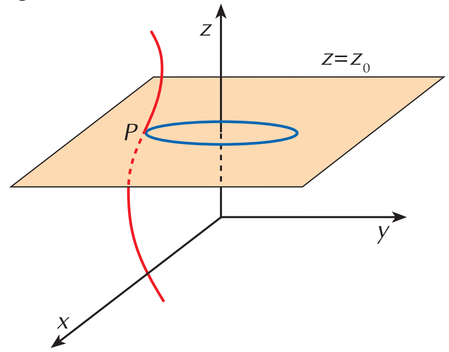
Una superficie di rotazione è la superficie generata dalla rotazione di una curva Γ attorno ad una retta fissa.

Se Γ appartiene al piano xz ed ha equazione $\begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e la rotazione avviene attorno all'asse z, un punto $P(x_0, 0, z_0)$ di tale curva descrive una circonferenza, con centro sull'asse z, che appartiene al piano $z = z_0$ e che ha quindi equazione $\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$ (***figura 14***). L'equazione della superficie generata dalla rotazione di Γ attorno all'asse z si ottiene eliminando x_0 e z_0 dalle equazioni

$$F(x_0, z_0) = 0 \qquad x^2 + y^2 = x_0^2 \qquad z = z_0$$

ed ha quindi equazione $F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2},\, z\right) = 0$

Figura 14



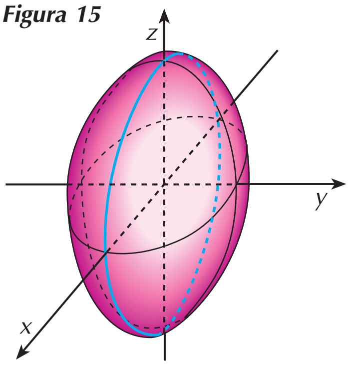
L'equazione della superficie di rotazione si ottiene quindi sostituendo l'espressione $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ al posto di x nell'equazione di Γ.
L'equazione del cono precedente si trova appunto in questo modo: se $z = mx$ è l'equazione della retta r, il cono ha equazione $z = m \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ da cui elevando al quadrato e tenendo conto del significato trigonometrico di m, $\left(m = \dfrac{1}{\tan \alpha}\right)$ si ottiene l'equazione data.

- Ad esempio, la superficie che si ottiene facendo ruotare l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ attorno all'asse z ha equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

  e si dice **ellissoide rotondo** (***figura 15***).

Figura 15

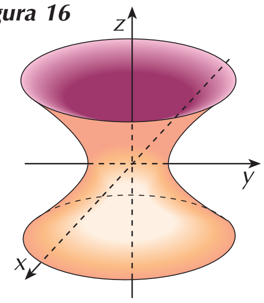


- Analogamente, la superficie che si ottiene facendo ruotare l'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ attorno all'asse z ha equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

  e si dice **iperboloide rotondo a una falda** (***figura 16***).

Figura 16

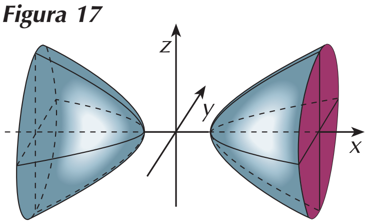


- La stessa iperbole, ruotando attorno all'asse x (il ragionamento è analogo), genera una superficie la cui equazione si ottiene sostituendo $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ al posto di z e cioè

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

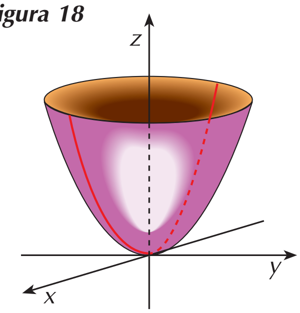
  Tale superficie prende il nome di **iperboloide rotondo a due falde** (***figura 17***).

Figura 17



- Infine la parabola di equazione $z = ax^2$, ruotando attorno all'asse z, genera una superficie di equazione
$$z = ax^2 + ay^2$$
che si dice **paraboloide rotondo** (***figura 18***).

Figura 18



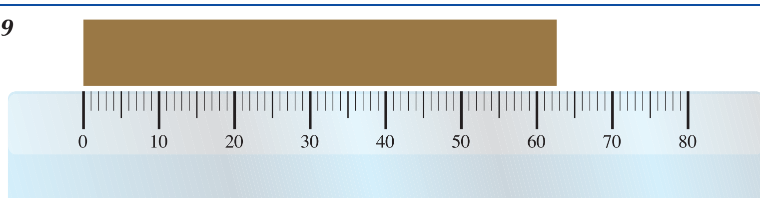
5. MISURE ED ERRORI

Misurare è una delle attività che si fanno con maggiore frequenza e in alcuni casi è anche un'attività molto delicata che, se fatta in modo errato, può portare a conclusioni sbagliate e a volte dannose. Scopo di questo paragrafo è comprendere come sia possibile eseguire correttamente una misura, valutarne la precisione ed usare il valore ottenuto per ottenere altre misure.

5.1 La valutazione degli errori

Per misurare si devono utilizzare degli strumenti i quali, per come vengono costruiti, hanno una fissata *sensibilità*. Per esempio, di un comune righello che ha una suddivisione in millimetri diciamo che è sensibile al millimetro, di un contenitore per liquidi che ha una scala graduata in decilitri diciamo che è sensibile al decilitro.
Il valore numerico che si ottiene come risultato di una misura non è mai un valore esatto perché si deve tenere conto, tra le altre cose, anche della sensibilità dello strumento; se misurando con il righello la larghezza di un oggetto rettangolare come quello in ***figura 19*** troviamo che essa cade tra 62 e 63 millimetri, possiamo affermare che la misura probabile ℓ di quell'oggetto appartiene all'intervallo definito dalla relazione
$$62 < \ell < 63$$

Figura 19



Come misura della lunghezza si assume di solito il valore centrale dell'intervallo assumendo come errore la semiampiezza dell'intervallo stesso; nel nostro caso diciamo che $\ell = 62{,}5$mm con un errore pari a 0,5mm.
La misura, corredata del suo errore, viene quindi scritta nella forma
$$\ell = \left(\underbrace{62{,}5}_{\text{valore probabile}} \pm \underbrace{0{,}5}_{\text{errore}}\right)\text{mm}$$

L'errore di misura legato allo strumento viene detto **errore di sensibilità**.

Oltre a quello dovuto alla sensibilità dello strumento, altri errori possono influenzare una misura; essi si distinguono in due categorie fondamentali.

