CAPITOLO 2

Modelli ed equazioni differenziali

Obiettivi

- comprendere il significato di equazione differenziale
- saper risolvere equazioni differenziali semplici
- saper interpretare un modello differenziale

1. Introduzione: i modelli differenziali

Nei problemi che siamo abituati ad affrontare l'incognita è sempre un numero reale che, a seconda del problema, rappresenta la misura di un segmento o di un angolo, il coefficiente angolare di una retta, un'area, una quantità da produrre e via dicendo.
Ci sono però dei problemi in cui ciò che si deve trovare non è un valore numerico ma una funzione; si possono trovare molti esempi di questo tipo in Fisica, in Economia, in Elettronica, in Meccanica.
In genere, della funzione della quale si vuole determinare l'equazione si conoscono le derivate, si sa quali sono le relazioni che le legano, si ha qualche informazione di carattere puntuale, per esempio si sa che passa per un certo punto. I modelli che descrivono questi problemi, proprio perché coinvolgono le derivate delle funzioni, si chiamano **differenziali**.
Tra i modelli differenziali forse quello più noto è la seconda legge della dinamica che si esprime con l'equazione

$$F = ma$$

la quale ci dice che un corpo che è soggetto a una forza F subisce sempre una accelerazione a; se la forza è costante, questa equazione è una semplice equazione algebrica di primo grado e poiché anche a è costante riusciamo a descrivere in modo semplice il moto del corpo tramite la sua equazione oraria che esprime lo spazio percorso in funzione del tempo (si tratta di un moto uniformemente accelerato).
Ma se F non è costante e cambia il suo valore nel tempo, anche a è funzione del tempo t e l'equazione esprime una relazione tra funzioni:

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

Poiché l'accelerazione è la derivata prima della velocità v, la quale è la derivata prima dello spazio s, ci troviamo di fronte ad un'equazione in cui sono

coinvolte le derivate della funzione spazio $s(t)$, quindi un modello differenziale.
In questo capitolo vogliamo studiare i metodi che ci permettono di trovare le funzioni incognite di un modello differenziale che si esprime tramite un'equazione.

2. LE DEFINIZIONI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 24

Si dice **equazione differenziale ordinaria** un'equazione che ha come incognita una funzione y di variabile reale x e che stabilisce un legame tra x, y e almeno una delle sue derivate.

A seconda dell'ordine delle derivate che compaiono in un'equazione differenziale si parla di:

Ordine di un'equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione della funzione incognita $y(x)$.

- **equazioni differenziali del primo ordine** se compare solo la derivata prima della funzione, cioè se è del tipo
$$F(x,\ y,\ y')=0$$
- **equazioni differenziali del secondo ordine** se compaiono al massimo la derivata prima e la derivata seconda della funzione, cioè se è del tipo
$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0$$

e così via.
In questo capitolo ci occupiamo solo delle equazioni differenziali del primo e del secondo ordine. Per esempio:

- sono equazioni del primo ordine le seguenti:
  $y'+3x^2-2y+1=0 \qquad 2y'+y-3=0$
- sono equazioni del secondo ordine le seguenti:
  $y''+y'-x=0 \qquad 3y''+x=0$

Ogni funzione $\varphi(x)$, dotata di derivata fino all'ordine n in un certo intervallo $E\subseteq R$, è **soluzione** di un'equazione differenziale di ordine n in E se $\varphi(x)$ soddisfa l'equazione, cioè se:
$$F\big(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \dots,\ \varphi^{(n)}(x)\big)=0$$
Integrare un'equazione differenziale significa trovare tutte le sue soluzioni.

Il grafico della curva che corrisponde ad una soluzione, cioè la curva di equazione $y=\varphi(x)$, si chiama **curva integrale**.
Per esempio:

- nell'equazione differenziale del primo ordine $\quad y'=3x^2$
  la soluzione è la funzione $\varphi(x)$ la cui derivata prima è $3x^2$, cioè la generica primitiva di $3x^2$; dunque:
$$\varphi(x)=\int 3x^2dx=x^3+c$$
  cioè la curva integrale ha equazione $\quad y=x^3+c$
  Abbiamo quindi trovato non una, ma infinite soluzioni $\varphi(x,\ c)$ che dipendono da una costante c.

- nell'equazione differenziale del secondo ordine $y'' = 2x + 1$
la soluzione è la funzione $\varphi(x)$ la cui derivata seconda è $2x + 1$. Basta allora ricercare la derivata prima mediante il calcolo della primitiva di y'' e poi la primitiva della derivata prima:

$$y' = \int (2x+1)dx = x^2 + x + c_1$$

$$y = \int (x^2 + x + c_1)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

la curva integrale ha quindi equazione $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2$

Anche in questo caso abbiamo trovato infinite soluzioni $\varphi(x, c_1, c_2)$ che dipendono da due costanti c_1 e c_2.

In generale, un'equazione differenziale non ha una sola soluzione, ne ha infinite, che dipendono da uno o più parametri a seconda dell'ordine dell'equazione stessa; per determinare il valore di ciascun parametro, e quindi una soluzione particolare, occorre assegnare una o due informazioni aggiuntive, a seconda del numero di parametri, che consentano di determinarli.

L'INTEGRALE GENERALE E L'INTEGRALE PARTICOLARE

L'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale costituisce il suo **integrale generale**.
Ciascuna delle funzioni $\varphi(x)$ che si ottengono attribuendo alle costanti valori particolari costituisce un **integrale particolare** dell'equazione.

Relativamente alla prima delle precedenti equazioni:

- l'integrale generale è la famiglia di funzioni di equazione $y = x^3 + c$
- un integrale particolare si ottiene, per esempio, chiedendo che la funzione passi per il punto di coordinate $(1, 0)$, nel qual caso si ha che $c = -1$ e l'integrale particolare è la funzione di equazione $y = x^3 - 1$.

L'INTEGRALE SINGOLARE

Può capitare che, una volta trovato l'integrale generale, non tutti gli integrali particolari si possano ottenere attribuendo un valore alle costanti; per esempio, risolvendo l'equazione (impareremo come nel prossimo paragrafo)

$$y' = 2\sqrt{y}$$

si ottiene la famiglia di funzioni $y = (x+c)^2$; ma anche la retta $y = 0$ è una soluzione, basta verificarlo per sostituzione; questa funzione non si ottiene però dall'integrale generale per alcun valore della costante c.
Per indicare in modo esplicito questo fatto si dice che questa funzione costituisce un **integrale singolare** per l'equazione differenziale.

In sintesi, in ogni equazione differenziale:

- **integrale generale** è l'insieme di tutte le funzioni $\varphi(x)$ che rappresentano una possibile soluzione; nelle equazioni del primo e del secondo ordine queste funzioni dipendono rispettivamente da uno e da due parametri
- **integrale particolare** è una delle funzioni della famiglia che si ottiene attribuendo ai parametri un particolare valore
- **integrale singolare** è una soluzione la cui espressione non si può ottenere dall'integrale generale attribuendo ai parametri un particolare valore.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Un'equazione differenziale del primo ordine $F(x, y, y') = 0$ contiene sempre:

a. almeno la y'
b. sia y', sia y, sia x
c. almeno y' e y
d. almeno y' e x.

2. Barra vero o falso.

a. L'integrale generale di un'equazione del secondo ordine dipende da due parametri. V F
b. Attribuendo, se possibile, il valore 1 alle costanti dell'integrale generale si ottiene un integrale particolare. V F
c. Attribuendo, se possibile, il valore 0 alle costanti dell'integrale generale si ottiene un integrale singolare. V F

3. LE EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 25

3.1 Le caratteristiche e il problema di Cauchy

Un'equazione differenziale del primo ordine ha per incognita una funzione $y = y(x)$ e stabilisce una relazione tra x, y e la sua derivata prima y'; essa è quindi del tipo $F(x, y, y') = 0$.
Esplicitando l'equazione rispetto a y' se ne ottiene una della forma $y' = f(x, y)$ che si dice **forma normale** dell'equazione.
In una equazione differenziale del primo ordine deve quindi sempre comparire la y', non è indispensabile che ci siano la y o la x.

La forma normale dell'equazione

$$3y' - 2y + x = 0$$

è $y' = \dfrac{2y - x}{3}$.

Nelle applicazioni non viene di solito richiesto di determinare *tutte* le soluzioni di un'equazione differenziale, ma solo quelle che soddisfano certe condizioni, che vengono dette **condizioni iniziali**.
Poiché abbiamo visto nel primo paragrafo che, in genere, l'integrale generale dell'equazione dipende da un solo parametro c, per determinare una curva particolare sarà necessario dare una informazione che consenta di determinare c.
Il problema di trovare le soluzioni che soddisfano le condizioni iniziali viene denominato **problema di Cauchy** e viene così formulato:

$$\boxed{\begin{cases} y' = f(x, y) & \longleftarrow \quad \text{è l'equazione differenziale} \\ y(x_0) = y_0 & \longleftarrow \quad \text{è la condizione iniziale} \end{cases}}$$

L'esistenza e l'unicità della soluzione di questo problema è garantita dal seguente teorema dove con il simbolo f'_y abbiamo indicato la derivata prima della funzione $f(x, y)$ rispetto alla variabile y.

Teorema di Cauchy. Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili reali x e y, definita in un certo insieme aperto D del piano e ivi continua insieme a f'_y; sia poi (x_0, y_0) un punto di D. In tali ipotesi, l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ ammette una sola soluzione $y = \varphi(x)$ in un intorno del punto x_0 che soddisfa la condizione $y(x_0) = y_0$.

In sostanza, il teorema garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione che soddisfa la condizione iniziale, per lo meno in un intorno di x_0, se $f(x, y)$ è continua e se lo è anche la sua derivata rispetto a y.

L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

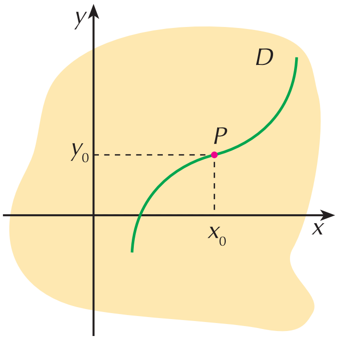
Possiamo vedere in chiave geometrica il problema di Cauchy ed il teorema che ne garantisce la soluzione.
Se D è l'insieme di R^2, quindi del piano, in cui è definita $f(x, y)$, risolvendo l'equazione si trovano infinite curve che giacciono in D; la condizione $y(x_0) = y_0$ chiede in sostanza di determinare, tra tutte, la curva che passa per il punto di coordinate (x_0, y_0) (***figura 1***).
Il teorema di Cauchy garantisce l'esistenza e l'unicità di questa curva particolare per lo meno in un intorno del punto x_0. Nella maggior parte dei casi, poi la sua esistenza avviene in tutta la regione D.
Per esempio, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y - x}{3} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

chiede di determinare, tra le funzioni $y = y(x)$ che soddisfano l'equazione $y' = \dfrac{2y - x}{3}$, quella che passa per il punto di coordinate $(0, 2)$.

Poiché $f(x, y) = \dfrac{2y - x}{3}$ è continua in R^2 ed è $f'_y = \dfrac{2}{3}$, quindi anche f'_y è continua, il teorema garantisce che la soluzione al problema, almeno in un intorno dello zero, esiste ed è unica. Dobbiamo adesso imparare a calcolarla.

Figura 1



3.2 Le equazioni della forma $y' = f(x)$

Sono le equazioni più semplici da risolvere perchè la funzione che rappresenta la soluzione è la generica primitiva di $f(x)$; si ha cioè che l'integrale generale è la funzione

$$\boxed{y = \int f(x)dx}$$

ESEMPI

1. Risolviamo l'equazione differenziale $y' = 2x$ e troviamo l'integrale particolare che soddisfa alla condizione $y(1) = 0$.

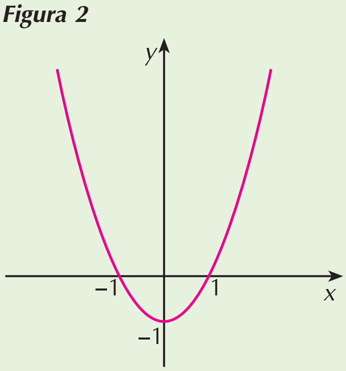
L'integrale generale è $\quad y = \int 2xdx = x^2 + c$

La condizione data ci dice in sostanza che la funzione $y = x^2 + c$ deve passare per il punto di coordinate (1,0), cioè che deve essere

$$0 = 1 + c \qquad \rightarrow \qquad c = -1$$

L'integrale particolare è dunque la parabola $y = x^2 - 1$ ed il suo grafico è in ***figura 2***.

