LA GEOMETRIA NELLO SPAZIO

LE TRE DIMENSIONI

richiami della teoria

- La **geometria dello spazio** o **geometria dei solidi** è il settore della geometria che si occupa di corpi a tre dimensioni;
- una **retta è perpendicolare ad un piano** se lo interseca in un punto e se è perpendicolare ad ogni retta del piano passante per quel punto;
- la **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento perpendicolare condotto da quel punto al piano.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

1 Completa la seguente definizione:
la geometria dello spazio o geometria dei solidi o ancora geometria solida è il settore della geometria che si occupa dei corpi a ....

2 Gli elementi fondamentali della geometria solida sono ....

3 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:
a. per un punto passa un solo piano; V F
b. per una retta passano infiniti piani; V F
c. per un punto passano infiniti piani; V F
d. per una retta passa un solo piano. V F

4 Completa le seguenti definizioni:
a. due rette appartenenti allo stesso piano si dicono ....;
b. due rette non appartenenti allo stesso piano si dicono ....;
c. una retta è perpendicolare ad un piano se lo interseca in un .... e se è .... ad ogni retta del piano passante per quel punto; il punto di intersezione è detto .... della perpendicolare.

5 La distanza di un punto da un piano è:
a. la lunghezza di un segmento condotto da quel punto al piano;
b. la lunghezza del segmento perpendicolare condotto da quel punto al piano;
c. la lunghezza della retta perpendicolare condotta da quel punto al piano.

APPLICAZIONE

6 Considera due rette sghembe r ed s individuate dai segmenti AB e CD; traccia per il punto B la parallela t, individuata dal segmento BE, alla retta CD. Com'è il piano individuato dalle due rette incidenti rispetto alla retta s?

7 Una retta r è parallela ad un piano α; come deve essere una retta di α perché esista un piano passante per questa retta e per r? Quanti possono essere questi piani?

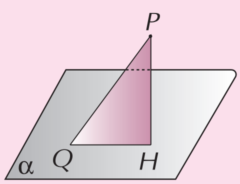
8 Se una retta r è perpendicolare ad un piano α, due piani β e γ, contenenti la retta r, come risultano rispetto al piano α?

9 Considera una retta r perpendicolare ad un piano α in un generico punto H. Siano P e Q due generici punti appartenenti rispettivamente alla retta r e al piano α. Di che natura è il triangolo PQH? Spiega il motivo della tua scelta.

10 Se una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto H e P è un generico punto di α, qual è la posizione reciproca tra la retta r e la retta passante per PH? Qual è invece la posizione reciproca tra la retta r e una generica retta del piano α passante per P ma non per H?

11 *Esercizio Svolto*

Calcola la distanza del punto P dal piano α sapendo che $\overline{PQ} = 205$ cm e $\overline{QH} = 123$ cm.



Dati	Incognita
$\overline{PQ} = 205$ cm $\overline{QH} = 123$ cm $PH \perp \alpha$	$\overline{PH}$

Applichiamo il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo PQH sapendo che il cateto PH corrisponde alla distanza del punto P dal piano α:

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{QH}^2} = \sqrt{205^2 - 123^2}\text{ cm} = \sqrt{42025 - 15129}\text{ cm} = \sqrt{26896}\text{ cm} = 164\text{ cm}$$

Utilizzando la figura dell'esercizio svolto precedente risolvi i seguenti problemi.

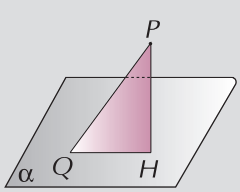
12 Calcola la misura del segmento PH sapendo che: $\overline{PQ} = 95$ cm; $\overline{QH} = 57$ cm; $PH \perp \alpha$. [76 cm]

13 Calcola la misura del segmento QH sapendo che: $\overline{PQ} = 155$ cm; $\overline{PH} = 124$ cm; $PH \perp \alpha$. [93 cm]

14 Calcola la misura del segmento QP sapendo che: $\overline{PH} = 208$ cm; $\overline{QP} = 156$ cm; $PH \perp \alpha$. [260 cm]

15 *Esercizio Guidato*

Calcola la distanza di un punto P dal piano α sapendo che $\overline{PQ} + \overline{QH} = 148$ cm e $\overline{PQ} - \overline{QH} = 37$ cm.