- Chiamiamo **errori sistematici** quelli dovuti a strumenti difettosi (per esempio una bilancia che non è posizionata correttamente sullo zero) o a un errato uso dello strumento (per esempio gli errori di parallasse che si commettono quando si legge una misura ponendosi a lato dello strumento). Questo tipo di errore si può eliminare facilmente cambiando lo strumento o mettendo in atto un procedimento corretto.

- Chiamiamo **errori accidentali** quelli dovuti a circostanze casuali o non prevedibili come per esempio misurare una temperatura senza accorgersi che c'è una fonte di calore nelle vicinanze, oppure nella misurazione di un tempo far partire il cronometro leggermente in ritardo o leggermente in anticipo. Questo tipo di errore non può essere completamente eliminato anche se può essere ridotto effettuando misure ripetute e più accurate.

Un possibile modo di ridurre la naturale imprecisione di una misura può essere quello di utilizzare strumenti sofisticati; un cronometro con una sensibilità al centesimo di secondo darà una misura con un errore più piccolo di un cronometro sensibile al decimo di secondo; misurando per esempio un tempo potremmo ottenere:

- con un cronometro al decimo di secondo: $(15{,}3 \pm 0{,}1)s$
- con un cronometro al centesimo di secondo: $(15{,}32 \pm 0{,}01)s$

L'errore è minore nel secondo caso.
Non si può tuttavia pensare di costruire strumenti con una sensibilità sempre più alta sia per i limiti imposti dalla tecnologia, sia perché a volte risulta inutile; strumenti ad alta sensibilità producono misure spesso differenti tra loro in quanto soggette ad errori casuali e la maggiore precisione acquisita non si traduce in un effettivo miglioramento della misura stessa.

Spesso la misura di una grandezza viene fatta una sola volta; non si può per esempio misurare più volte il tempo dei discesisti in una gara di sci. In questi casi l'errore che viene attribuito è l'errore di sensibilità dello strumento.
In altri casi, per esempio quando si vogliono verificare i risultati di un esperimento, la misura di una stessa grandezza viene ripetuta più volte.
Supponiamo, per esempio, che in un esperimento di laboratorio si voglia misurare il tempo che impiega un oggetto a scendere lungo un piano inclinato; per avere un valore della misura si decide di far cronometrare il tempo di discesa a cinque persone alle quali viene affidato un cronometro con la sensibilità di un decimo di secondo; i risultati ottenuti sono visibili nella seguente tabella:

I misura	II misura	III misura	IV misura	V misura
17,5	17,4	18,2	18,1	17,6

Le cinque persone hanno ottenuto valori leggermente diversi ed è ragionevole considerare come misura la media dei valori ottenuti con il corretto numero di cifre significative:

$$\frac{17{,}5 + 17{,}4 + 18{,}2 + 18{,}1 + 17{,}6}{5} = 17{,}8$$

L'errore non può essere però valutato in base alla sensibilità dello strumento perché la differenza tra il valore minimo rilevato e quello massimo è maggiore della sensibilità: $18{,}2 - 17{,}4 = 0{,}8$.
Si conviene allora di assumere come errore la **semidispersione**, cioè la semidifferenza tra questi valori; nel nostro caso: $\text{errore} = \dfrac{0{,}8}{2} = 0{,}4$.

Semidispersione $= \dfrac{\text{valore massimo} - \text{valore minimo}}{2}$

Il modo corretto di esprimere la misura è quindi: $(17{,}8 \pm 0{,}4)s$.

Un secondo modo di valutare l'errore è quello di considerare le misure rilevate come dati statistici e calcolare il loro scarto quadratico medio. Nell'esempio precedente lo scarto quadratico medio è dato da:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(17{,}5-17{,}8)^2+(17{,}4-17{,}8)^2+(18{,}2-17{,}8)^2+(18{,}1-17{,}8)^2+(17{,}6-17{,}8)^2}{5}} = 0{,}328633...$$

cioè, considerando la significatività delle cifre, 0,3s. In questo caso il modo corretto di esprimere la misura è: $(17{,}8 \pm 0{,}3)$s.

Lo scarto quadratico medio di n dati x_i aventi media M è definito dall'espressione

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2}{n}}$$

Nella valutazione di una misura si deve quindi, in generale, procedere in questo modo.

- Se viene eseguita una sola misurazione, ad essa viene attribuito come errore l'errore di sensibilità dello strumento, cioè la semiampiezza del più piccolo intervallo apprezzabile con quello strumento.
- Se vengono eseguite più misure, si assume come misura più probabile la media aritmetica M dei valori rilevati x_i :

$$M = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

e come errore la semidispersione oppure lo scarto quadratico medio dei valori rilevati.

L'errore che esprime l'incertezza della misura prende il nome di **errore assoluto** e si indica con il simbolo e_a; si tratta di una grandezza omogenea con quella misurata, che si esprime quindi nella stessa unità di misura.

La precisione di una misura

Supponiamo di aver misurato due lunghezze e di avere ottenuto i seguenti valori:

$$(152{,}8 \pm 0{,}6)\text{m} \qquad (1415 \pm 3)\text{m}$$

La prima misura è affetta da un errore di 0,6m mentre nella seconda l'errore è di 3m. Ma quale delle due misure è la più precisa?
Per rispondere a questa domanda dobbiamo considerare che l'errore di 0,6m viene fatto su una lunghezza di poco più di 152m, mentre quello di 3m, che è cinque volte maggiore del primo, viene fatto su una grandezza assai più lunga. La precisione di una misura si deve riferire quindi al rapporto tra l'errore rilevato e la misura stessa; nel nostro caso:

$$\frac{0{,}6}{152{,}8} = 0{,}0039267... \qquad \frac{3}{1415} = 0{,}0021201....$$

Dobbiamo concludere che la seconda misura, pur avendo un errore assoluto maggiore, è più precisa della prima.

La precisione di una misura è legata all'*errore relativo* della misura che definiamo in questo modo.

Errore relativo di una misura è il rapporto tra l'errore assoluto e la misura stessa:

$$e_r = \frac{e_a}{M}$$

L'errore relativo è un numero adimensionale che si esprime di solito in forma percentuale.
Per esempio, gli errori relativi delle due precedenti misure sono pari allo 0,39% e allo 0,21%.