Figura 2



2. Risolviamo l'equazione differenziale $y' = e^{3x}$ con la condizione che sia $y(0) = 3$

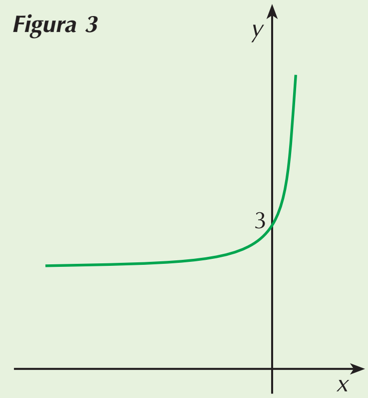
L'integrale generale è $\quad y = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c$

La condizione data richiede che sia

$$3 = \frac{1}{3} e^0 + c \qquad \to \qquad c = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

L'integrale particolare è dunque $y = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{8}{3}$ e la curva integrale è in ***figura 3***.

Figura 3



3.3 Le equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono quelle che si possono scrivere nella forma

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

dove y è funzione di x. In pratica, dopo aver svolto eventuali calcoli, al primo membro troviamo la funzione derivata prima, al secondo due funzioni delle variabili x e y separate. Per esempio:

- $y' = \underbrace{(x+1)}_{g(x)} \; \underbrace{y}_{h(y)}$
- $y' = 3xy - 2x$ infatti basta riscrivere l'equazione nella forma $\quad y' = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{(3y-2)}_{h(y)}$

UN ESEMPIO DI RISOLUZIONE

Cerchiamo la procedura corretta per risolvere questo tipo di equazioni considerando, come esempio, la prima delle equazioni precedenti.

Passo 1. Supponiamo dapprima che sia $y \neq 0$ e riscriviamo l'equazione separando la variabile y dalla variabile x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x + 1$$

Passo 2. Ricordiamo che y è funzione di x e che quindi la precedente equazione è equivalente a:

$$\int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int (x+1) dx$$

Passo 3. L'integrale al primo membro, poiché $y'(x)$ è la derivata di $y(x)$, è il logaritmo naturale di $|y(x)|$; l'integrale al secondo membro, a meno della costante additiva, è uguale a $\frac{1}{2}x^2 + x$. Dunque:

$$\ln |y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

Passo 4. Troviamo l'espressione di $y(x)$: $\quad |y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2 + x + c}$

L'integrale generale dell'equazione data è la famiglia di funzioni: $\quad y(x) = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 + x}$

cioè, posto $\pm e^c = k$: $\quad y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 + x}$

Osserviamo inoltre che per $k = 0$ si ottiene anche l'integrale particolare $y = 0$ che era stato inizialmente escluso dalla procedura di calcolo, ma che risulta essere una soluzione; infatti, sostituendo nell'equazione si ottiene un'identità:

$$0 = (x+1) \cdot 0 \qquad \rightarrow \qquad 0 = 0$$

La procedura seguita in questo esempio si può generalizzare a una qualsiasi equazione della forma $y' = g(x) \cdot h(y)$:

LA PROCEDURA DI RISOLUZIONE

1 Posto $h(y) \neq 0$ si riscrive l'equazione nella forma: $\dfrac{1}{h(y)} \cdot y' = g(x)$

2 Si integrano rispetto a x entrambi i membri dell'equazione:

$$\int \frac{1}{h(y)} \cdot y' dx = \int g(x) dx$$

3 Se $H(y)$ è la funzione che rappresenta l'integrale del primo membro e $G(x)$ è una primitiva di $g(x)$, l'integrale generale dell'equazione è:

$$H(y(x)) = G(x) + c$$

4 Poiché $h(y) = 0$ è soluzione dell'equazione in quanto anche $h'(y) = 0$, si verifica se tale funzione è un integrale particolare dell'equazione (cioè se si può ottenere per qualche particolare valore della costante), altrimenti rappresenta un integrale singolare.

ESEMPI

1. Risolviamo l'equazione $y' = y^2$ con la condizione iniziale $y(0) = -1$.

In questo caso $g(x) = 1$ e $h(y) = y^2$

Separiamo le variabili nell'ipotesi che sia $y \neq 0$: $\dfrac{y'}{y^2} = 1$

Integriamo entrambi i membri rispetto a x: $\displaystyle\int \frac{y'}{y^2} dx = \int dx$

L'integrale al primo membro restituisce $-\dfrac{1}{y}$ mentre quello al secondo membro $x + c$.

L'integrale generale dell'equazione è quindi: $-\dfrac{1}{y} = x + c$ cioè $y = -\dfrac{1}{x+c}$

La funzione $y = 0$, che è soluzione dell'equazione data, non si ottiene però per alcun valore di c; si tratta quindi in un integrale singolare.

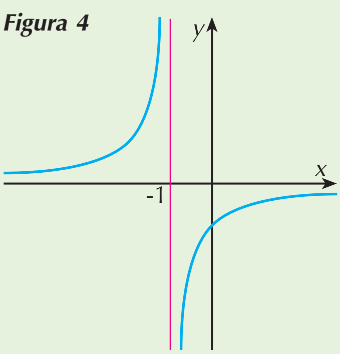
Determiniamo adesso l'integrale particolare richiesto dalla condizione iniziale:

$y(0) = -\dfrac{1}{c}$ e deve essere $-\dfrac{1}{c} = -1$ cioè $c = 1$

L'integrale particolare è dunque la funzione $y = -\dfrac{1}{x+1}$.

La corrispondente curva integrale è l'iperbole in ***figura 4***.

Figura 4



2. Risolviamo l'equazione $y' = x(1 + y^2)$ con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

Separiamo le variabili (non è necessario porre alcuna condizione essendo $1 + y^2$ positivo per ogni x):

$$\frac{1}{1+y^2} \cdot y' = x$$

Integriamo entrambi i membri rispetto a x: $\quad \displaystyle\int \frac{y'}{1+y^2}\, dx = \int x\, dx$

Nella funzione integranda al primo membro riconosciamo la derivata di arctan y, quindi

$$\int \frac{y'}{1+y^2}\, dx = \arctan y$$

Al secondo membro: $\quad \displaystyle\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$

L'integrale generale dell'equazione data è quindi: $\quad \arctan y = \frac{1}{2}x^2 + c$

Troviamo l'integrale particolare che soddisfa la condizione iniziale: $\quad \arctan 1 = c \quad \rightarrow \quad c = \frac{\pi}{4}$

L'equazione dell'integrale particolare è: $\quad \arctan y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}$

Volendo scrivere l'equazione esplicitata rispetto a y troviamo:

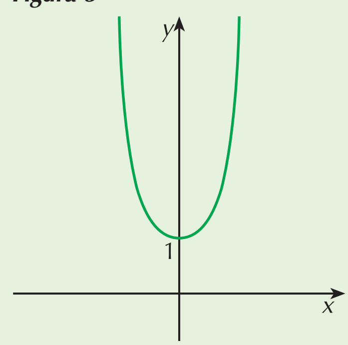
$$y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

con x che soddisfa la condizione $\quad -\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

cioè $\quad -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} < x < \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

La corrispondente curva integrale è in ***figura 5***.

Figura 5



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Se $y' = \frac{x-1}{x}$, allora y è uguale a:

a. $\frac{1}{2}x^2 - x + c$ **b.** $x - \ln|x| + c$ **c.** $1 - \ln|x| + c$ **d.** una funzione diversa dalle precedenti

2. Indica quali tra le seguenti equazioni differenziali sono a variabili separabili:

a. $y' = x(2y - x)$ **b.** $y' = 2xy$ **c.** $3x^2y' - (x+1)(y+1) = 0$

d. $y' - (x-1)y = x + 2y$ **e.** $\frac{x}{y} - y' = 0$

3. Risolvi l'equazione $yy' + 3x = 0$ seguendo la traccia:

separa le variabili: ....
integra entrambi i membri: ....

3.4 Le equazioni lineari

Un'equazione differenziale del primo ordine è **lineare** se y e y' hanno entrambe al massimo esponente uno.
Di conseguenza un'equazione lineare si può sempre scrivere nella forma:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

In essa $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni assegnate della variabile x, continue in un intervallo E. Distinguiamo due possibili situazioni:

- se $q(x) = 0$ l'equazione si dice **lineare omogenea**
- se $q(x) \neq 0$ l'equazione è **lineare non omogenea**.

Le equazioni lineari omogenee

L'equazione assume la forma $\quad y' + p(x)y = 0$

ed è quindi a variabili separabili.

La procedura di risoluzione è analoga a quella vista nel precedente paragrafo:

si separano le variabili nell'ipotesi che sia $y \neq 0$: $\quad \dfrac{y'}{y} = -p(x)$

Si integrano entrambi i membri dell'equazione: $\quad \displaystyle\int \frac{y'}{y}dx = -\int p(x)dx$

Si ottiene: $\quad \ln|y| = -\displaystyle\int p(x)dx + c$

da cui: $\quad y = \pm e^{-\int p(x)dx + c}$

cioè, ponendo $\pm e^c = k$: $\quad \boxed{y = k \cdot e^{-\int p(x)dx}}$

LA FORMULA RISOLUTIVA

L'equazione lineare omogenea $y' + p(x)y = 0$ ha come integrale generale la famiglia di funzioni di equazione

$$\boldsymbol{y = k \cdot e^{-\int p(x)dx}} \qquad (\mathbf{A})$$

Risolviamo per esempio l'equazione $\quad y' + (x^2 - 1)y = 0$

dove $\quad p(x) = x^2 - 1$

Calcoliamo $\displaystyle\int p(x)dx$: $\quad \displaystyle\int (x^2 - 1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x$

Applicando la formula risolutiva troviamo subito l'integrale generale:

$$y = k \cdot e^{x - \frac{1}{3}x^3}$$

Le equazioni lineari non omogenee

Queste equazioni hanno la forma $\quad y' + p(x) \cdot y = q(x)$

dove $q(x)$ non è identicamente nulla.

Per trovare l'integrale generale procediamo in questo modo.

Supponiamo che $P(x)$ sia una primitiva di $p(x)$, cioè $P(x) = \int p(x)dx$; moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per $e^{P(x)}$:

$$y' \cdot e^{P(x)} + p(x) \cdot y \cdot e^{P(x)} = q(x) \cdot e^{P(x)}$$

In questo modo il primo membro può essere interpretato come la derivata di $e^{P(x)} \cdot y$; infatti:

$$D\left[e^{P(x)} \cdot y\right] = p(x) \cdot e^{P(x)} \cdot y + e^{P(x)} \cdot y'$$

L'equazione può quindi essere riscritta nella forma:

$$D\left[e^{P(x)} \cdot y\right] = q(x) \cdot e^{P(x)}$$

Integrando entrambi i membri otteniamo:

$$\int D\left[e^{P(x)} \cdot y\right] dx = \int q(x) \cdot e^{P(x)} dx$$

cioè $\quad e^{P(x)} \cdot y = \int q(x) \cdot e^{P(x)} dx + c$

Dall'ultima relazione otteniamo infine:

$$\boxed{y = e^{-P(x)}\left(\int q(x) \cdot e^{P(x)} dx + c\right)}$$

LA FORMULA RISOLUTIVA

L'equazione lineare non omogenea $y' + p(x)y = q(x)$ ha come integrale generale la famiglia di funzioni di equazione

$$\boldsymbol{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c\right]} \qquad \textbf{(B)}$$

ESEMPI

1. Risolviamo l'equazione differenziale $\quad y' - x^2 y = 0$

Si tratta di un'equazione omogenea in cui $p(x) = -x^2$.

Applichiamo la formula risolutiva (**A**): $\quad y = k\ e^{-\int -x^2 dx} = k\ e^{\int x^2 dx}$

L'integrale generale è perciò $\quad y = k\ e^{\frac{1}{3}x^3}$

2. Risolviamo l'equazione differenziale $\quad y' - xy = 2x$

L'equazione è lineare non omogenea ed è $p(x) = -x$ e $q(x) = 2x$.

Troviamo l'integrale generale applicando la formula risolutiva (**B**): $\quad y = e^{-\int -xdx}\left[\int 2x \cdot e^{\int -xdx} dx + c\right]$

da cui, eseguendo le integrazioni $\quad y = e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c\right] = e^{\frac{x^2}{2}}\left[-2e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right] = -2 + ce^{\frac{x^2}{2}}.$

Il caso particolare dell'equazione lineare a coefficienti costanti

Un caso particolare di equazione differenziale lineare che capita spesso di incontrare nelle applicazioni è quello in cui le funzioni $p(x)$ e $q(x)$ sono delle costanti; indicandole con P e Q, l'equazione assume la forma

$$y' + Py = Q$$

Un'equazione di questo tipo può essere risolta in due modi:

- applicando la formula risolutiva (**B**) con $p(x) = P$ e $q(x) = Q$
- riconducendola ad un'equazione a variabili separate.

Troviamo per esempio l'integrale generale dell'equazione $y' + 3y = 7$.