Dati	Incognita
$\overline{PQ} + \overline{QH} = 148$ cm $\overline{PQ} - \overline{QH} = 37$ cm	$\overline{PH}$

Determiniamo la misura di PQ e QP:

$$\overline{QH} = \left[\left(\overline{PQ} + \overline{QH}\right) - (\ldots\ldots - \ldots\ldots) : 2\right] = [(148 - 37) : 2]\text{ cm} = \ldots\ldots\text{ cm}$$

$$\overline{PQ} = \ldots\ldots + \left(\overline{PQ} - \overline{QH}\right) = (55{,}5 + \ldots\ldots)\text{ cm} = 92{,}5\text{ cm}$$

Applichiamo il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo .... per calcolare la misura del segmento PH:

$$\overline{PH} = \sqrt{\ldots\ldots - \ldots\ldots} = \sqrt{92{,}5^2 - \ldots\ldots}\text{ cm} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots - 3080{,}25}\text{ cm} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots}\text{ cm} = 74\text{ cm}.$$

Utilizzando la figura dell'esercizio guidato precedente risolvi i seguenti problemi.

16 Calcola la distanza del punto P dal piano α sapendo che $\overline{PQ} + \overline{QH} = 232$ cm e $\overline{PQ} - \overline{QH} = 58$ cm. [116 cm]

17 La distanza del punto P dal piano α misura 150 cm sapendo che $P\widehat{Q}H$ è ampio 30°, calcola la lunghezza di QH. [259,8 cm]

18 Calcola la distanza del punto P dal piano α sapendo che $\overline{QH} = 50$ cm e $P\widehat{Q}H$ è ampio 60°. [86,6 cm]

19 Una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto H. Determina l'ampiezza dell'angolo $P\widehat{Q}H$ con il punto Q appartenente al piano α, nei seguenti casi:

a. $PH = QH$; [45°]
b. $PQ = 2 \cdot QH$; [60°]
c. $PQ = 2 \cdot PH$. [30°]

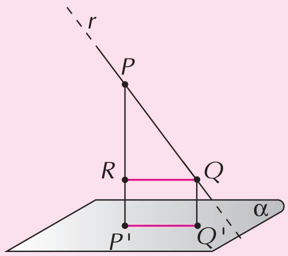
● **20** Da un punto P, non appartenente al piano α, traccia due segmenti congruenti che intersecano il piano α nei punti A e B allineati con il piede H della perpendicolare condotta da P su α. Sapendo che i segmenti PA e PB sono lunghi ciascuno 25 cm, e che il perimetro del triangolo PAB è 90 cm, calcola la distanza del punto P dal piano α. [15 cm]

● **21** Dopo aver disegnato due piani paralleli α e β, traccia in β una circonferenza di centro O e inscrivi in essa un quadrato $ABCD$. Proietta sul piano α il punto d'intersezione delle due diagonali del quadrato e chiama P questo punto. Sapendo che i segmenti PO e PD sono uno $\frac{4}{5}$ dell'altro e la somma delle loro misure è 135 cm, calcola il perimetro e l'area del quadrato. [254,5584 cm; 4050 cm²]
(Suggerimento: per il calcolo dell'area usa la formula $A = d^2 : 2$)

● **22** Disegna su un piano α un rombo $ABCD$ avente le diagonali AC e BD lunghe rispettivamente 18 cm e 32 cm. Dopo aver tracciato la retta perpendicolare al piano α passante per il punto d'intersezione H delle due diagonali, prendi un punto P tale che la sua distanza dal piano sia 12 cm. Calcola la distanza di P dai quattro vertici del rombo. $[\overline{PA} = \overline{PC} = 15 \text{ cm}; \overline{PB} = \overline{PD} = 20 \text{ cm}]$

23 *Esercizio Svolto*

I punti P e Q di una retta r incidente con un piano α distano dallo stesso piano rispettivamente 46 cm e 18 cm; sapendo che la loro distanza misura 35 cm, calcola la lunghezza della proiezione $P'Q'$ del segmento PQ sul piano α.



Dati	Incognita
$\overline{PP'} = 46$ cm $\overline{QQ'} = 18$ cm $\overline{PQ} = 35$ cm	$\overline{P'Q'}$

Dal punto Q tracciamo una parallela al segmento $P'Q'$; questa intersecherà il segmento PP' in un punto R. Il triangolo PRQ è rettangolo in R, pertanto:
$\overline{PR} = \overline{PP'} - \overline{QQ'} = (46 - 18)$ cm $= 28$ cm

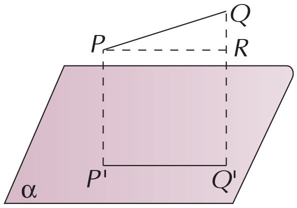
Applicando il teorema di Pitagora, otteniamo:

$$\overline{RQ} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{PR}^2} = \sqrt{35^2 - 28^2} \text{ cm} = \sqrt{1225 - 784} \text{ cm} = \sqrt{441} \text{ cm} = 21 \text{ cm}.$$

Essendo $\overline{P'Q'} = \overline{RQ}$ tale valore rappresenta la proiezione di PQ sul piano α.