5.2 La propagazione degli errori

Non tutte le misure possono essere eseguite direttamente:

- nella valutazione del perimetro di un terreno si misura ogni lato e poi si sommano le misure ottenute
- nella valutazione di un'area, supponiamo di forma rettangolare, normalmente si misurano le lunghezze dei due lati e poi si moltiplicano tra loro
- nella valutazione di una velocità si misurano lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo e poi si esegue una divisione.

Quando si eseguono delle operazioni di calcolo tra numeri che rappresentano misure, gli errori si propagano ed è necessario valutare l'errore del risultato; le regole sono le seguenti.

Se indichiamo con M_1 e M_2 le misure di due grandezze omogenee, e_{a1} ed e_{a2} i rispettivi errori assoluti, e_{r1} ed e_{r2} i rispettivi errori relativi allora, indicato con M il risultato dell'operazione, con e_a il corrispondente errore assoluto e con e_r quello relativo, si ha che:

- **errore sulla somma e sulla differenza**

  $M = M_1 + M_2 \qquad e_a = e_{a1} + e_{a2}$

  $M = M_1 - M_2 \qquad e_a = e_{a1} + e_{a2}$

  In pratica, l'errore assoluto sulla somma e sulla differenza è uguale alla somma degli errori assoluti delle singole misure.

- **errore sul prodotto e sul quoziente**

  $M = M_1 \cdot M_2 \qquad e_r = e_{r1} + e_{r2}$

  $M = \dfrac{M_1}{M_2} \qquad e_r = e_{r1} + e_{r2}$

  In pratica, l'errore relativo sul prodotto e sul quoziente è uguale alla somma degli errori relativi delle singole misure.

In una somma o differenza si sommano gli errori assoluti.
In un prodotto o quoziente si sommano gli errori relativi.

Vediamo alcuni esempi di applicazione di queste regole.

ESEMPI

1. Misurando i lati di una lamina rettangolare si sono ottenuti i seguenti valori:

$\ell_1 = (15{,}32 \pm 0{,}12)\text{cm} \qquad \ell_2 = (8{,}74 \pm 0{,}15)\text{cm}$

Calcoliamo il perimetro e l'area della lamina con i corrispondenti errori assoluti e relativi.

L'errore relativo sulla prima misura è: $e_{a1} = \dfrac{0{,}12}{15{,}32} = 0{,}0078$ in forma percentuale 0,78%

L'errore relativo sulla seconda misura è: $e_{a1} = \dfrac{0{,}15}{8{,}74} = 0{,}0172$ in forma percentuale 1,72%

Valutiamo il perimetro.

Somma dei lati: $2p = 15,32 + 15,32 + 8,74 + 8,74 = 48,12\text{cm}$

L'errore assoluto sul perimetro si calcola sommando gli errori assoluti:

$e_a = 0,12 + 0,12 + 0,15 + 0,15 = 0,54$

L'errore relativo sul perimetro è: $e_r = \dfrac{0,54}{48,12} = 0,0112$ in forma percentuale 1,12%

La misura del perimetro, corredata dall'errore è quindi: $(48,12 \pm 0,54)\text{cm}$

Valutiamo l'area.

Prodotto dei lati: $\text{area} = 15,32 \cdot 8,74 = 133,9\text{cm}^2$

L'errore relativo sull'area si calcola sommando gli errori relativi:

$e_r = 0,0078 + 0,0172 = 0,025 \quad \rightarrow \quad 2,5\%$

L'errore assoluto sull'area si ottiene moltiplicando l'errore relativo per la misura dell'area ed è:

$e_a = 133,9 \cdot 0,025 = 3,35\text{cm}^2$

La misura dell'area, corredata dall'errore, è quindi: $(133,9 \pm 3,35)\text{cm}^2$

2. La densità di una sostanza viene definita mediante il rapporto tra la sua massa e il suo volume; se una massa di $(5,2 \pm 0,3)$kg di un gas occupa un volume di $(1,8 \pm 0,1)\text{dm}^3$, qual è la sua densità?

La densità si esprime normalmente in kg/m^3 oppure in g/dm^3; scegliamo la seconda modalità e trasformiamo prima la massa in grammi:

$$5,2\text{kg} = 5200\text{g}$$

La densità del gas è quindi: $\dfrac{5200}{1,8} = 2,9 \cdot 10^3\text{g/dm}^3$

Valutiamo l'errore:

- errore relativo sulla massa: $\dfrac{0,3}{5,2} = 0,05769$
- errore relativo sul volume: $\dfrac{0,1}{1,8} = 0,05556$
- errore relativo sulla densità: $e_r = 0,05769 + 0,05556 = 0,11325$

L'errore assoluto è quindi uguale a: $2,9 \cdot 10^3 \cdot 0,11325 = 0,3 \cdot 10^3\text{g/dm}^3$

Il modo corretto di esprimere la misura della densità è quindi: $(2,9 \pm 0,3) \cdot 10^3\text{g/dm}^3$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La misura di una massa viene fatta con una bilancia che è sensibile al grammo; l'errore di sensibilità è uguale a:

a. 1g **b.** 0,5g **c.** 0,2g **d.** le informazioni sono insufficienti

2. Gli errori assoluti di due misure di lunghezza sono rispettivamente di 0,2cm e 0,3cm; si può dire che:

a. l'errore assoluto sulla somma delle due lunghezze è pari a 0,5cm V F

b. l'errore relativo sulla somma è del 5% V F

c. l'errore assoluto sul prodotto è pari a $0,2 \cdot 0,3 = 0,6$ V F

d. le informazioni date sono insufficienti per calcolare qualunque errore relativo. V F

I concetti e le regole

I luoghi di punti

Un luogo di punti è l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una medesima proprietà. Fissato un opportuno sistema di riferimento, ad ogni luogo geometrico si può associare un'equazione che si ottiene applicando la proprietà del luogo stesso.

L'equazione parametrica di una curva

L'equazione di una curva è in forma parametrica se è data nella forma

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

dove le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ esprimono le coordinate di un suo punto P in funzione del parametro t.

La superficie sferica

La superficie sferica di centro $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e raggio r ha equazione: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$
Viceversa, ogni equazione di secondo grado della forma

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

rappresenta una sfera di centro $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ e raggio $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$ se e solo se $a^2+b^2+c^2-4d \geq 0$.
La condizione di tangenza tra un piano e una sfera è che la distanza del centro della sfera dal piano sia uguale al raggio.

Gli errori e la loro propagazione

Ad ogni misura è sempre associato un errore che esprime l'incertezza della misura stessa e che prende il nome di **errore assoluto**. L'errore assoluto e_a si valuta:

- mediante l'incertezza dello strumento di misura se viene eseguita una sola misura
- mediante la semidispersione oppure lo scarto quadratico medio se vengono eseguite più misure della stessa grandezza.