- Applichiamo la formula risolutiva: $y = e^{-\int 3dx}\left[\int 7e^{\int 3dx}dx + c\right]$

  cioè $y = e^{-3x}\left[\frac{7}{3}e^{3x} + c\right] = \frac{7}{3} + ce^{-3x}$

- Separiamo le variabili: $y' = 7 - 3y \quad \rightarrow \quad \frac{y'}{7-3y} = 1$

  Integriamo entrambi i membri: $\int \frac{y'}{7-3y}dx = \int dx$

  $\rightarrow \quad -\frac{1}{3}\ln|7-3y| = x + c \quad \rightarrow \quad 7 - 3y = \pm e^{-3x-3c}$

  da cui ricaviamo infine:

  $y = \frac{7}{3} + ce^{-3x}$ dove abbiamo posto $c = \pm\frac{e^{-3c}}{3}$.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

Risolvi le seguenti equazioni differenziali seguendo la traccia. Trova poi, quando richiesto, l'integrale che soddisfa alla condizione iniziale specificata.

1. $2y' + 6y = 5$

Si tratta di un'equazione lineare la cui forma normale è $y' + 3y = \frac{5}{2}$

ed è $p(x) = 3$ e $q(x) = \frac{5}{2}$.

Essendo $\int 3\,dx = 3x$ ottieni che $y = e^{-3x}\left[\int \frac{5}{2}\cdot e^{3x}\,dx + c\right] = ...$

2. $y' - 2x^2y = 0$ con $y(0) = -1$

Si tratta di una lineare omogenea in cui $p(x) = -2x^2$: $y = k\,e^{-\int -2x^2\,dx} = ...$

Determina adesso il valore della costante sostituendo 0 al posto di x e -1 al posto di y.

4. Le equazioni del secondo ordine

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 31

4.1 Le caratteristiche e il problema di Cauchy

Un'equazione differenziale del secondo ordine ha per incognita una funzione $y = y(x)$ e stabilisce una relazione tra x, y, la sua derivata prima y' e la sua derivata seconda y''; essa è quindi del tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

e, se si può esplicitare rispetto a y'', diciamo che è in **forma normale** . Un'equazione in forma normale si scrive di solito in questo modo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

dove $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ sono funzioni di x, integrabili e definite nello stesso dominio; le funzioni $p(x)$ e $q(x)$ vengono dette *coefficienti* dell'equazione.

Ricordiamo che, per quanto detto nel primo paragrafo, l'integrale generale di un'equazione del secondo ordine dipende, in genere, da due parametri c_1 e c_2; per determinare una funzione particolare tra tutte, sarà necessario perciò dare due informazioni indipendenti.
Il **problema di Cauchy** per un'equazione del secondo ordine viene dunque così formulato:

$$\boxed{\begin{cases} y'' = f(x, y) & \longleftarrow \quad \text{è l'equazione differenziale} \\ y(x_0) = y_0 & \longleftarrow \quad \text{è la prima condizione iniziale} \\ y'(x_0) = y'_0 & \longleftarrow \quad \text{è la seconda condizione iniziale} \end{cases}}$$

L'esistenza e l'unicità della soluzione di questo problema sono garantite da un teorema analogo a quello visto per le equazioni del primo ordine.

Teorema di Cauchy. Sia $f(x, y, y')$ una funzione delle tre variabili reali x, y e y', definita in un certo insieme aperto D dello spazio e ivi continua insieme a f'_y e f''_y; sia poi (x_0, y_0, y'_0) un punto di D. In tali ipotesi, l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$ ammette una sola soluzione $y = \varphi(x)$ in un intorno del punto x_0 che soddisfa le condizioni $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$.

Come per le equazioni del primo ordine, il teorema garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione che soddisfa la condizione iniziale, perlomeno in un intorno di x_0, se la funzione $f(x, y, y')$ è continua insieme alle sue derivate rispetto a y e a y'.

4.2 Le equazioni della forma $y'' = f(x)$

Sono le equazioni più semplici da risolvere e ne abbiamo già visto un esempio nel primo paragrafo:

da $\quad y'' = f(x) \qquad$ troviamo che $\qquad y' = \int f(x)dx$

Trovato l'insieme delle primitive di $f(x)$, chiamiamole $F(x)$, basta ora integrare nuovamente

$$y = \int F(x)dx$$

ESEMPI

1. Risolviamo l'equazione del secondo ordine $y'' = \frac{3}{2}x^2$

Abbiamo subito che $y' = \int \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}x^3 + c_1 \quad \rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{2}x^3 + c_1\right) dx = \frac{1}{8}x^4 + c_1 x + c_2$

2. Risolviamo l'equazione del secondo ordine $y'' = \sqrt{x}$ con le condizioni che sia $y'(0) = 1$ e $y(1) = 2$.

$y' = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_1$ e dovendo essere $y'(0) = 1$ troviamo subito che $c_1 = 1$

$y = \int \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 1\right) dx = \frac{4}{15}x^2\sqrt{x} + x + c_2$ e dovendo essere $y(1) = 2$ troviamo che $c_2 = \frac{11}{15}$

L'integrale particolare richiesto è dunque $y = \frac{4}{15}x^2\sqrt{x} + x + \frac{11}{15}$.

4.3 Le equazioni lineari a coefficienti costanti

Se le espressioni $p(x)$ e $q(x)$ sono delle costanti che indichiamo con p e q, l'equazione assume la forma

$$y'' + py' + qy = r(x) \qquad \text{con } p,\ q \in R$$

Come nel caso delle equazioni lineari del primo ordine, se $r(x) = 0$ l'equazione si dice **omogenea**.
Indichiamo di seguito i metodi di risoluzione di queste equazioni senza dare le dimostrazioni.

Le equazioni omogenee

Un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea ha la forma

$$y'' + py' + qy = 0$$

Per trovare il suo integrale generale, si considera l'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

che ha p come coefficiente del termine di primo grado e q come termine noto (in pratica questa equazione si ottiene da quella data attribuendo a λ esponente uguale all'ordine di derivazione della variabile y); tale equazione viene detta **equazione caratteristica.**

La tipologia delle soluzioni di questa equazione dipende dal discriminante $\triangle = p^2 - 4q$. Possono presentarsi i seguenti casi:

- $\triangle > 0$

  L'equazione ha due radici reali e distinte λ_1 e λ_2; si può dimostrare che in questo caso l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$$

  Troviamo, per esempio, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' - 6y = 0$$

L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$.
Allora l'equazione data ha come integrale generale la funzione

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

- $\triangle = 0$

L'equazione ha due radici reali coincidenti il cui valore è $\overline{\lambda} = -\frac{p}{2}$; in questo caso l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\boxed{y = c_1 e^{\overline{\lambda} x} + c_2 x e^{\overline{\lambda} x} = e^{\overline{\lambda} x}(c_1 + c_2 x)}$$

Troviamo, per esempio, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ ed ha soluzioni reali coincidenti $\overline{\lambda} = 3$.
Allora l'equazione data ha come integrale generale la funzione

$$y = e^{3x}(c_1 + c_2 x)$$

- $\triangle < 0$

L'equazione ha due radici reali complesse $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$; in questo caso l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)}$$

Troviamo, per esempio, l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y' + 20y = 0$$

L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda_1 = 2 - 4i$ e $\lambda_2 = 2 + 4i$; dunque $\alpha = 2$ e $\beta = 4$.
L'equazione data ha come integrale generale la funzione

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$$

ESEMPI

Risolviamo le seguenti equazioni lineari omogenee.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda = -3 \vee \lambda = 1$
L'integrale generale è allora $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$.

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ ed ha la sola soluzione $\overline{\lambda} = -2$
L'integrale generale è allora $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

3. $y'' - 2y' + 5y = 0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$
ed ha soluzioni complesse coniugate $\lambda_1 = 1 + 2i \vee \lambda_2 = 1 - 2i$
Essendo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ l'integrale generale è $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

LE EQUAZIONI NON OMOGENEE

Un'equazione del secondo ordine lineare non omogenea assume la forma

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

e l'equazione $y'' + py' + qy = 0$ si dice equazione omogenea associata.
Si può dimostrare che:

> se y_0 è un integrale particolare dell'equazione non omogenea, e se y_1 è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, l'integrale generale dell'equazione data è
>
> $$y = y_0 + y_1$$

Allora, per determinare le soluzioni di un'equazione lineare non omogenea si deve:

- determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata,
- individuare un integrale particolare dell'equazione non omogenea,
- sommare le due funzioni ottenute.

Se sappiamo come trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea, rimane tuttavia da scoprire come determinare quello particolare dell'equazione non omogenea.
L'integrale y_0 dipende dalla forma di $r(x)$ e i casi più significativi sono i seguenti.

I caso: $r(x)$ è un polinomio di grado n

In questo caso y_0 è anch'esso un polinomio che ha grado:

- n se $q \neq 0$
- $n+1$ se $q = 0 \wedge p \neq 0$

Se $q = 0 \wedge p = 0$ l'equazione ha la forma $y'' = r(x)$ e sappiamo come risolverla.

Vediamo un esempio.

- $y'' + 3y = 6 - x$

  $r(x)$ è un polinomio di primo grado e nell'equazione compare il termine y; anche il polinomio y_0 deve essere allora di primo grado e si ha quindi che

  $$y_0 = ax + b \qquad \text{ed inoltre} \qquad y_0' = a \qquad \text{e} \qquad y_0'' = 0$$

  Sostituendo nell'equazione otteniamo che $3ax + 3b = -x + 6$ e, per il principio di identità dei polinomi deve quindi essere

  $$\begin{cases} 3a = -1 \\ 3b = 6 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = 2 \end{cases}$$

  Un integrale particolare dell'equazione è dunque $y_0(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2$.

  Determiniamo adesso l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

  L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 3 = 0$ ed ha soluzioni complesse $\lambda_1 = -\sqrt{3}i \ \vee \ \lambda_2 = \sqrt{3}i$

  Il suo integrale generale è quindi $y_1 = c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x$.

  In definitiva, l'integrale generale dell'equazione data è $y = c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x - \dfrac{1}{3}x + 2$

II caso: $r(x)$ è una funzione del tipo $s(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $s(x)$ polinomio di grado n e $\alpha \in R$

In questo caso y_0 è uguale a:

- $\bar{s}(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $\bar{s}(x)$ polinomio dello stesso grado di $s(x)$ se α non è soluzione dell'equazione caratteristica associata
- $x^k \cdot \bar{s}(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $\bar{s}(x)$ polinomio dello stesso grado di $s(x)$ se α è soluzione con molteplicità k dell'equazione caratteristica associata

■ Risolviamo, ad esempio, l'equazione differenziale $y'' - 16y = 2e^x$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 16 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda = \pm 4$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è quindi $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{4x}$.
In questo caso α è 1 e non è soluzione dell'equazione caratteristica e, poiché il polinomio $s(x)$ ha grado zero, anche $\bar{s}(x)$ ha lo stesso grado ed è quindi rappresentabile mediante una costante a. L'integrale particolare ha dunque la forma

$$y_0 = a \cdot e^x \qquad \text{ed è} \qquad y'_0 = y''_0 = a \cdot e^x$$

Sostituendo nell'equazione data, abbiamo la relazione

$$ae^x - 16ae^x = 2e^x \qquad \text{da cui} \qquad a = -\frac{2}{15} \qquad \text{e quindi} \qquad y_0 = -\frac{2}{15} \cdot e^x$$

L'integrale generale dell'equazione data è infine $\quad y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{4x} - \frac{2}{15} e^x$

III caso: $r(x)$ è una funzione del tipo $h \sin \beta x + k \cos \beta x$ con $h, k \in R$

In questo caso y_0 è uguale a:

- $a \cos \beta x + b \sin \beta x$ se $i\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica associata
- $x(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$ se $i\beta$ è soluzione dell'equazione caratteristica associata

■ Risolviamo, ad esempio, l'equazione differenziale $y'' - 9y = \cos x$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 9 = 0$ ed ha soluzioni reali $\lambda = \pm 3$; essendo $\beta = 1$, possiamo porre

$$y_0 = a \cos x + b \sin x$$

e quindi $\quad y'_0 = -a \sin x + b \cos x$

$\qquad\qquad y''_0 = -a \cos x - b \sin x$

Imponendo a y_0 di soddisfare l'equazione, troviamo che $a = -\frac{1}{10} \wedge b = 0$, quindi $y_0 = -\frac{1}{10} \cos x$.

L'integrale generale dell'equazione data è allora $\quad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{10} \cos x$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Completa. L'equazione lineare omogenea $\quad y'' - 6y' - 7y = 0$:

a. ha equazione caratteristica: ....

b. che ha soluzioni: ....

c. l'integrale generale è quindi: ....

