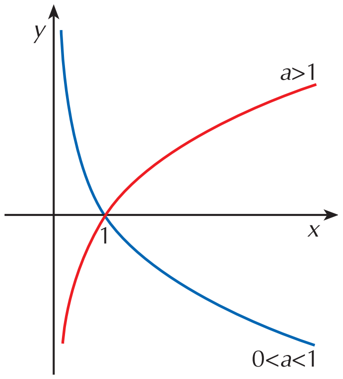
Concetti chiave e regole

La definizione di logaritmo



Chiamiamo **logaritmo in base *a* di un numero reale positivo *b*** l'esponente c che si deve dare ad a per avere b; vale cioè la seguente corrispondenza di scritture (con $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$)

$$\log_a b = c \qquad \longleftrightarrow \qquad a^c = b$$

In base alla definizione si ha che

- $\log_a a = 1$ • $\log_a 1 = 0$ • $a^{\log_a b} = b$

La funzione logaritmica

La funzione $\boldsymbol{y = \log_a x}$ (con $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$) si chiama **funzione logaritmica** ed è definita per $x > 0$; il suo grafico si può ottenere da quello della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante ed è una funzione crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$; in ogni caso tutte le funzioni logaritmiche passano per il punto di coordinate $(1, 0)$.
Data la curva logaritmica di equazione $y = \log_a x$

- la sua simmetrica rispetto all'asse delle ordinate ha equazione $y = \log_a(-x)$
- la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse ha equazione $y = -\log_a x$
- la sua corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v} = (h, k)$ ha equazione $y - k = \log_a(x - h)$
- la sua corrispondente nella dilatazione di fattori h e k ha equazione $y = k \log_a \dfrac{x}{h}$

Le proprietà dei logaritmi

Valgono le seguenti proprietà dei logaritmi, supposto che a, b, c siano numeri reali positivi (con $a \neq 1$)

- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ in particolare $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$
- $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$

Per passare da un sistema di logaritmi in base a ad un sistema di logaritmi in base c si applica la formula

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

I sistemi di logaritmi di uso più comune sono quello in base 10 indicato con il simbolo **log**, e quello naturale indicato con il simbolo **ln**.

Le equazioni logaritmiche

Un'equazione è logaritmica se l'incognita compare come argomento di almeno un logaritmo.

- Le equazioni della forma $\log_a f(x) = b$ sono equivalenti all'equazione $f(x) = a^b$
- Le equazioni della forma $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ sono equivalenti al sistema $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Le disequazioni logaritmiche

Per risolvere una disequazione logaritmica nella forma $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, poste le condizioni di esistenza dei due logaritmi, si deve tener conto della seguente regola:

- se $a > 1$ si scrive la disuguaglianza dello stesso verso fra gli argomenti:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \boldsymbol{f(x) > g(x)} \end{cases}$$

- se $0 < a < 1$ si scrive la disuguaglianza di verso opposto fra gli argomenti:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \boldsymbol{f(x) < g(x)} \end{cases}$$

Le equazioni e le disequazioni esponenziali con i logaritmi

Se l'equazione si presenta nella forma $a^{f(x)} = b$ e b non è potenza di a, si ricorre ai logaritmi:

- applicando la definizione di logaritmo: $f(x) = \log_a b$

oppure

- scrivendo l'uguaglianza tra i logaritmi decimali o naturali dei due membri: $\log a^{f(x)} = \log b$

Analogamente, una disequazione che si presenta nella forma $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

è equivalente a quella che si ottiene considerando la disuguaglianza dello stesso verso tra i logaritmi decimali (o naturali) dei due membri:

$\log a^{f(x)} > \log b^{g(x)}$ cioè $f(x)\log a > g(x)\log b$