Ad ogni errore assoluto corrisponde un **errore relativo** che viene definito come il rapporto tra l'errore assoluto e il valore M della misura: $e_r = \frac{e_a}{M}$.

Eseguendo le operazioni fondamentali sulle misure di due o più grandezze gli errori si propagano secondo le seguenti regole:

- nell'esecuzione di addizioni e sottrazioni si sommano gli errori assoluti
- nell'esecuzione di prodotti o quozienti si sommano gli errori relativi.

Luoghi, sistemi di riferimento e curve

I LUOGHI DI PUNTI E IL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO

Comprensione

1 Un luogo di punti è:
a. un insieme di punti che hanno una determinata proprietà
b. l'insieme di tutti i punti che hanno una determinata proprietà
c. l'insieme di tutti e soli i punti che hanno una determinata proprietà.

2 Sono luoghi di punti:
a. una parabola
b. l'asse di un segmento
c. un arco di iperbole
d. un segmento perpendicolare a un altro segmento condotto per il suo punto medio.

3 Il luogo dei punti del piano che sono equidistanti da una retta data è:
a. una retta parallela a quella data
b. una retta perpendicolare a quella data
c. una parabola
d. una circonferenza.

4 Il luogo dei vertici di un triangolo avente per base un segmento AB e area assegnata è:
a. un segmento congruente e parallelo ad AB
b. una retta parallela ad AB
c. una circonferenza avente centro nel punto medio di AB
d. una parabola avente per asse la retta AB.

Applicazione

Applicando la definizione di luogo, trova l'equazione dei luoghi indicati in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dalle rette $r: y = \frac{1}{2}x - 2$ e $s: y = 3x + 1$.

Sia $P(x, y)$ il punto che descrive il luogo; la proprietà espressa dal luogo è che P deve avere la stessa distanza dalla retta r e dalla retta s.
Per applicare la formula della distanza scriviamo innanzi tutto l'equazione delle due rette in forma implicita:

$$r: \quad x - 2y - 4 = 0 \qquad\qquad s: \quad 3x - y + 1 = 0$$

Calcoliamo le due distanze e imponiamo che siano uguali:

$$\frac{|x-2y-4|}{\sqrt{5}}=\frac{|3x-y+1|}{\sqrt{10}}$$

Otteniamo così le due rette:

$\sqrt{2}(x-2y-4)=3x-y+1 \quad \rightarrow \quad x\left(\sqrt{2}-3\right)+y\left(1-2\sqrt{2}\right)-4\sqrt{2}-1=0$

$\sqrt{2}(x-2y-4)=-(3x-y+1) \quad \rightarrow \quad x\left(\sqrt{2}+3\right)+y\left(-2\sqrt{2}-1\right)-4\sqrt{2}+1=0$

Si tratta delle due bisettrici degli angoli formati dalle rette date.

6 Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dalle rette $x-2y+3=0$ e $2x+y=0$. $[x+3y-3=0,\ 3x-y+3=0]$

7 Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dagli estremi del segmento AB essendo $A(4,\ 3)$ e $B(-2,\ 1)$. $[3x+y-5=0]$

8 Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dagli estremi del segmento AB essendo $A\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$ e $B\left(3,\ -\frac{3}{2}\right)$. $[3x-5y-8=0]$

9 Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dalle due rette parallele $r: x-2y=0$ e $2x-4y+1=0$. $[4x-8y+1=0]$

10 Dati i punti $A(1,\ 3)$ e $B(4,\ -1)$, scrivi l'equazione del luogo dei punti P per i quali il rapporto delle distanze dai punti A e B è uguale a 1. $[6x-8y-7=0]$

11 Dato il punto $A(2,\ 1)$ e la retta r di equazione $x=3$, scrivi l'equazione del luogo dei punti P del piano per i quali è uguale a 2 il rapporto $\frac{PH}{PA}$, essendo H la proiezione di P sulla retta r. $[3x^2+4y^2-8y-10x+11=0]$

12 Date le rette r e s rispettivamente di equazioni $x=3$ e $y=x$, scrivi l'equazione del luogo dei punti P del piano per i quali è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ il rapporto $\frac{PH}{PK}$, essendo PH la distanza di P da r e PK la distanza di P da s. $[3x-y-6=0,\ x+y-6=0]$

EQUAZIONI PARAMETRICHE E CURVE IN CINEMATICA

RICORDA

- L'equazione parametrica di una retta che passa per due punti assegnati è $\begin{cases} x=\ell t+x_1 \\ y=pt+y_1 \end{cases}$

  dove ℓ rappresenta la differenza x_2-x_1 fra le ascisse dei due punti e p la differenza y_2-y_1 fra le ordinate.

- L'equazione parametrica di una circonferenza di centro $(a,\ b)$ e raggio r è $\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t \end{cases}$

- L'equazione parametrica di una parabola con asse parallelo all'asse y è $\begin{cases} x=t \\ y=at^2+bt+c \end{cases}$

■ L'equazione parametrica di un'ellisse di semiassi a e b è $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$

■ L'equazione parametrica di un'iperbole di semiassi a e b è $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}$

Applicazione

13 Costruisci per punti le curve che hanno le seguenti equazioni parametriche e riconoscine il tipo

a. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2t^3 - t^2 \\ y = t^3 - t + 1 \end{cases}$

14 Scrivi l'equazione cartesiana delle rette di equazioni parametriche

a. $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t - 2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{4}{3} \end{cases}$ $[3x - 2y - 1 = 0;\ 2x - 3y + 4 = 0]$

15 Scrivi una possibile equazione parametrica della retta $x + y - 2 = 0$. $\left[\begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \end{cases}\right]$

16 Scrivi un'equazione parametrica della retta che passa per i punti $A(1, -3)$ e $B(2, 5)$. $\left[\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 8t - 3 \end{cases}\right]$

17 Trova le coordinate del punto di intersezione della retta di equazione cartesiana $2x - 3y = 5$ con la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$. $\left[\left(\dfrac{25}{7}, \dfrac{5}{7}\right)\right]$

18 Scrivi l'equazione parametrica della retta che passa per $A(0, 1)$ ed è parallela a quella di equazione cartesiana $y = 3x - 5$.
(Suggerimento: ricorda che $m = \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{p}{\ell}$) $\left[\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 \end{cases}\right]$