2. Nell'equazione $\quad y'' + 5y' + 4y = 3x + 1 \quad$ la funzione y_0 deve avere la forma:

a. $ax + b$ **b.** $ax^2 + bx$ **c.** $ax^2 + b$ **d.** $ax^3 + bx^2 + cx + d$

3. La soluzione del problema di Cauchy: $\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 12 \end{cases}$ è la funzione:

a. $y = 5e^{2x}(x-1)$ **b.** $y = 5e^{2x}(1+x)$ **c.** $y = 2e^{5x}(1+x)$ **d.** $y = 2e^{5x}(1-x)$

5. MODELLI DESCRITTI DA EQUAZIONI DIFFERENZIALI

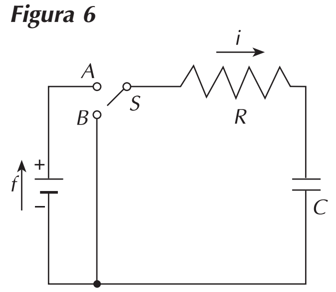
Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 37

5.1 Modelli del primo ordine

I esempio. **I circuiti *RC*: il processo di carica**

Consideriamo un circuito elettrico come quello in ***figura 6***, detto circuito RC, in cui sono collegati in serie un generatore di forza elettromotrice costante f di resistenza interna trascurabile, una resistenza R e un condensatore di capacità C inizialmente scarico. Quando l'interruttore S viene posto in A il circuito si chiude e inizia a circolare una corrente i di intensità variabile nel tempo che porta una carica $q(t)$ sull'armatura positiva del condensatore. Se ad un istante generico t percorriamo l'unica maglia esistente in senso orario a partire dal polo positivo, incontriamo una caduta di tensione pari a Ri quando incontriamo la resistenza e un'altra caduta di tensione pari a $\dfrac{q(t)}{C}$ quando incontriamo il condensatore. Applicando le leggi di Kirchhoff otteniamo quindi l'equazione

Figura 6



$$f - Ri - \frac{q(t)}{C} = 0$$

che, tenendo presente che $i = \dfrac{dq(t)}{dt}$, diventa $\quad f - R\dfrac{dq(t)}{dt} - \dfrac{q(t)}{C} = 0$

cioè $\quad Rq'(t) + \dfrac{q(t)}{C} = f \quad \rightarrow \quad q'(t) + \dfrac{q(t)}{RC} = \dfrac{f}{R}$

Riconosciamo in questa un'equazione differenziale del primo ordine, lineare non omogenea a coefficienti costanti, in cui $p = \dfrac{1}{RC}$ e $q = \dfrac{f}{R}$. Essa ha dunque come integrale generale la funzione (abbiamo indicato la costante con k per evitare confusioni con la capacità C del condensatore)

$$q = e^{-\int \frac{1}{RC}dt}\left[\int \frac{f}{R} e^{\int \frac{1}{RC}dt}dt + k\right] \qquad \text{cioè} \qquad q = e^{-\frac{1}{RC}t}\left[fCe^{\frac{1}{RC}t} + k\right]$$

Per determinare la costante k osserviamo che all'istante $t = 0$ le armature del condensatore sono scariche e che quindi $q(0) = 0$; deve quindi essere

$$0 = e^0[fCe^0 + k] \quad \rightarrow \quad fC + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -fC$$

Con questa considerazione l'integrale particolare dell'equazione è la funzione

$$q = e^{-\frac{1}{RC}t}\left[fCe^{\frac{1}{RC}t} - fC\right]$$

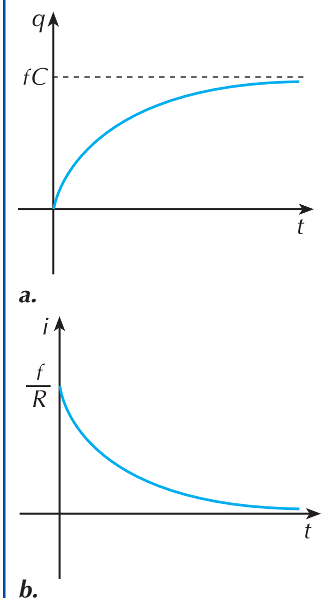
cioè svolgendo opportunamente i calcoli $\quad q = fC\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

La quantità di carica presente sulle armature del condensatore è quindi variabile nel tempo secondo la legge trovata ed assume valore massimo fC per $t \to +\infty$; l'intensità di corrente che circola nel circuito, essendo la derivata della funzione q è

$$i = fC \cdot \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad \text{cioè} \qquad i = \frac{f}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Essa ha valore massimo all'istante $t = 0$ (chiusura del circuito) e tende ad annullarsi per $t \to +\infty$.
In ***figura 7*** sono rappresentati i grafici di q e di i in funzione di t.
Fra le armature del condensatore, a processo di carica ultimato, visto che l'intensità di corrente si è ridotta a zero, vi è ora la stessa differenza di potenziale f che è presente fra i poli del generatore.
La costante RC ha le dimensioni di un tempo e viene per questo detta **costante di tempo capacitiva**; osserviamo che il processo di carica prevede teoricamente un tempo infinito tuttavia, poichè si verifica che dopo un tempo pari a RC esso è carico per il 63%, basta considerare un intervallo di tempo t pari a 3 o 4 volte la costante di tempo per considerare completo il processo di carica.

Figura 7



II esempio. **I circuiti *RC*: il processo di scarica**

Una volta caricato il condensatore, spostiamo l'interruttore S nella posizione B in modo da escludere il generatore (rivedi la ***figura 6***).
Poichè fra le armature del condensatore vi è una differenza di potenziale pari a $f = \frac{q}{C}$, inizia a circolare una corrente i in senso contrario rispetto a quella del processo di carica e l'equazione del circuito si ottiene da quella precedente escludendo la forza elettromotrice f:

$$q'(t) + \frac{q(t)}{RC} = 0$$

Anche in questo caso si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine, lineare omogenea a coefficienti costanti, il cui integrale generale è

$$q = ke^{-\int \frac{1}{RC} dt} \qquad \text{cioè} \qquad q = ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

La costante k si determina osservando che all'istante $t = 0$ si ha che $q = fC$, quindi deve essere

$$fC = ke^0 \quad \to \quad k = fC$$

L'integrale particolare dell'equazione è dunque la funzione

$$q = fCe^{-\frac{1}{RC}t}$$

e l'intensità di corrente che circola è la derivata, cambiata di segno, di q

$$i = -\frac{dq(t)}{dt} = fC \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad \text{cioè} \qquad i = \frac{f}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

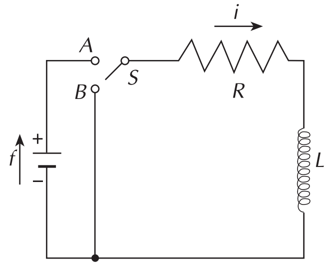
Si ha quindi l'intensità di corrente massima $\quad i = \frac{f}{R} \quad$ per $\quad t = 0$.

Con considerazioni analoghe a quelle fatte per il processo di carica possiamo poi dire che, poichè per $t \to +\infty$ si ha che $q \to 0$ e anche $i \to 0$, occorre teoricamente un tempo infinito affinchè il condensatore si scarichi e la corrente si annulli.

III esempio. I circuiti RL

Un circuito *RL* come quello in ***figura 8*** è formato da un generatore di forza elettromotrice costante f di resistenza interna trascurabile, da una resistenza R e da una induttanza L collegati in serie.
Chiudendo il circuito (interruttore S in A), l'intensità di corrente comincia ad aumentare e, se non ci fosse l'induttanza, raggiungerebbe istantaneamente il valore di regime $\frac{f}{R}$; la presenza dell'induttanza provoca invece una forza elettromotrice autoindotta pari a $-L\frac{di}{dt}$ che, per la legge di Lenz, si oppone all'aumento della corrente.
La legge di Kirchhoff applicata alla maglia dà quindi l'equazione

Figura 8



$$f - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \qquad \text{cioè} \qquad i' + \frac{R}{L}i = \frac{f}{L}$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine, lineare non omogenea a coefficienti costanti il cui integrale generale è

$$i = e^{-\int \frac{R}{L}dt}\left[\int \frac{f}{L}e^{\int \frac{R}{L}dt}dt + c\right] \qquad \text{cioè} \qquad i = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{f}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c\right]$$

La costante c si determina osservando che all'istante $t = 0$ è $i = 0$ e che quindi deve essere

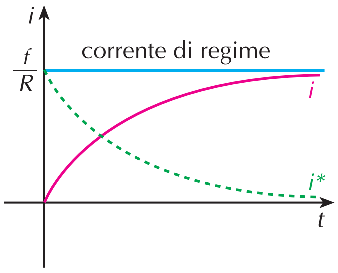
$$0 = e^0\left[\frac{f}{R}e^0 + c\right] \qquad \text{cioè} \qquad c = -\frac{f}{R}$$

Svolgendo opportunamente i calcoli, l'integrale particolare dell'equazione che esprime l'intensità di corrente circolante nel circuito al tempo t è dunque

$$i = \frac{f}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Tale intensità di corrente, il cui grafico è in ***figura 9***, è la differenza fra la corrente di regime $\frac{f}{R}$ e la corrente $i^* = \frac{f}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$, chiamata **extracorrente di chiusura**, prodotta dalla forza elettromotrice autoindotta; la costante $\frac{R}{L}$ ha le dimensioni di un tempo e viene detta, come nel caso del circuito *RC*, **costante di tempo induttiva**.
L'extracorrente di chiusura si annulla per $t \to +\infty$; tuttavia dopo un tempo pari a 3 o 4 volte la costante di tempo si può considerare che i raggiunga il valore di regime.

Figura 9



Se adesso escludiamo il generatore spostando l'interruttore S in B, l'intensità di corrente tende a diminuire e la presenza dell'induttanza genera una forza elettromotrice autoindotta che si oppone a questa diminuzione.
L'equazione differenziale precedente diventa quindi

$$i' + \frac{R}{L}i = 0$$

ed ha integrale generale $\quad i = ke^{-\frac{R}{L}t}$

La costante k si determina osservando che all'istante $t = 0$ si ha che $i = \frac{f}{R}$:

$$\frac{f}{R} = ke^0 \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{f}{R}$$

L'integrale particolare dell'equazione, che rappresenta l'intensità di corrente che circola nel circuito all'istante t è dunque

$$i = \frac{f}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

e prende il nome di **extracorrente di apertura**. Essa è uguale all'opposto dell'extracorrente di chiusura e, anche se si annulla teoricamente in un tempo infinito, nella pratica si riduce a zero in un tempo t abbastanza breve.

5.2 Modelli del secondo ordine: l'equazione della dinamica di Newton

Nell'introduzione a questo capitolo abbiamo parlato della legge fondamentale della meccanica newtoniana che lega la forza F che viene esercitata su di un corpo di massa m e l'accelerazione a prodotta.
Se la forza non è costante ma è funzione del tempo t, anche l'accelerazione non è costante e l'equazione è

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

Se il corpo si muove su una retta e $y(t)$ indica la sua posizione all'istante t, l'accelerazione a è rappresentata dalla derivata seconda della funzione y :

$$a = y''(t)$$

Di conseguenza, la relazione fondamentale della dinamica si esprime mediante un'equazione differenziale del secondo ordine:

$$F(t) = m \cdot y''(t)$$

che possiamo scrivere nella forma $\quad y''(t) = \frac{1}{m} \cdot F(t)$

Per risolverla basta eseguire due integrazioni successive e, se sono note la posizione e la velocità all'istante $t = 0$, cioè $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$, la soluzione è unica.

Vediamo alcuni esempi nei quali è possibile applicare questa equazione.

I esempio.

Un corpo di massa $m = 2kg$, che si muove su un binario rettilineo di attrito trascurabile, è sottoposto ad una forza $F(t) = 2t + 1$; all'istante $t = 0$ (il tempo è misurato in secondi) il corpo si trova a una distanza di 1m dall'origine del sistema di riferimento e ha una velocità di 0,5m/s. Calcoliamo la sua equazione oraria e determiniamo dove si trova all'istante $t = 6$ e che velocità ha in quel punto.

L'equazione modello del problema è $\quad y''(t) = \frac{1}{2}(2t + 1)$.

Se all'istante $t = 0$ il corpo si trova a una distanza di 1m dall'osservatore significa che $y(0) = 1$.

Se in quell'istante ha una velocità di 0,5m/s, significa che $y'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Il problema di Cauchy corrispondente è dunque il seguente: $\begin{cases} y''(t)=\dfrac{1}{2}(2t+1) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Risolviamo l'equazione: $y'(t)=\dfrac{1}{2}\int(2t+1)dt=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t+c_1$

$$y(t)=\int\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+c_1\right)dt=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2+c_1t+c_2$$

Determiniamo i valori delle due costanti:

- $y(0)=1 \quad \rightarrow \quad c_2=1$
- $y'(0)=\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad c_1=\dfrac{1}{2}$

L'equazione oraria cercata è quindi: $y(t)=\dfrac{1}{6}t^3+\dfrac{1}{4}t^2+t+\dfrac{1}{2}$

e l'equazione della velocità è: $y'(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t+1$

All'istante $t=6$ il corpo ha quindi percorso $y(6)=51{,}5\text{m}$ ed ha una velocità di $y'(6)=22\text{m/s}$.