Osserva le seguenti figure e, utilizzando i dati della tabella a lato, calcola i valori incogniti.

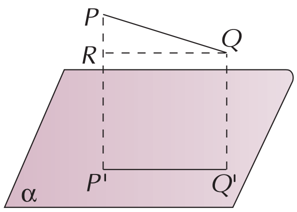
24



Dati	Incognita
$\overline{PQ} = 95$ cm $\overline{PP'} = 123$ cm $\overline{QQ'} = 180$ cm	$\overline{P'Q'}$

[76 cm]

25

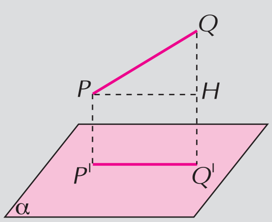


Dati	Incognita
$\overline{PQ} = 145$ cm $\overline{PP'} = 123$ cm $\overline{QQ'} = 106$ cm	$\overline{P'Q'}$

[144 cm]

26 *Esercizio Guidato*

Il segmento PQ è lungo 112,5 cm; calcola la misura della sua proiezione sul piano α sapendo che $\overline{QQ'} = 100$ cm e $\overline{HQ'} = 32{,}5$ cm.



Dati	Incognita
$\overline{PQ} = 112{,}5$ cm $\overline{QQ'} = 100$ cm $\overline{HQ'} = 32{,}5$ cm	$\overline{P'Q'}$

Calcoliamo la lunghezza del segmento QH: $\overline{QH} = \overline{QQ'} - \overline{HQ'} = (100 - 32{,}5)$ cm $= 67{,}5$ cm.

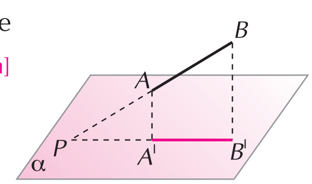
Determiniamo la misura di PH applicando il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo ....:

$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - ....} = \sqrt{112{,}5^2 - 67{,}5^2}$ cm $= \sqrt{.............. - 4556{,}25}$ cm $= \sqrt{........}$ cm $= 90$ cm

Come è facile capire $PH =$ .... pertanto: $\overline{P'Q'} = 90$ cm.

27 Utilizzando la figura dell'esercizio precedente calcola la misura del segmento PQ e della sua proiezione sul piano α sapendo che $\overline{QQ'} = 50$ cm; $\overline{PP'} = 20$ cm; $Q\widehat{P}H = 45°$. [42,42 cm; 30 cm]

28 Calcola la misura della proiezione del segmento AB su α sapendo che $\overline{BB'} = 42$ cm; $\overline{PB} = 70$ cm e $\overline{AA'} = 24$ cm. [24 cm]



I PIANI NELLO SPAZIO

richiami della teoria

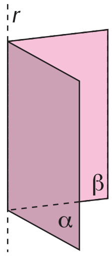
- Il **diedro** è ciascuna delle due parti in cui lo spazio rimane diviso da due semipiani aventi la stessa origine;
- la **sezione normale di un diedro** è l'angolo che si ottiene sezionando il diedro con un piano perpendicolare al suo spigolo;
- la **misura di un angolo diedro** è data dall'ampiezza della sua sezione normale;
- **due diedri consecutivi** hanno uno spigolo e una faccia in comune;
- **due diedri adiacenti** sono anche consecutivi e hanno le due facce non comuni in semipiani opposti;
- il **semipiano bisettore** è il semipiano che uscendo dallo spigolo del diedro lo divide in due diedri congruenti;
- **due piani perpendicolari** si intersecano formando quattro diedri congruenti;
- l'**angoloide** è la parte di spazio determinata da tre o più angoli aventi il vertice in comune e tutti a due a due consecutivi;
- la **somma degli angoli di vertice** delle facce di un angoloide è sempre minore di un angolo giro.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

29 Due piani nello spazio possono essere:
a. incidenti se hanno una .... in comune;
b. .... se non hanno alcun punto in comune;
c. coincidenti se hanno .... i loro punti in comune.

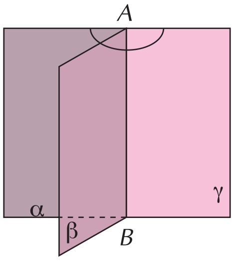
30 Completa la seguente definizione:
il diedro è ciascuna delle .... in cui .... rimane diviso da .... aventi ....; i due semipiani sono detti .... del diedro, la retta origine si dice .... o costola.