19 Scrivi l'equazione parametrica della retta che passa per $A(2, 7)$ ed è perpendicolare alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. $\left[\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 7 \end{cases}\right]$

20 Trova le coordinate dei punti di intersezione fra la circonferenza avente centro nell'origine e raggio 2 e la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2(t - 1) \end{cases}$. $[(2, 0);\ (0, -2)]$

21 Data la curva di equazione parametrica $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$, riconoscine il tipo e scrivi la sua equazione in coordinate cartesiane. $\left[\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right]$

22 Data la curva di equazione parametrica $\begin{cases} x = \dfrac{5}{\cos t} \\ y = 3 \tan t \end{cases}$, riconoscine il tipo e scrivi la sua equazione in coordinate cartesiane. $\left[\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1\right]$

23 Scrivi l'equazione parametrica dell'ellisse con centro nell'origine di semiassi $a = 6$ e $b = 4$. $\left[\begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}\right]$

24 Scrivi l'equazione parametrica della circonferenza avente centro nell'origine e raggio 6. Successivamente trova le coordinate dei punti di intersezione con la retta $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$. $\left[\left(\pm 3,\ \pm 3\sqrt{3}\right)\right]$

25 Scrivi l'equazione parametrica della circonferenza avente centro nel punto $C(1,\ 4)$ e raggio 5. Trova poi la lunghezza della corda intercettata sull'asse delle ascisse. $\left[\begin{cases} x = 1 + 5\cos t \\ y = 4 + 5\sin t \end{cases};\ 6\right]$

26 Scrivi l'equazione parametrica dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che ha vertice in $V\left(\sqrt{6},\ \sqrt{6}\right)$. $\left[\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{6}{t} \end{cases}\right]$

Le seguenti equazioni parametriche rappresentano il moto di un punto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale; trova l'equazione cartesiana della traiettoria descritta.

27 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{2t - 1}{t - 5} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{t}{t - 1} \end{cases}$ $\qquad$ $\left[y = \dfrac{2x - 3}{x - 6},\ x \geq 1\ \wedge\ x \neq 6;\ y = \dfrac{x - 1}{x - 2},\ x \geq 1\ \wedge\ x \neq 2\right]$

28 $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \dfrac{4}{7}t \\ y = \dfrac{7}{t} \end{cases}$ $\qquad$ $[y = x^2 - 6x + 8,\ x \geq 3;\ xy = 4,\ x > 0]$

29 $\begin{cases} x = \dfrac{2(1 - t^2)}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1 + t^2} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \dfrac{1 - t}{1 + t} \\ y = \dfrac{2t}{t + 1} \end{cases}$ $\qquad$ $\left[y = \dfrac{2 - x}{4},\ -2 < x \leq 2;\ y = 1 - x,\ -1 < x \leq 1\right]$

30 $\begin{cases} x = \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2} \\ y = \dfrac{4t^2}{1 - t^2} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ $\qquad$ $\left[y = 2x - 2,\ x < -1\ \vee\ x \geq 1;\ xy = \dfrac{1}{4},\ x > 0\right]$

31 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = 1 + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0\right]$

32 Scrivi l'equazione della traiettoria descritta dal punto P le cui coordinate in funzione del tempo t sono le seguenti $\left(\dfrac{1}{2}t;\ t^2 + 1\right)$. $[y = 4x^2 + 1,\ x \geq 0]$

33 Le equazioni $\begin{cases} x = 2\cos \omega t \\ y = 2\sin \omega t \end{cases}$, al variare del tempo t, rappresentano la posizione di un punto P che si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare ω. Scrivi l'equazione della traiettoria. $[x^2 + y^2 = 4]$

LA SUPERFICIE SFERICA

RICORDA

- L'equazione della superficie sferica di centro $C(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ e raggio r è: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$.
- Un'equazione della forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ rappresenta una superficie sferica di centro $C\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{b}{2},\ -\dfrac{c}{2}\right)$ e raggio $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$ se e solo se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$.

Comprensione

34 Tra le seguenti equazioni:

① $x^2 + y^2 + z^2 + xy + 3z + 1 = 0$ ② $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y + 5z - 1 = 0$

③ $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + z + 10 = 0$ ④ $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3yz + 1 = 0$

rappresentano delle superfici sferiche:

a. tutte **b.** solo la ② c. la ③ e la ④ **d.** nessuna

35 La superficie sferica che ha centro in $C(1, -3, 2)$ e raggio $r = 2$ ha equazione:

a. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 24y - 16z + 55 = 0$

b. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6y - 2x - 2z + 5 = 0$

c. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z = 1$

d. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z = -10$

36 Quale dei seguenti piani è tangente alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y = 0$?

a. $x + y - 1 = 0$ **b.** $x - y + 2z = 0$ **c.** $x - y = 0$ **d.** $-3x + y + 5z + 1 = 0$

Applicazione

Fra le seguenti equazioni riconosci quali rappresentano delle superfici sferiche reali e di queste individua centro e raggio.

37 $x^2 + z^2 = 25 - y^2$ [$C(0, 0, 0)$, $r = 5$]

38 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 13 = 0$ [$C(2, -1, 3)$, $r = 1$]

39 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 13 = 0$ [non è una superficie sferica]

40 $(x - 1)^2 + z^2 = 25 - (y + 3)^2$ [$C(1, -3, 0)$, $r = 5$]

41 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 1 = 0$ $\left[C\left(1, -\frac{3}{2}, 0\right); r = \frac{1}{2}\sqrt{17}\right]$

42 $x^2 + y^2 + z^2 + 16 = 0$ [non è una superficie sferica]

43 Determina l'equazione della superficie sferica con centro nell'origine e raggio 3. [$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$]

44 Scrivi l'equazione della sfera che ha centro nel punto $C(1, 3, -1)$ e passa per $A(-2, 0, 1)$.
[$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z - 11 = 0$]

45 Stabilisci la posizione del punto $P(1, 0, -2)$ rispetto alle sfere S di equazioni:

a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$

b. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 4 = 0$

c. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 6 = 0$ [**a**. interno; **b**. interno; **c**. $P \in S$]

46 È data la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3 = 0$; determina l'equazione della superficie sferica ad essa concentrica avente raggio $r = 4$. [$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z + 1 = 0$]

47 Scrivi l'equazione della superficie sferica sapendo che un diametro ha come estremi i punti $A(2, 0, -1)$, $B(0, 4, 3)$. [$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z - 3 = 0$]