II esempio.

L'oscillatore armonico è un sistema costituito da una massa m collegata ad una molla di costante elastica k, con k costante reale positiva.
Supponiamo che la massa si muova in una direzione che assumiamo come asse delle ascisse e che all'istante $t=0$ si trovi in un punto x_0 dotata di una velocità v_0 (***figura 10***). Supponiamo poi che ad un determinato istante t, la massa si trovi nel punto di coordinate $x(t)$; la forza F che la molla esercita sulla massa m soddisfa la relazione

$$F=-kx(t)$$

Applichiamo alla massa m la legge di Newton; poiché $a=x''(t)$, otteniamo l'equazione

$$mx''(t)=-kx(t) \qquad \text{cioè} \qquad x''(t)+\frac{k}{m}\cdot x(t)=0$$

con le condizioni iniziali: $x(0)=x_0$ e $x'(0)=v_0$.

Indicata poi con ω^2 la costante $\dfrac{k}{m}$, il problema di Cauchy è dunque il seguente:

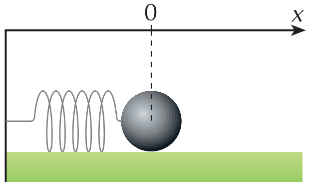
$$\begin{cases} x''(t)+\omega^2\cdot x(t)=0 \\ x(0)=x_0 \\ x'(0)=v_0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+\omega^2=0$

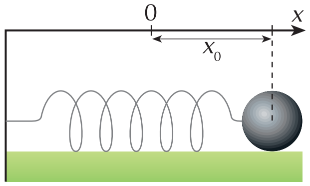
che ha soluzione $\lambda=\pm i\omega$ (quindi $\alpha=0$ e $\beta=\omega$)

L'integrale generale è dunque dato da $x(t)=c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)$

Figura 10



a. posizione della massa a riposo



b. posizione della massa all'istante $t=0$

Per imporre le condizioni iniziali calcoliamo $x'(t)$:

$$x'(t) = -\omega c_1 \sin(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t)$$

Abbiamo quindi che:

- $x(0) = x_0 \quad \rightarrow \quad c_1 = x_0$
- $x'(0) = v_0 \quad \rightarrow \quad \omega c_2 = v_0 \quad c_2 = \dfrac{v_0}{\omega}$

La soluzione del problema è quindi la funzione: $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \dfrac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$.

La forma più consueta di questa funzione è espressa dalla relazione

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

che si ottiene dalla precedente ponendo:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{e} \quad \sin\phi = \frac{x_0}{A} \quad \cos\phi = \frac{v_0}{A\omega}$$

La costante A rappresenta l'ampiezza dell'oscillazione e ϕ la fase.

In base a questo modello la massa continua ad oscillare senza mai fermarsi. Un modello più realistico è però quello che prevede che la molla tenda nel tempo a smorzare le sue oscillazioni; è necessario dunque introdurre nel modello un fattore di smorzamento che prevede, ad esempio, un rallentamento proporzionale alla sua velocità y'; il nuovo modello è dato dall'equazione

$$y'' = -k^2 y - hy' \qquad \text{con} \qquad k^2 \neq 0 \ \wedge \ h > 0$$

L'equazione ottenuta è lineare omogenea ed ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 + h\lambda + k^2 = 0$$

Il discriminante di questa equazione dipende dai valori di k e di h ed è $h^2 - 4k^2$.

Distinguiamo allora tre casi:

- $h^2 - 4k^2 > 0$

  la soluzione dell'equazione è $y = c_1 e^{\frac{-h+\sqrt{h^2-4k^2}}{2}t} + c_2 e^{\frac{-h-\sqrt{h^2-4k^2}}{2}t}$

  In questo caso la resistenza che provoca lo smorzamento è molto elevata rispetto alla costante di richiamo della molla che tende a portarsi asintoticamente nella posizione di riposo senza compiere oscillazioni e per $t \rightarrow +\infty$ si ha che $y(t) \rightarrow 0$ (***figura 11a***).

- $h^2 - 4k^2 < 0$

  la soluzione dell'equazione è $y = e^{-\frac{1}{2}ht}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$ dove $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4k^2 - h^2}$

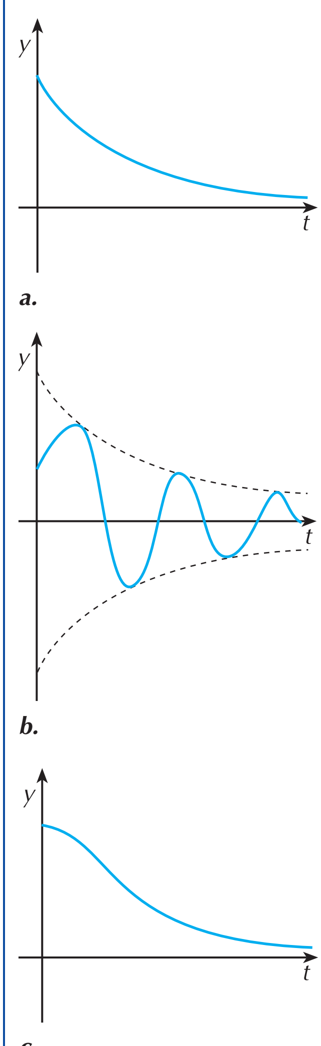
  In questo secondo caso il movimento è oscillatorio ma le oscillazioni tendono comunque a smorzarsi per $t \rightarrow +\infty$ (di nuovo $y(t) \rightarrow 0$) (***figura 11b***).

- $h^2 - 4k^2 = 0$

  la soluzione dell'equazione è $y = (c_1 t + c_2)e^{-\frac{1}{2}ht}$

  Siamo ora in presenza di una situazione critica di transizione fra le due precedenti; il moto è ancora smorzato e $y(t)$ tende a zero esponenzialmente (***figura 11c***).

Figura 11



I concetti e le regole

Le equazioni differenziali e le caratteristiche

Un'**equazione differenziale** è un'equazione che ha come incognita una funzione $y = f(x)$ e nella quale, oltre alla variabile indipendente x, compaiono la funzione stessa e le sue derivate.
Le funzioni $y = f(x)$ che soddisfano un'equazione differenziale costituiscono il suo **integrale generale**. Tali funzioni sono, di solito, in numero infinito; tuttavia, se sono note ulteriori informazioni sulla funzione f, per esempio il passaggio per un punto, si ottiene una sola funzione che costituisce un **integrale particolare** dell'equazione.
Un'equazione differenziale si dice poi:

- del **primo ordine** se ha la forma $F(x, y, y') = 0$, cioè se contiene al massimo la derivata prima della funzione; in questo caso l'integrale generale dipende da una sola costante
- del **secondo ordine** se ha la forma $F(x, y, y', y'') = 0$, cioè se contiene al massimo la derivata seconda della funzione; in questo caso l'integrale generale dipende da due costanti.

Le equazioni del primo ordine

Fra le equazioni differenziali del primo ordine abbiamo considerato quelle:

- **della forma $y' = f(x)$**
  l'integrale generale è una primitiva della funzione $f(x)$: $\quad y = \int f(x)dx + c$
- a **variabili separabili** riconducibili alla forma: $\dfrac{y'}{h(y)} = g(x)$
  l'integrale generale si ottiene calcolando l'integrale dei due membri: $\displaystyle\int \frac{y'}{h(y)}dx = \int g(x)dx$
- **lineari omogenee** $y' + p(x)y = 0$
  l'integrale generale è: $\quad y = k \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$
- **lineari non omogenee** $y' + p(x)y = q(x)$
  l'integrale generale ha la forma: $\quad y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}dx + c\right]$

Le equazioni del secondo ordine

Fra le equazioni differenziali del secondo ordine abbiamo considerato quelle:

- **della forma $y'' = f(x)$**
  l'integrale generale si ottiene integrando due volte la funzione
- **lineari omogenee a coefficienti costanti** $\quad y'' + py' + qy = 0$
  considerata l'equazione caratteristica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ e indicato con Δ il suo discriminante, si ha che:
  - se $\Delta > 0$, indicate con λ_1 e λ_2 le soluzioni dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è
    $y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
  - se $\Delta = 0$, indicata con $\overline{\lambda}$ la soluzione dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è
    $y = e^{\overline{\lambda}x}(c_1 + c_2x)$
  - se $\Delta < 0$, poste uguali a $\alpha \pm i\beta$ le soluzioni dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è
    $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

ESERCIZI CAPITOLO 2

Modelli ed equazioni differenziali

LE DEFINIZIONI

la teoria è a pag. 2

Comprensione

1 Indica quali fra le seguenti sono equazioni differenziali:

a. $xy + y' = 1$ **b.** $2x^2 + 3xy = y$ **c.** $y' - y'' = x$ **d.** $y - 3xy = y'$

2 Indica qual è l'ordine delle seguenti equazioni differenziali:

a. $2y' - 5y^2 + 2x = 7$ **b.** $y''' - y + 2x = 0$ **c.** $y'' - 3y' = 0$ **d.** $y' - 4y - x^2 = 0$

3 Data un'equazione differenziale, spiega che cos'è:

a. un integrale particolare
b. l'integrale generale
c. un integrale singolare.

4 Stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere.
L'integrale generale di un'equazione differenziale:

a. dipende da una sola costante se l'equazione è del primo ordine V F
b. dipende da due o più costanti se è del secondo ordine V F
c. dipende da due costanti se è del secondo ordine V F
d. dipende da una o più costanti se è del primo ordine. V F

Applicazione

Verifica che le funzioni indicate nei seguenti esercizi sono soluzioni dell'equazione differenziale a fianco segnata.

5 $y = e^x(x^2 + x) + xe^{2x}$ $\qquad y'' - 5y' + 6y = e^x(2x^2 - 4x - 1) - e^{2x}$

6 $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{2}$ $\qquad xy''' + y'' = 1 + x$

7 $y = 2e^{-x}$ $\qquad y''' + y = 0$

8 $y = \ln|e^{2x} + 1| - 1$ $\qquad y'' + (y')^2 = \dfrac{4e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

9 $y = \cos x - \sin x - \dfrac{1}{2}x\cos x$ $\qquad y'' + y = \sin x$

10 $y = \ln(x^2 + 1) - 3$ $\qquad y'' + (y')^2 = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

11 $y = x\sin x$ $\qquad y'' + y' + y = (x + 2)\cos x + \sin x$

Comprensione

12 L'integrale generale dell'equazione $y' - 4x^2 + x = 0$ è:

a. $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ **b.** $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$ **c.** $y = 4x^2 - x + c$

13 L'equazione $y' + 2xy = 0$:

a. è un'equazione differenziale che si può considerare:

① a variabili separabili ② lineare omogenea ③ lineare non omogenea

b. il suo integrale generale è:

① $y = \ln(2x)$ ② $y = ke^{x^2}$ ③ $y = ke^{-x^2}$

14 L'integrale generale di un'equazione differenziale è la funzione $y = ke^{2x} + x - 2$; l'integrale particolare che soddisfa la condizione $y(0) = 1$ ha equazione:

a. $y = -e^{2x} + x - 2$ **b.** $y = x - 2$ **c.** $y = 2e^{2x} + x - 2$ **d.** $y = 3e^{2x} + x - 2$

15 Considerata l'equazione $y' - x^2 y = 0$:

a. il suo integrale generale è:

① $y = c_1 e^{x^2}$ ② $y = c_1 e^{\frac{1}{3}x^3}$ ③ $y = c_1 e^{x^3}$

b. l'integrale che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 2$ è:

① $y = 2e^{x^3}$ ② $y = e^{\frac{1}{3}x^3}$ ③ $y = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$

16 Data l'equazione $y' + p(x)y = q(x)$ e indicata con $P(x)$ una primitiva di $p(x)$, l'integrale generale è:

a. $y = e^{P(x)}\left[\int q(x) \cdot e^{-P(x)} dx + c\right]$

b. $y = e^{-P(x)}\left[\int q(x) \cdot e^{P(x)} dx + c\right]$

c. $y = P(x)\left[\int q(x)P(x)\, dx + c\right]$

Applicazione

Equazioni della forma $y' = f(x)$

RICORDA

■ L'equazione differenziale $y' = f(x)$ ha come integrale generale la funzione $y = \int f(x)dx + c$

N.B.: Nei risultati tutte le costanti numeriche sono state riassunte nel parametro c o k.

Risolvi le seguenti equazioni differenziali della forma $y' = f(x)$.