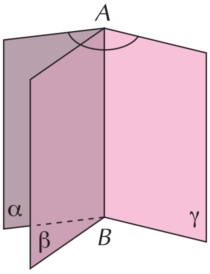
31 Indica nella figura a lato con un archetto l'angolo diedro convesso e quello concavo.



32 Completa le seguenti definizioni:
a. la sezione normale di un diedro è l'angolo che si ottiene .... il diedro con un piano .... al suo spigolo;
b. un diedro si dice acuto, retto o ottuso se la sua .... corrisponde rispettivamente ad ....

33 Indica quali dei seguenti diedri sono consecutivi e quali adiacenti.

a. 

b. 

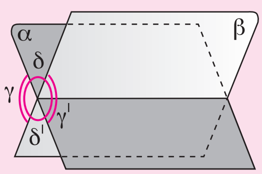
34 Completa le seguenti definizioni:
a. un semipiano si dice bisettore quando, uscendo dallo .... del diedro, lo divide in .... congruenti;
b. l'angoloide è la parte di spazio determinata da .... o più .... aventi .... in comune e tutti a due a due ....

35 La somma degli angoli al vertice delle facce di un angoloide è:
a. uguale ad un angolo giro;
b. sempre maggiore di un angolo giro;
c. sempre minore di un angolo giro.

APPLICAZIONE

36 *Esercizio Svolto*

Due piani α e β intersecandosi formano un diedro γ di ampiezza 150°; calcola la misura di ognuno degli altri tre diedri che si vengono a formare.



Dato	Incognita
$\gamma = 150°$	γ', δ, δ'

Osservando la figura notiamo che: $\gamma' = \gamma = 150°$ in quanto diedri opposti allo spigolo.
$\delta = 180° - \gamma = 180° - 150° = 30°$;
$\delta' = \delta = 30°$ perché diedri opposti allo spigolo.

37 Due piani α e β intersecandosi formano un diedro γ di ampiezza 125°; calcola la misura di ognuno degli altri tre diedri che si vengono a formare. [125°; 55°; 55°]

38 Un diedro è ampio 55°; calcola l'ampiezza del suo complementare. [35°]

39 Un diedro è ampio 106°; calcola l'ampiezza del suo supplementare. [74°]

40 Due diedri adiacenti sono uno il doppio dell'altro. Calcola l'ampiezza di ciascun diedro. [60°; 120°]

41 La somma delle ampiezze di due diedri consecutivi è 160° e il primo diedro è il triplo del secondo; calcola la misura dei due diedri. [40°; 120°]

42 Indica con quali delle seguenti terne di angoli è possibile formare un angoloide:
a. 130°; 75°; 121°; 35°; **b.** 100°; 145°; 59°; 50°; **c.** 77°; 88°; 99°; 100°.

43 Due piani α e β intersecandosi formano un diedro δ di ampiezza $35°\ 25'\ 30''$. Calcola la misura degli altri tre diedri che si vengono a formare. [$144°\ 34'\ 30''$]

44 Calcola l'ampiezza di due diedri adiacenti sapendo che il doppio del minore supera di 18° il maggiore. [114°; 66°]

45 Due diedri sono uno $\frac{3}{4}$ dell'altro e la loro somma è ampia $91°\ 42'$; calcola la misura di ognuno di essi. [$39°\ 18'$; $52°\ 24'$]

46 Calcola l'ampiezza di due diedri adiacenti sapendo che la sezione normale di uno di essi è $\frac{5}{3}$ della sezione normale dell'altro. [112° 30′; 67° 30′]

47 La differenza di due diedri supplementari misura 55° 44′. Calcola le ampiezze dei due diedri. [62° 8′; 117° 52′]

48 E' possibile costruire un angoloide di 4 facce sapendo che l'angolo al vertice della prima faccia misura 25° ed è la metà del secondo, il secondo è la metà del terzo e il terzo è la metà del quarto? [no, perché................]

49 Tre diedri consecutivi formano un angolo di 288°. Calcola l'ampiezza dei tre diedri sapendo che il primo è $\frac{3}{5}$ del secondo e che quest'ultimo è $\frac{5}{4}$ del terzo diedro. [72°; 120°; 96°]

50 Tre semipiani aventi l'origine in comune formano tre angoli diedri. Calcola l'ampiezza di ciascun angolo diedro sapendo che le rispettive misure sono proporzionali ai numeri 4, 5 e 3. [120°; 150°; 90°]

51 Disegna un angoloide di vertice V a cinque facce e sezionalo con due piani α e β tra loro paralleli.

52 Può esistere un angoloide formato da tre facce uguali ampie ciascuna 80° 40′ e da altre due facce tra loro uguali ampie ciascuna 57° 30′? [si, perché.............]