48 Scrivi l'equazione della superficie sferica che ha centro sul piano xy e passa per i punti $A(2, 1, -4)$, $B(2, -3, -1)$, $C(1, 1, 2)$. [$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 60x - 7y + 43 = 0$]

49 Determina l'equazione della superficie sferica con centro nel punto di intersezione tra la retta di equazione $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ ed il piano $x + y + z = 0$, e raggio 4. $[x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8y + 16 = 0]$

50 Determina l'equazione della sfera passante per i punti $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$. $[x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0]$

51 Scrivi l'equazione della sfera che passa per i punti $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(1, 1, -1)$ e $D(2, 1, 0)$. $[6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + x - 14y - 13z - 18 = 0]$

52 Scrivi l'equazione della sfera che passa per i punti $A(1, -2, -2)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 0, 4)$ e $D\left(3, \frac{1}{2}, 1\right)$. [impossibile]

53 **ESERCIZIO GUIDA**

Scrivi l'equazione del piano tangente alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + x^2 = 14$ nel suo punto $P(-1, 2, 3)$.

La sfera ha centro nell'origine O e raggio $\sqrt{14}$.

Il piano tangente è perpendicolare in P alla retta PO, quindi .... $[x - 2y - 3z + 14 = 0]$

54 Determina il valore del parametro reale k in modo che il piano $x - 3y + z + k = 0$ sia tangente alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$. $[-2 \pm 2\sqrt{11}]$

55 Scrivi l'equazione della sfera che ha centro nel punto $P(0, 0, 1)$ ed è tangente al piano $\alpha : 2x - 3y + z - 5 = 0$. $\left[x^2 + y^2 + z^2 - 2z - \frac{1}{7} = 0\right]$

56 Scrivi l'equazione della sfera che è tangente ai piani coordinati e passa per il punto $A(2, -2, 8)$. $[x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 12y - 12z + 72 = 0]$

57 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le coordinate degli eventuali punti di intersezione tra la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0$ e la retta $x = -y = z$. Troviamo poi le equazioni dei piani tangenti alla sfera in tali punti.

I punti richiesti sono le soluzioni del sistema fra l'equazione della sfera e quella della retta che conviene scrivere come intersezione dei piani $x = -y$ e $y = -z$.

Si ha così il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0 \\ x = -y \\ y = -z \end{cases}$

dalla risoluzione del quale si ottengono i punti $A(1, -1, 1)$ e $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Trova adesso le equazioni dei piani tangenti. $[y - z + 2 = 0;\ 4x - y + z + 2 = 0]$

58 Determina l'equazione dei piani tangenti alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ e paralleli al piano di equazione $x - 2y + z - 1 = 0$. $[x + 2y + z - 1 \pm \sqrt{6} = 0]$

59 Scrivi l'equazione della sfera che passa per i punti $A(0, 1, 2)$ e $B(2, 1, 1)$ ed è tangente nel punto $C(0, 1, 1)$ alla retta $\begin{cases} 3y + z - 4 = 0 \\ 3x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$. $[x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 3z - 1 = 0]$

LE EQUAZIONI DI ALCUNE SUPERFICI NOTEVOLI

Applicazione

Superficie cilindrica

Individua le caratteristiche delle seguenti superfici.

60 $x^2 + z^2 = 9$ [generatrici parallele all'asse y; curva direttrice: nel piano xz, circonferenza con centro in $O(0, 0)$ e raggio 3]

61 $x = z^2 - 9$ [generatrici parallele all'asse y; curva direttrice: nel piano xz, parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse x e vertice in $V(-9, 0)$]

62 $y - 4(x-1)^2 = 0$ [generatrici parallele all'asse z; curva direttrice: nel piano xy, parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice in $V(1, 0)$]

63 $y^2 = -z^2$ [asse x]

64 $16x^2 + 9z^2 = 144$
[generatrici parallele all'asse y; curva direttrice: nel piano xz, ellisse con centro di simmetria in $O(0, 0)$, assi coincidenti con gli assi coordinati del piano xz, semiassi 3 e 4, fuochi sull'asse z]

65 $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ [generatrici parallele all'asse z; curva direttrice: nel piano xy, circonferenza con centro in $C(-1, -1)$ e raggio $\sqrt{2}$]

66 Scrivi l'equazione della superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse x e avente come curva direttrice sul piano yz la circonferenza con centro nell'origine e raggio 4. $[y^2 + z^2 - 16 = 0]$

67 Scrivi l'equazione della superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse z e avente come curva direttrice, sul piano xy, l'ellisse con assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani del piano indicato, semiassi uguali a 2 e 3 e fuochi sull'asse x. $[4x^2 + 9y^2 - 36 = 0]$

68 Scrivi l'equazione della sfera che ha centro nel punto di coordinate $(2, 1, 0)$ e raggio $r = 2$. Verificato che il punto $P\left(1, 0, \sqrt{2}\right)$ appartiene alla superficie, determina il piano ad essa tangente in P.
$\left[x + y - \sqrt{2}z + 1 = 0\right]$

Superficie conica

Individua le coordinate del vertice, l'asse di rotazione e l'angolo di semiapertura delle seguenti superfici coniche.

69 $3x^2 + 3y^2 = z^2$ $\left[V(0, 0, 0), \text{ asse } z, \alpha = \frac{\pi}{6}\right]$

70 $y^2 + z^2 - x^2 = 0$ $\left[V(0, 0, 0), \text{ asse } x, \alpha = \frac{\pi}{4}\right]$

71 $(x-1)^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ $\left[V(1, 0, 0), \text{ asse } z, \alpha = \frac{\pi}{3}\right]$

72 $x^2 + z^2 + 4z = y^2 - 4$ $\left[V(0, 0, -2), \text{ asse } y, \alpha = \frac{\pi}{4}\right]$

73 Determina l'equazione della superficie conica con vertice nell'origine del riferimento cartesiano, asse coincidente con l'asse x ed angolo di semiapertura $\alpha = \frac{\pi}{6}$. $[x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0]$

74 Determina l'equazione della superficie conica con vertice nell'origine del riferimento cartesiano, asse coincidente con l'asse y e passante per il punto $Q(1, 1, 1)$. $[x^2 + z^2 = 2y^2]$

Superfici di rotazione

Individua le caratteristiche delle seguenti superfici.