17 $y' = 3x^2 - 4x$ $[y = x^3 - 2x^2 + c]$

18 $y' = x \ln x$ $\left[y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + c\right]$

19 $y' = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$ $\left[y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + c\right]$

20 $y' = \dfrac{x^2+1}{x}$ $\left[y = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + c\right]$

21 $y' = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x + 1$ $\left[y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + x + c\right]$

22 $y' = e^x + x^2$ $\left[y = e^x + \frac{1}{3}x^3 + c\right]$

23 $y' = -2x + \dfrac{1}{x}$ $\left[y = -x^2 + \ln|x| + c\right]$

24 $y' = x + \sin x$ $\left[y = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c\right]$

25 $y' = x\, e^{x^2}$ $\left[y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c\right]$

26 $y' = \sqrt{4-x}$ $\left[y = -\frac{2}{3}\sqrt{(4-x)^3} + c\right]$

27 $y' = x \sin 3x$ $\left[y = -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c\right]$

28 $y' = \dfrac{1}{\cos x}$ $\left[y = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + c\right]$

29 $y' = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ $\left[y = \frac{1+\ln x}{x} + c\right]$

Determina l'integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali che soddisfa alla condizione iniziale indicata.

30 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} y' = -x^2 + 4 \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione è $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + c$.

Per determinare il valore di c calcoliamo $y(3)$ e imponiamo che sia uguale a 1:

$$y(3) = -9 + 12 + c \qquad \text{quindi} \qquad c + 3 = 1 \qquad \text{da cui} \qquad c = -2$$

L'integrale particolare richiesto ha equazione $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 2$.

31 $\begin{cases} y' = \sin x + \cos x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$ $[y = -\cos x + \sin x - 2]$

32 $\begin{cases} y' = \sqrt{x-2} \\ y(3) = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\left[y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}\right]$

33 $\begin{cases} y' = \cos 2x - x \\ y(-\pi) = \dfrac{\pi^2}{2} \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}x^2 + \pi^2\right]$

34 $\begin{cases} y' = -e^{4x} + \dfrac{1}{4}x \\ y(0) = -1 \end{cases}$ $\left[y = -\dfrac{1}{4}e^{4x} + \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{3}{4}\right]$

35 $\begin{cases} y' = e^x + e^{-x} \\ y(-1) = -e \end{cases}$ $[y = e^x - e^{-x} - e^{-1}]$

36 $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x+1} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $[y = x - \ln|x+1| + 2]$

37 $\begin{cases} y' = \dfrac{4-3x}{x^2-x} \\ y(2) = -1 \end{cases}$ $\left[y = \ln\left|\dfrac{x-1}{x^4}\right| + \ln 16 - 1\right]$

38 $\begin{cases} y' = \dfrac{2x^2}{2x+1} \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - x + \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + 1\right)\right]$

39 $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$ $[y = -2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{2}]$

Equazioni a variabili separabili

RICORDA

- L'equazione a variabili separabili $\dfrac{1}{h(y)} \cdot y' = g(x)$ ha come integrale generale la funzione che si ottiene integrando entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{h(y)} \cdot y' dx = \int g(x) dx$$

Determina l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

40 **ESERCIZIO GUIDA**

$y' - \dfrac{1}{2}xy = 0$

Separiamo le variabili nell'ipotesi che sia $y \neq 0$: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}x$

Integriamo entrambi i membri rispetto a x: $\displaystyle\int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{1}{2}x\, dx$

L'integrale al primo membro restituisce $\ln|y|$, quello al secondo membro $\dfrac{1}{4}x^2 + c$.

L'integrale generale dell'equazione è quindi: $\ln|y| = \dfrac{1}{4}x^2 + c$

Esplicitiamo la funzione rispetto a y:

$$|y| = e^{\frac{1}{4}x^2+c} \qquad \to \qquad y = ke^{\frac{1}{4}x^2} \qquad \text{dove abbiamo posto } k = \pm e^c$$

Anche la funzione $y = 0$ è soluzione dell'equazione data e si ottiene per $k = 0$.

41 $2y' + 5\sqrt{x}(y-1) = 0$ $\qquad$ $3xy' - y = 0$ $\qquad$ $\left[y = ke^{-\frac{5}{3}\sqrt{x^3}} + 1;\ y = k\sqrt[3]{x}\right]$

42 $y' + \dfrac{3x^2}{y} = 0$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}y' + x^2\sqrt{y} = 0$ $\qquad$ $\left[y = \pm\sqrt{-2x^3+c};\ y = \left(-\dfrac{x^3}{3}+c\right)^2;\ y = 0\right]$

43 $y' - 10xy^2 = 0$ $\qquad$ $y' = x^3y - 2y$ $\qquad$ $\left[y = \dfrac{1}{-5x^2+c};\ y = ke^{\frac{1}{4}x^4-2x}\right]$

44 $y' = xy - x + y - 1$ $\qquad$ $y' = 4x\sqrt{y}$ $\qquad$ $\left[y = ke^{\frac{1}{2}x^2+x} + 1;\ y = (x^2+c)^2;\ y = 0\right]$

45 $y' = xe^{-y}$ $\qquad$ $x^2y' + 5xy + y = 0$ $\qquad$ $\left[y = \ln\left(\dfrac{1}{2}x^2 + c\right);\ y = k\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}\right]$

46 $4y' - y\cos x = 0$ $\qquad$ $(x-4)y' = xy$ $\qquad$ $\left[y = ke^{\frac{1}{4}\sin x};\ y = k(x-4)^4\cdot e^x\right]$

47 $\dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{y}x = 0$ $\qquad$ $\dfrac{x+1}{x}\cdot y' = y$ $\qquad$ $\left[y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}x^3 + c};\ y = k\dfrac{e^x}{|x+1|}\right]$

48 $yy' = \cos x$ $\qquad$ $2e^xy' = \dfrac{x}{y}$ $\qquad$ $\left[y = \pm\sqrt{2\sin x + c};\ y^2 = -e^{-x}(x+1) + c\right]$

49 $(x^2-1)y' = y$ $\qquad$ $x^2y' + y^2 - 1 = 0$ $\qquad$ $\left[y = k\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|};\ y = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}+k}{k-e^{\frac{2}{x}}} \vee y = \pm 1\right]$

50 $(x^2-1)y' + y = 0$ $\qquad$ $y' = x(y+y^3)$ $\qquad$ $\left[y = c\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}};\ y^2 = \dfrac{e^{x^2}}{k-e^{x^2}} \vee y = 0\right]$

Determina l'integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili che soddisfa alla condizione iniziale indicata.

51 $\begin{cases} xy' - y = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$ $\qquad$ $[y = -x]$

52 $\begin{cases} (x+1)y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\left[y = \dfrac{1}{1-\ln(x+1)}\right]$

53 $\begin{cases} y' = xe^{-y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\left[y = \ln\left(\dfrac{1}{2}x^2 + 1\right)\right]$

54 $\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\left[y = \dfrac{1}{x^2}\right]$

55 $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2-1} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\qquad$ $[y = -2x^2 + 2]$

56 $\begin{cases} y' = (2x-1)e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $[y = e^x(2x-3) + e]$

57 $\begin{cases} y' = (x-1)\sqrt{y-3} \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $\left[y = 3 \ \vee \ y = \frac{1}{16}(x-1)^4 + 3\right]$

58 $\begin{cases} y' - \sqrt[3]{y^2} \cdot \ln x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{27}(x \ln x - x + 4)^3\right]$

59 $\begin{cases} y' - y\sqrt{x} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\left[y = e^{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}\right]$

60 Determina la curva integrale dell'equazione $y' = \dfrac{(2x+1)(y+1)}{x^2+x+1}$, passante per l'origine degli assi, quindi tracciane il grafico. $[y = x^2 + x]$

61 Determina la curva integrale dell'equazione $3x(x-2)y' - 4(2x-1)y = 0$, passante per il punto $P(1, 1)$. Disegna quindi il grafico relativo. $\left[y = \sqrt[3]{x^2}\,(x-2)^2\right]$

62 Scrivi le equazioni delle curve integrali di $(x^2-1)y' = \dfrac{x(y^2-1)}{y}$ passanti per $R\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$; studia poi il loro andamento. $\left[y = -\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+1}\right]$

Equazioni lineari

RICORDA

- Un'equazione lineare omogenea ha la forma $y' + p(x)y = 0$ ed il suo integrale generale è $y = ke^{-\int p(x)dx}$;
- un'equazione lineare non omogenea ha la forma $y' + p(x)y = q(x)$ ed il suo integrale è

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

Risolvi le seguenti equazioni lineari omogenee.

63 **ESERCIZIO GUIDA**

$y' - y \sin x = 0$

Essendo $p(x) = -\sin x$ si ha che $-\int p(x)dx = -\cos x$

L'integrale generale dell'equazione è quindi $y = ke^{-\cos x}$

64 $2y' + 5y = 0$ (Suggerimento: hai che $p(x) = \dfrac{5}{2}$, quindi.....) $\left[y = ke^{-\frac{5}{2}x}\right]$

65 $y' = 3y$ $\qquad -2y' - 2y = 0$ $\left[y = ke^{3x};\ y = ke^{-x}\right]$

66 $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$ $\qquad y' - 10y = 0$ $\left[y = ke^{\frac{1}{2}x};\ y = ke^{10x}\right]$

67 $y' + x^2y = 0$ $\qquad y' - y\cos x = 0$ $\left[y = ke^{-\frac{1}{3}x^3};\ y = ke^{\sin x}\right]$

68 $3xy' - y = 0$ $\qquad y' - 2\sqrt{x}y = 0$ $\left[y = k\sqrt[3]{x};\ y = ke^{\frac{4}{3}\sqrt{x^3}}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni lineari non omogenee.

69 **ESERCIZIO GUIDA**

$y' - 8xy = x$

In questa equazione: $p(x) = -8x \qquad q(x) = x$.

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito di $p(x)$: $P(x) = \int -8x\, dx = -4x^2$

Applichiamo la formula che determina l'integrale generale: $y = e^{4x^2}\left[\int x\, e^{-4x^2} dx\right]$

ed essendo $\int x\, e^{-4x^2}\, dx = -\frac{1}{8} e^{-4x^2}$

si ha che $y = e^{4x^2}\left[-\frac{1}{8} e^{-4x^2} + c\right] \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{8} + ce^{4x^2}$

70 $y' - y = 2x$ $[y = ce^x - 2x - 2]$

71 $y' + xy - x = 0$ $\left[y = ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 1\right]$

72 $y' = 2y + x^2$ $\left[y = ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right]$

73 $y' - y = e^{2x}$ $[y = e^{2x} + ce^x]$

74 $y' = 2y - 2x^3$ $\left[y = ce^{2x} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right]$

75 $y' - y = \sin x$ $\left[y = ke^x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right]$

76 $y' + \frac{2}{x}y = e^x$ $\left[y = e^x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + \frac{c}{x^2}\right]$

77 $y' = \frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}$ $[y = cx - \ln x - 1]$

78 $xy' + y - e^x = 0$ $\left[y = \frac{e^x + c}{x}\right]$

79 $xy' - y - x^2 \cos x = 0$ $[y = x\,(\sin x + c)]$

80 $y' = x - 2y$ $\left[y = \frac{1}{4}(ce^{-2x} - 1 + 2x)\right]$

Risolvi le seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti.

81 **ESERCIZIO GUIDA**

$y' + y + 1 = 0$

È un'equazione lineare a coefficienti costanti con $p(x) = 1$ e $q(x) = -1$.

Applichiamo subito la formula risolutiva:

$$y = e^{-\int dx}\left[\int -1 \cdot e^{\int dx}\, dx + c\right] \quad \rightarrow \quad y = e^{-x}(-e^x + c) \quad \rightarrow \quad y = -1 + c \cdot e^{-x}$$

82 $y' - 5y = 3$ $\quad 3y' - 6y = 1$ $\quad \left[y = -\frac{3}{5} + ce^{5x};\ y = -\frac{1}{6} + ce^{2x}\right]$

83 $2y' + 4y + 3 = 0$ $\quad y' - 5y = 0$ $\quad \left[y = -\frac{3}{4} + ce^{-2x};\ y = ke^{5x}\right]$

84 $y' - e - 2y = 0$ $\quad 7y' - 2y + 14 = 0$ $\quad \left[y = ce^{2x} - \frac{1}{2}e;\ y = 7 + ce^{\frac{2}{7}x}\right]$

85 $-3y' + 12y = 4$ $\quad 5y' + y + 10 = 0$ $\quad \left[y = \frac{1}{3} + ce^{4x};\ y = -10 + ce^{-\frac{1}{5}x}\right]$

Determina l'integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali lineari che soddisfano la condizione iniziale indicata.

86 $\begin{cases} y' + 3y - 3x = 0 \\ y(0) = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\quad \left[y = e^{-3x} + x - \frac{1}{3}\right]$

87 $\begin{cases} y' - xy = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad \left[y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1\right]$

88 $\begin{cases} y' - 2xy + 2x^3 = 0 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$ $\quad \left[y = x^2 + 1\right]$

89 $\begin{cases} y' = y + \cos x \\ y(\pi) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \left[y = \frac{\sin x - \cos x}{2}\right]$

90 $\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = -x^3 \\ y(-1) = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\quad \left[y = -\frac{1}{3}x^4 - x\right]$

91 $\begin{cases} y' - 4xy + 6x = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\quad \left[y = \frac{1}{2}\left(e^{2x^2} + 3\right)\right]$

92 $\begin{cases} y' - \frac{y}{x} - 2x^2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ $\quad \left[y = x^3 + x\right]$

93 $\begin{cases} y' - xy = x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad \left[y = -x^2 - 2 + 2e^{\frac{x^2}{2}}\right]$

94 $\begin{cases} y' - 2y = \sin x \\ y(\pi) = \frac{1}{5} \end{cases}$ $\quad \left[y = -\frac{\cos x + 2\sin x}{5}\right]$

LE EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE

la teoria è a pag. 12

Comprensione

95 L'integrale generale dell'equazione $y'' = 2x$ è:

a. $y = x^2 + c$ **b.** $y = x^3 + c_1x + c_2$ **c.** $y = \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$ **d.** $y = \frac{x^3}{3} + x + c_2$

96 Quale, tra quelle proposte, è l'integrale generale dell'equazione $y'' - 3x = 0$?

a. $y = \frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2$ **b.** $y = \frac{1}{2}x^3 + c_1 x$ **c.** $y = c_1 x^3 + c_2 x + 1$ **d.** $y = \frac{1}{2}x^3 + c_1 x^2 + c_2 x$

97 Un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti ha la forma:

a. $y'' + py' + q = 0$ **b.** $y'' + py' + qx = 0$ **c.** $y'' + py' + qy = 0$

98 L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale $y'' - 3y' + 4y = 0$ è:

a. $-3\lambda + 4 = 0$ **b.** $\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$ **c.** $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ **d.** $\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$

99 Completa scrivendo l'integrale generale dell'equazione lineare omogenea che ha l'equazione caratteristica assegnata:

a. $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ $y =$ ....

b. $\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$ $y =$ ....

c. $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ $y =$ ....

100 Quale tra le seguenti funzioni rappresenta l'integrale generale dell'equazione $y'' + y' - 2y = 0$?

a. $y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$ **b.** $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

c. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$ **d.** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

Applicazione

Equazioni della forma $y'' = f(x)$

Risolvi le seguenti equazioni differenziali della forma $y'' = f(x)$.

101 **ESERCIZIO GUIDA**

$y'' = -3$

Si ha che $y' = \int -3dx = -3x + c_1$ allora $y = \int (-3x + c_1)dx = -\frac{3}{2}x^2 + c_1 x + c_2$

102 $y'' = x + 1$ $\left[y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2\right]$

103 $y'' = -x^2 + 2$ $\left[y = -\frac{1}{12}x^4 + x^2 + c_1 x + c_2\right]$

104 $y'' = x^3 + 6x^2 - x$ $\left[y = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2\right]$

105 $y'' = \frac{1}{x}$ $[y = x \ln |x| + c_1 x + c_2]$

106 $y'' = -\frac{2}{x^2}$ $[y = \ln x^2 + c_1 x + c_2]$

107 $y'' = \sqrt{x}$ $\left[y = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} + c_1 x + c_2\right]$

108 $y'' = \sin x - \cos x$ $[y = -\sin x + \cos x + c_1 x + c_2]$

109 $y'' = x \sin 2x$ $\left[y = -\frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + c_1 x + c_2\right]$

110 $y'' = e^{-x} + x$ $\left[y = e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2\right]$

111 $y'' = \dfrac{6}{(x-2)^3}$ $\left[y = \frac{3}{x-2} + c_1 x + c_2\right]$

Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

RICORDA

- Un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti assume la forma
  $y'' + py' + qy = 0$ con $p, q \in R$
- Si dice equazione caratteristica dell'equazione lineare omogenea la relazione $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
- L'integrale generale dell'equazione lineare omogenea dipende dal discriminante dell'equazione caratteristica e, indicate con λ_1 e λ_2 le sue soluzioni, si ha che
  - $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ se $\Delta > 0$
  - $y = c_1 e^{\bar{\lambda} x} + c_2 x\, e^{\bar{\lambda} x}$ se $\Delta = 0$ $(\bar{\lambda} = \lambda_1 = \lambda_2)$
  - $y = e^{\alpha x}\,(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ se $\Delta < 0$ $(\lambda_1 = \alpha + i\beta;\ \lambda_2 = \alpha - i\beta)$

Calcola l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.

112 **ESERCIZIO GUIDA**

$y'' - 16y = 0$

Scriviamo l'equazione caratteristica e troviamone le soluzioni: $\lambda^2 - 16 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = \pm 4$

Avendo ottenuto soluzioni reali e distinte, le soluzioni dell'equazione differenziale sono la famiglia di funzioni

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}$$

113 $y'' - 5y' + 6y = 0$ $y'' - 2y' + y = 0$ $[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x};\ y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}]$

114 $y'' - y' = 0$ $y'' + 5y' + 4y = 0$ $[y = c_1 e^{x} + c_2;\ y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}]$

115 $4y'' + 4y' + y = 0$ $y'' - 2y = 0$ $\left[y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x};\ y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}\right]$

116 $y'' + y = 0$ $3y'' - 4y' - 4y = 0$ $\left[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x;\ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}\right]$

117 $2y'' - 5y' - 3y = 0$ $y'' + 2y' + 5y = 0$ $\left[y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x};\ y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)\right]$

118 $2y'' - y = 0$ $y'' - 6y' + 9y = 0$ $\left[y = c_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x};\ y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}\right]$

119 $y'' - y' - 2y = 0$ $y'' - 4y' + 13y = 0$ $[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x};\ y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)]$

120 $y'' - y' - 6y = 0$ $3y'' - 12y = 0$ $[y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x};\ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}]$

121 $y'' + 3y' + 3y = 0$ $\left[y = e^{-\frac{3}{2}x}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]\right]$

122 $5y'' - 11y' + 6y = 0$ $\left[y = c_1 e^{x} + c_2 e^{\frac{6}{5}x}\right]$

123 $y'' - 2y' + 5y = 0$ $[y = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)]$

APPROFONDIMENTI *Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti*

Risolvi le seguenti equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti in cui $r(x)$ è un polinomio.

124 **ESERCIZIO GUIDA**

$y'' + 2y' - 3y = 1$

Ricordiamo che se $r(x)$ è un polinomio di grado n, allora y_0 è:

- un polinomio di grado n se $q \neq 0$
- un polinomio di grado $n+1$ se $q = 0 \ \wedge \ p \neq 0$
- un polinomio di grado $n+2$ se $q = 0 \ \wedge \ p = 0$ (in questo caso si può anche eseguire una doppia integrazione)

Nel nostro caso $r(x)$ ha grado zero, $q \neq 0$ e quindi y_0 è un polinomio di grado zero, cioè una costante; posto dunque $y_0 = k$ si ha che $y_0' = y_0'' = 0$ e sostituendo nell'equazione:

$$0 + 0 - 3k = 1 \qquad \text{da cui} \qquad k = -\frac{1}{3}$$

L'equazione omogenea associata $y'' + 2y' - 3y = 0$ ha equazione $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

ed è $\lambda_1 = -3 \ \vee \ \lambda_2 = 1$. La sua soluzione è quindi $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$ e l'integrale generale dell'equazione data è

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}$$

125 $y'' + 2y = 4$ $\left[y = c_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{2}x\right) + 2\right]$

126 $\frac{1}{2}y'' + 3y' = -2$ $\left[y = c_1 e^{-6x} - \frac{2}{3}x + c_2\right]$

127 $y'' - 4y = x$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x\right]$

128 $y'' + y' = 3x^2 + 3$ $[y = c_1 + c_2 e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 9x]$

129 $y'' + y = 2x^2$ $[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2x^2 - 4]$

130 $y'' - 3y' + 2y = x + 5$ $\left[y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{13}{4}\right]$

131 $2y'' - 3y' + y = x^2 + x + 1$ $\left[y = c_1 e^{x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + x^2 + 7x + 18\right]$

132 **ESERCIZIO GUIDA**

$y'' - y = e^{2x}$

Se $r(x)$ ha la forma $s(x)e^{\alpha x}$ dove $s(x)$ in questo caso ha grado zero, anche y_0 ha la stessa forma. Si devono poi distinguere due casi:

- α non è soluzione dell'equazione caratteristica associata ed allora $y_0 = \bar{s}(x)e^{\alpha x}$ con $\bar{s}(x)$ polinomio dello stesso grado di $s(x)$;
- α è soluzione dell'equazione caratteristica associata ed allora $y_0 = x \cdot \bar{s}(x)e^{\alpha x}$.

Nel nostro caso l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda = \pm 1$; l'integrale generale dell'omogenea associata è quindi $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$. Poiché $\alpha = 2$ e non coincide con nessuno dei valori trovati per λ ed inoltre $s(x)$ ha grado zero, si ha che:

$$y_0 = ke^{2x} \qquad \text{ed è} \qquad y_0' = 2ke^{2x} \qquad y_0'' = 4ke^{2x}$$

Sostituendo nell'equazione troviamo che $4ke^{2x} - 2ke^{2x} = e^{2x} \quad \rightarrow \quad 2k = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$

L'integrale generale dell'equazione è quindi $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} e^{2x}$

133 $y'' + 2y' + y = 4e^x$ $\quad [y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^x]$

134 $y'' + 9y' + 20y = (x-1)e^x$ $\quad \left[y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-5x} + \left(\frac{1}{30}x - \frac{41}{900}\right)e^x\right]$

135 $y'' - y' - 12y = x^2 e^{2x}$ $\quad \left[y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x} - \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{50}x + \frac{19}{500}\right)e^{2x}\right]$

136 **ESERCIZIO GUIDA**

$y'' + 4y = 3 \cos x$

Ricordiamo che se $r(x)$ ha la forma $h \sin \beta x + k \cos \beta x$ anche y_0 ha la stessa forma. Si presentano due casi:

- il numero immaginario $i\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica associata ed allora $y_0 = a \cos \beta x + b \sin \beta x$;
- il numero immaginario $i\beta$ è soluzione dell'equazione caratteristica associata ed allora $y_0 = x\,(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$.

Nel nostro caso è $\beta = 1$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda = \pm 2i$; l'integrale generale dell'omogenea associata è quindi $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Si verifica allora la prima delle condizioni ed è perciò

$$y_0 = a \cos x + b \sin x \qquad y_0' = -a \sin x + b \cos x \qquad y_0'' = -a \cos x - b \sin x$$

Sostituendo nell'equazione troviamo $-a \cos x - b \sin x + 4a \cos x + 4b \sin x = 3 \cos x$

$$3a \cos x + 3b \sin x = 3 \cos x \qquad \text{da cui} \qquad a = 1 \quad \text{e} \quad b = 0$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \cos x$.

137 $4y'' + 3y = \sin x + \cos x$ $\quad \left[y = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sin x - \cos x\right]$

138 $y'' + 4y = \sin 2x$ $\quad \left[y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x\right]$

139 $2y'' - 4y' + 4y = 5\,(\sin x - \cos x)$ $\quad \left[y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{2} \sin x\right]$

140 $y'' - 3y' + 2y = -4 \cos x - 2 \sin x$ $\quad [y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \sin x - \cos x]$

Determina l'integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali che soddisfa le condizioni iniziali indicate.

141 $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(\pi) = -1 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$ $[y = -\cos 2x]$

142 $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $[y = \cos x]$

143 $\begin{cases} y'' - 2y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 2e \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{e}(e^{2x} - 1)\right]$

144 $\begin{cases} \frac{1}{2}y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $[y = e^{-x}(\cos x + \sin x)]$

145 $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 3e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $[y = xe^x]$

ESERCIZI RIASSUNTIVI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Risolvi le seguenti equazioni differenziali di vario tipo.