75 $\frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ [ellissoide rotondo di semiassi 2, 2, 3]

76 $\frac{x^2 + y^2}{25} - z^2 = 1$ [iperboloide rotondo a una falda di semiassi 5, 5, 1]

77 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2 + z^2}{10} = 1$ [iperboloide rotondo a due falde, semiassi $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$]

78 $z = 3x^2 + 3y^2$ [paraboloide rotondo]

MISURE ED ERRORI

RICORDA

- Se di una grandezza viene eseguita una sola misurazione, ad essa viene attribuito come errore assoluto l'errore di sensibilità dello strumento, cioè la semiampiezza del più piccolo intervallo apprezzabile con quello strumento.
- Se di una grandezza vengono eseguite più misure, si assume come misura più probabile la media aritmetica M dei valori rilevati x_i:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

L'errore assoluto si può valutare considerando:

- la semidispersione, cioè la semidifferenza tra il valore massimo e il valore minimo rilevati: $e_a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$
- lo scarto quadratico medio dei valori x_i: $e_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2}{n}}$.

L'**errore relativo** di una misura è il rapporto tra l'errore assoluto e la misura stessa: $e_r = \frac{e_a}{M}$.

- Nelle operazioni che si eseguono tra due misure gli errori si propagano con le seguenti regole:
  - **errore sulla somma e sulla differenza**

    $M = M_1 + M_2 \qquad e_a = e_{a1} + e_{a2}$

    $M = M_1 - M_2 \qquad e_a = e_{a1} + e_{a2}$
  - **errore sul prodotto e sul quoziente**

    $M = M_1 \cdot M_2 \qquad e_r = e_{r1} + e_{r2}$

    $M = \frac{M_1}{M_2} \qquad e_r = e_{r1} + e_{r2}$

Comprensione

79 In una serie di misure ripetute, il valore più probabile della misura è:

a. il valore che si ripete con maggiore frequenza
b. il più grande tra i valori trovati
c. la media tra il valore più grande e quello più piccolo
d. la media tra tutti i valori rilevati.

80 L'errore assoluto di una misura:

a. è una grandezza alla quale si attribuisce la stessa unità di misura della grandezza misurata V F
b. è un numero adimensionale V F
c. esprime l'incertezza della misura V F
d. indica che si è usato lo strumento di misura in modo sbagliato. V F

81 Per esprimere l'errore assoluto di una misura si può valutare:

a. l'errore di sensibilità dello strumento se si esegue una sola misurazione V F
b. la semidispersione se si eseguono più misurazioni V F
c. lo scarto quadratico medio se si eseguono più misurazioni V F
d. l'errore di sensibilità dello strumento in ogni situazione. V F

82 Nella misura (73 ± 1)m l'incertezza è:

a. 1m **b.** 2m **c.** 0,5m **d.** l'intervallo tra 72 e 73 metri

83 Se M rappresenta il valore probabile della misura e e_a rappresenta l'errore assoluto, l'errore relativo si esprime mediante:

a. il prodotto $M \cdot e_a$ **b.** il rapporto $\frac{M}{e_a}$ **c.** il rapporto $\frac{e_a}{M}$ **d.** la somma $M + e_a$

84 Barra Vero o Falso.

a. L'errore relativo di una somma si determina sommando gli errori relativi delle due misure. V F
b. L'errore assoluto di una differenza si determina facendo la differenza tra gli errori assoluti delle due misure. V F
c. L'errore relativo di un quoziente si calcola sommando gli errori relativi delle due misure. V F
d. L'errore assoluto di un prodotto si calcola moltiplicando gli errori relativi delle due misure. V F

Applicazione

85 Cinque studenti misurano indipendentemente con lo stesso righello una barra di acciaio ottenendo le seguenti misure, tutte espresse in centimetri:

12,6 12,8 12,5 12,7 12,4

Trova il valore più probabile della misura, l'errore assoluto utilizzando la semidispersione e l'errore relativo.
[$M = 12{,}6$cm; $e_a = 0{,}2$m; $e_r = 1{,}6\%$]

86 In un esperimento di laboratorio si misura per dieci volte la massa di un oggetto con una bilancia sensibile al decimo di grammo ottenendo i seguenti risultati:

15,4 15,8 14,9 14,8 15,2 15,0 15,3 15,1 14,7 14,9

Trova il valore più probabile della misura, l'errore assoluto e l'errore relativo.
[$M = 15{,}1$; $e_a = 0{,}6$; $e_r = 0{,}0397$]

87 Misurando più volte la temperatura di una soluzione chimica stabile si ottengono i seguenti valori:

14,0° 13,8° 14,3° 14,2° 13,8° 14,0° 14,4° 13,6° 13,9° 14,3°

Trova il valore più probabile della misura, l'errore assoluto, l'errore relativo e scrivi in modo corretto la misura. [$M = 14{,}0°$; $e_a = 0{,}4$; $e_r = 0{,}0286$; $14{,}0° \pm 0{,}4°$]

88 Misurando lo spessore di una lamina con uno strumento avente la sensibilità di un centesimo di millimetro, si sono ottenuti i seguenti valori espressi in millimetri:

3,21 3,22 3,16 3,18 3,22 3,19 3,18 3,25 3,20 3,22

Calcola il valore probabile della misura ed esprimi l'errore assoluto mediante lo scarto quadratico medio. [$M = 3{,}20$mm; $e_a = 0{,}02$mm]

89 Indica quale tra le seguenti misure è la più precisa:

a. $(12{,}8 \pm 0{,}1)$m **b.** (48 ± 6)mm **c.** (50 ± 1)kg **d.** $(140{,}0 \pm 0{,}7)$s [**d.**]

90 Misurando le dimensioni di un tavolino si ottengono i seguenti valori:

$(50{,}0 \pm 0{,}1)$cm $(70{,}0 \pm 0{,}1)$cm

Calcola la misura dell'area del tavolo esprimendola con il corrispondente errore. [$(3500 \pm 12)\text{cm}^2$]

91 Un oggetto ha una massa di (1900 ± 5)g ed il suo volume è di $(760 \pm 10)\text{cm}^3$. Calcola la densità dell'oggetto (la densità è il rapporto tra la massa e il volume). [$(2{,}50 \pm 0{,}04)\text{g/cm}^3$]

92 Se $a = (78{,}3 \pm 0{,}1)$cm e $b = (8{,}9 \pm 0{,}1)$cm, calcola i risultati delle seguenti operazioni corredandole dell'errore:

a. $a + b$ **b.** $a - b$ **c.** $a \cdot b$ **d.** $\frac{a}{b}$

[**a.** $(87{,}2 \pm 0{,}2)$cm; **b.** $(69{,}4 \pm 0{,}2)$cm; **c.** $(697 \pm 9)\text{cm}^2$; **d.** $(8{,}8 \pm 0{,}1)$]

93 In un cilindro il raggio di base r misura $(2{,}0 \pm 0{,}1)$m e l'altezza h misura $(45{,}25 \pm 0{,}05)$cm: calcola il volume con la corrispondente incertezza. [$(5{,}7 \pm 0{,}6)\text{m}^3$]

94 Un campione di liquido di massa $m = (131 \pm 2)$g occupa un volume di $(0{,}163 \pm 0{,}003)\text{dm}^3$. Quanto vale la densità del materiale espressa in kg/m^3? [$8{,}0 \cdot 10^2 \pm 0{,}3 \cdot 10^2$]

95 L'area di un pavimento rettangolare viene coperta con 42 mattonelle identiche di area 4cm^2 con errore relativo del 4%. Calcola la superficie del pavimento corredandola del suo errore assoluto. [$(1{,}68 \cdot 10^2 \pm 0{,}07 \cdot 10^2)\text{cm}^2$]

96 Per realizzare un mosaico avente la superficie di $0{,}8\text{m}^2$ si usano piccole piastrelle quadrate di lato $(1{,}5 \pm 0{,}2)$cm. Qual è il numero minimo e il numero massimo di piastrelle che sono necessarie per realizzare il mosaico considerando l'incertezza della misura di ciascuna piastrella? [2768; 4734]

97 Si sono misurate le lunghezze dei due lati di un rettangolo: $(2{,}12 \pm 0{,}08)$m e $(4{,}15 \pm 0{,}08)$m. Calcola esprimendo il risultato con il corretto numero di cifre significative e con il corrispondente errore:

a. il perimetro del rettangolo

b. la sua area. [$2p = (12{,}54 \pm 0{,}32)$m; area $= (8{,}80 \pm 0{,}50)\text{m}^2$]

Per la verifica delle competenze

1 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono date le rette di equazioni $y = 2$ e $y = x$; scrivi l'equazione del luogo dei punti P per i quali vale la relazione $\overline{PH}^2 + \overline{PK}^2 = 3$ essendo H e K le proiezioni di P sulle due rette. [$x^2 - 2xy + 3y^2 - 8y + 2 = 0$]

2 Sono date le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - x = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$; una retta passante per l'origine interseca la prima circonferenza in A e la seconda in B. Scrivi l'equazione del luogo descritto dal punto medio P del segmento AB. $[2x^2 + 2y^2 - 3x = 0]$

3 Sia $F(0, a)$ un punto fisso in un piano cartesiano; costruisci il luogo dei punti P per i quali il rapporto tra la distanza di P da F e dall'asse x è uguale a k, essendo k un numero reale. Verifica poi che l'equazione ottenuta rappresenta:

a. una circonferenza se $k = 0$
b. un'ellisse se $0 < k < 1$
c. una parabola se $k = 1$
d. un'iperbole se $k > 1$. $[x^2 + (1 - k^2)y^2 - 2ay + a^2 = 0]$

4 Dati i punti $A(1, 1, 3)$, $B(1, 1, -1)$ e il piano α di equazione $x + y + z - 1 = 0$, scrivi l'equazione del luogo dei punti P di α tali che le rette AP e BP siano perpendicolari.

$$\left[\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}\right]$$

5 Una sfera ha raggio $r = \sqrt{5}$ e taglia il piano $\alpha : 2x - y + 2z - 1 = 0$ lungo una circonferenza di centro $C(1, 3, 1)$ e raggio unitario. Scrivine l'equazione.
$[3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 14x - 14y - 14z + 34 = 0;\ 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - 22y + 2z + 26 = 0]$

6 Sono date le rette $r : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$. Scrivi l'equazione della sfera che ha il centro sulla r ed è tangente alla s nel punto $A(1, 1, 1)$. $[x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 16y - 32z + 27 = 0]$

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **c.**	**2** **a.**, **b.**	**3** **a.**	**4** **b.**
34 **b.**	**35** **d.**	**36** **c.**	**79** **d.**
80 **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** F	**81** **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** F	**82** **a.**	**83** **c.**
84 **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** F			

Test finale di autovalutazione

1 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale la retta r passa per l'origine e forma un angolo di $60°$ con l'asse x. Qual è il luogo geometrico dei punti P per i quali il rapporto delle distanze di P da r e dall'asse x è uguale a 2?

15 punti

2 Determina le coordinate del punto di intersezione delle rette le cui equazioni parametriche sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3s - 1 \\ y = 5 - 4s \end{cases}$$

12 punti

3 L'equazione parametrica $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ rappresenta:

a. l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

b. l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

c. l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

d. una curva diversa dalle precedenti.

10 punti

4 La curva di equazione $\rho = \frac{6}{3 - 5\cos\vartheta}$ rappresenta:

a. un'ellisse **b.** una parabola **c.** un'iperbole

6 punti

5 La sfera che ha come diametro il segmento OA essendo O l'origine degli assi e $A(2, -4, -2)$ ha equazione:

a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 1$

b. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$

c. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z = 0$

d. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z = 0$

8 punti

6 A quale dei seguenti piani è tangente la sfera di centro $C(1, 0, -2)$ e raggio unitario?

a. $x - y + z = 2$ **b.** $2x + y - z = 0$ **c.** $x - y - 2z = 1$ **d.** $2x + 2y + z = 3$

8 punti

7 Fra i piani che passano per la retta $s: \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z \end{cases}$, individua quelli tangenti alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$.

16 punti

8 Le dimensioni di un fermacarte a forma di parallelepipedo rettangolo vengono misurate con un errore del 9% e sono: 7,6cm 12,5cm 3,8cm. La sua massa è di $(0{,}45 \pm 0{,}02)$kg. Esprimi ciascuna misura con la sua incertezza e calcola la densità del fermacarte.

15 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
Punteggio									

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 Il luogo è formato dalle rette di equazioni $\sqrt{3}x - 5y = 0$ e $\sqrt{3}y - x = 0$.

2 $\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$

3 **a.**

4 **c.**

5 **b.**

6 **d.**

7 $x - z + 2 + \left(-3 \pm \sqrt{7}\right)(y - 3z) = 0$

8 $(7{,}6 \pm 0{,}7)$cm; $(12{,}5 \pm 1{,}1)$cm; $(3{,}8 \pm 0{,}3)$cm; densità $= (1{,}25 \pm 0{,}39)\,\mathrm{g/cm^3}$