146 $y'(x+3)^2 = x - 1$ $\left[y = \ln|x+3| + \frac{4}{x+3} + c\right]$

147 $xy' = y + x^3$ $\left[y = cx + \frac{x^3}{2}\right]$

148 $4y' - y\cos x = 0$ $\left[y = ke^{\frac{1}{4}\sin x}\right]$

149 $y'' + 25y = 0$ $[y = c_1\cos 5x + c_2\sin 5x]$

150 $y' + 7y = 3$ $\left[y = ce^{-7x} + \frac{3}{7}\right]$

151 $(x-4)y' = xy$ $[y = k(x-4)^4 \cdot e^x]$

152 $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{y}x = 0$ $\left[y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k}\right]$

153 $xy' - 2y = 0$ $[y = kx^2]$

154 $xy - y' = x$ $\left[y = 1 + ke^{\frac{x^2}{2}}\right]$

155 $9y'' + 15y' - 6y = 0$ $\left[y = c_1e^{\frac{1}{3}x} + c_2e^{-2x}\right]$

156 $\dfrac{x+1}{x}y' = y$ $\left[y = k\dfrac{e^x}{|x+1|}\right]$

157 $yy' = \cos x$ $\left[y = \pm\sqrt{k + 2\sin x}\right]$

158 $y'' = 2x - 5$ $\left[y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + c_1 x + c_2\right]$

MODELLI DESCRITTI DA EQUAZIONI DIFFERENZIALI

la teoria è a pag. 17

Applicazione

Problemi che hanno come modello un'equazione del primo ordine

159 La velocità di un corpo che si muove lungo una retta è funzione della sua coordinata x e del tempo t. Determina la legge oraria del moto sapendo che $v(x, t) = \dfrac{2x}{t}$ e che nell'istante $t = 1$ la coordinata del corpo è $x = 5$. $[x = 5t^2]$

160 Determina, in funzione del tempo t, la quantità di carica che passa in un circuito di resistenza $R = 10\Omega$ alimentato da un generatore di differenza di potenziale di 20Volt. $[q(t) = (2t + c)\mathrm{C}]$

161 Sia $E(x)$ l'energia potenziale di un punto P libero di muoversi lungo l'asse x e soggetto ad una forza espressa, in opportune unità di misura, dalla funzione $f(x) = (x^3 - x)e^{-x^2}$. Sapendo che $E'(x) = -f(x)$ e che $E(0) = 1$, trova la funzione $E(x)$ e calcola il valore assunto dall'energia potenziale nei punti in cui la forza è nulla oltre l'origine. $\left[E(x) = \dfrac{x^2}{2e^{x^2}} + 1;\ E(\pm 1) = \dfrac{1+2e}{2e}\right]$

162 **ESERCIZIO GUIDA**

Un gas perfetto monoatomico avente una temperatura iniziale T_0 subisce una trasformazione adiabatica reversibile. Determina la funzione $T = f(V)$ della temperatura assoluta T in funzione del volume V.

Nelle trasformazioni adiabatiche non si ha scambio di calore e quindi, per il primo principio della termodinamica, si può scrivere $dU = -dL = -PdV$ (dove U rappresenta l'energia interna del gas, L il lavoro da esso effettuato e P la pressione esterna).

Ricorda inoltre che $P = \dfrac{nRT}{V}$ (essendo la trasformazione reversibile la pressione esterna è uguale a quella interna), e che $dU = nC_v dT$ (dove n è il numero di moli di gas, C_v è il calore molare a volume costante e R è la costante dei gas; per i gas monoatomici $C_v = \dfrac{3}{2}R$).

In base al primo principio della termodinamica si può scrivere $\dfrac{3}{2}nRdT = -nRT\dfrac{dV}{V}$ da cui, separando le variabili ottieni l'equazione differenziale $\dfrac{dT}{T} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{dV}{V}$. $\left[T = T_0\sqrt[3]{\dfrac{V_0^2}{V^2}}\right]$

163 Determina, in funzione del tempo t, l'intensità di corrente che fluisce in un circuito di induttanza $L = 1{,}5\mathrm{H}$ e resistenza $R = 2\Omega$, alimentato da un generatore di forza elettromotrice costante $V = 12$ Volt. Supponendo che $i(0) = 0$, calcola $i(1)$.

(Suggerimento: l'equazione del circuito è $L\dfrac{di}{dt} + Ri = V$) $\left[i(t) = 6\left(1 - e^{-\frac{4}{3}t}\right)A;\ i(1) = 6\left(1 - e^{-\frac{4}{3}}\right)\right]$

164 Un capitale $C(t)$ aumenta ad un tasso proporzionale all'ammontare del capitale stesso all'epoca attuale $t = 0$, secondo la relazione $C'(t) = 0{,}35\ C(0) \cdot C(t)$, con $C(t) > 0$. Sapendo che il capitale ammontava a 1 milione di euro un anno fa e a 2 milioni di euro oggi, calcola a quanto ammonterà fra 6 mesi.
(Suggerimento: i dati del problema consigliano di considerare ad oggi il tempo 0; si ha così che $C(0) = 2$ e $C(-1) = 1$. L'equazione differenziale assume quindi la forma $C'(t) = 0{,}35 \cdot 2 \cdot C(t)$ che puoi considerare a variabili separabili oppure come una lineare omogenea a coefficienti costanti con condizione iniziale $C(-1) = 1$).

[€ 2 857 651,12]

165 Considerati n atomi di una sostanza radioattiva, il numero di essi che si disintegrano, in un intervallo di tempo dt, è dato dal prodotto di n per il rapporto tra dt e la vita media T degli atomi della sostanza in esame. Determina l'andamento del numero di atomi non disintegrati $n(t)$ in funzione del tempo, supponendo che all'istante $t = 0$ sia $n(0) = n_0$.
(Suggerimento: considera che il numero di atomi che si disintegrano è uguale all'opposto della variazione dn del numero di atomi non disintegrati)

$\left[n = n_0\ e^{-\frac{1}{T}t}\right]$

166 **ESERCIZIO GUIDA**

Le pareti di un recipiente ermeticamente chiuso di spessore h hanno una superficie totale di area S. All'interno del recipiente è contenuta una massa m di una sostanza avente calore specifico c_m. Determina l'andamento della temperatura interna $T_i(t)$ in funzione del tempo sapendo che la temperatura esterna T_e è costante, che le pareti hanno una conducibilità termica k e che, inizialmente, la temperatura interna è $T_i = T_0$.

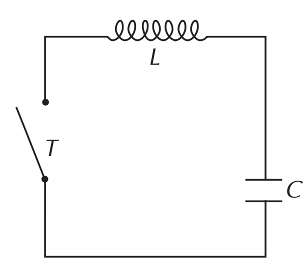
Ricorda che la quantità di calore dQ che fluisce in un intervallo di tempo dt attraverso una parete di superficie S, spessore h e conducibilità termica k è $dQ = -\dfrac{kS\ (T_i - T_e)}{h}\,dt$ (dove T_i e T_e indicano le temperature delle due facce della parete). Tieni presente che dQ è positivo quando la sostanza assorbe calore e negativo quando lo cede.

Ricorda inoltre che quando una sostanza di massa m e calore specifico c_m scambia una quantità di calore dQ la sua temperatura subisce una variazione $dt = \dfrac{dQ}{c_m\ m}$.

$\left[T_i = C\ e^{-pt} + T_e \quad \text{con} \quad C = T_0 - T_e \quad \text{e} \quad p = \dfrac{kS}{hm\ c_m}\right]$

Problemi che hanno come modello un'equazione del secondo ordine

167 Un circuito è formato da un'induttanza L e da un condensatore C posti in serie. Determina l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel circuito sapendo che, all'istante $t = 0$ in cui viene chiuso l'interruttore T, sulle armature del condensatore è presente una carica Q_0.
(Suggerimento: ricorda che, per il secondo principio di Kirchhoff, la somma delle d.d.p. V_C e V_L, presenti ai capi del condensatore e dell'induttanza, deve essere nulla ed inoltre che $V_C = \dfrac{Q}{C}$ e $V_L = L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d^2Q}{dt^2}$)



$\left[\begin{array}{l} Q(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{1}{LC}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\dfrac{1}{LC}}t\right); \\ \text{condizioni iniziali } Q(0) = Q_0 \text{ e } i(0) = 0 \text{ si ha che } c_1 = Q_0 \text{ e } c_2 = 0 \end{array}\right]$

168 Un corpo di massa $m = 10$kg si muove su un binario rettilineo sotto l'azione di una forza $F(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - t$;

all'istante $t = 0$ secondi il corpo si trova nell'origine del sistema di riferimento ed ha una velocità $v_0 = 1\text{m/s}$. Trova:

a. l'equazione oraria del moto del corpo

b. stabilisci a che distanza dall'origine si trova il corpo all'istante $t = 10\text{s}$ e che velocità ha in quel punto

c. trova la velocità minima e in quale istante viene raggiunta.

$$\left[\textbf{a}.\ y = \frac{1}{240}t^4 - \frac{1}{60}t^3 + t;\ \textbf{b}.\ \text{distanza} = 35\text{m},\ v = 12{,}7\text{m/s};\ \textbf{c}.\ v_{\min} = 0{,}93\text{m/s all'istante } t = 2s\right]$$

169 In un circuito, di resistenza trascurabile e di induttanza $L = 2{,}5\text{H}$, è inserito un condensatore di capacità $C = 10\,\mu\text{F}$. Sapendo che all'istante $t = 0$ la carica sulle armature è nulla e l'intensità della corrente è pari a $1\,m\text{A}$, studia, in funzione del tempo, l'andamento della carica sulle armature del condensatore.

(Suggerimento: applica la legge di Ohm generalizzata che, in questo caso, si riduce a $L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{Q}{C} = 0$ cioè $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + \dfrac{Q}{C} = 0$)

$$\left[Q = \sqrt{LC}\,\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = 5\,\sin\,\frac{t}{5}\right]$$

170 Un circuito di resistenza $R = 10\Omega$, induttanza $L = 1\text{H}$ è alimentato da un generatore di f.e.m. alternata la cui intensità, espressa in Volt, è data dalla funzione $V(t) = 220\,\sin\,(10\pi t)$. Sapendo che l'equazione del circuito è $L\dfrac{di}{dt} + Ri = V(t)$ e che $i(0) = 0A$, calcola, al variare del tempo t, l'intensità di corrente che fluisce nel circuito.

$$\left[i(t) = \frac{22}{\pi^2 + 1}\left[\pi e^{-10t} - \pi\,\cos(10\pi t) + \sin(10\pi t)\right]\right]$$

171 Un corpo di massa m è soggetto ad una forza elastica di richiamo $F = -kx$ (con $k > 0$), dove x indica la coordinata di m e k è la costante elastica della molla a cui m è vincolata. All'istante $t = 0$ la massa m si trova nel punto $x = x_0$ e la sua velocità è nulla.
Determina le funzioni $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ che rappresentano, rispettivamente, la posizione, la velocità e l'accelerazione di m in funzione del tempo.
(Suggerimento: devi applicare la legge fondamentale della dinamica $F = ma$, dove F rappresenta la forza agente sulla massa m e a l'accelerazione che m subisce sotto l'azione della forza F. Ricordando la definizione dell'accelerazione, la legge può essere scritta $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$)

$$\left[x(t) = x_0\,\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t;\ v(t) = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t;\ a(t) = -x_0\frac{k}{m}\ \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right]$$

172 Un recipiente di forma cubica e di base orizzontale è pieno di acqua. L'acqua scola da un piccolo foro situato alla base del recipiente e, ad ogni istante t (espresso in minuti), la velocità con cui varia l'altezza h (espressa in centrimetri) dell'acqua nel recipiente è direttamente proporzionale alla radice quadrata dell'altezza dell'acqua rimanente. Ciò è espresso dall'equazione differenziale:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h} \qquad \text{con} \quad k > 0$$

Nell'istante in cui l'altezza dell'acqua è 100cm, la velocità $\dfrac{dh}{dt}$ con cui varia questa altezza vale $-\dfrac{10}{3}\text{cm}\cdot\text{min}^{-1}$.

a. Verifica che, in tali condizioni, è $k = \dfrac{1}{3}$.

b. Determina la soluzione generale dell'equazione differenziale che ottieni per tale valore di k.

c. Si sa che $h = 100\text{cm}$ quando $t = 0$; determina la relazione tra h e t che verifica questa condizione iniziale.

d. Determina infine in quale istante il recipiente è vuoto. $\left[\textbf{b}.\ 6\sqrt{h} + t = c;\ \textbf{c}.\ 6\sqrt{h} + t = 60;\ \textbf{d}.\ t = 60\text{min}\right]$

173 Un corpo di massa m è sospeso ad una molla avente una costante elastica k. Il corpo viene mantenuto

fermo in una posizione tale che la molla risulti verticale e non deformata. All'istante $t = 0$ il corpo viene lasciato libero. Determina la legge oraria del moto del corpo assumendo come origine delle coordinate il punto iniziale $(x(0) = 0)$ e come verso positivo quello rivolto verso il basso.
(Suggerimento: con le convenzioni adottate, il corpo risulta soggetto alla forza elastica $F = -kx$ e alla forza peso $P = mg$)

$$\left[\begin{array}{l}\text{equazione}: x''(t) = g - \frac{k}{m}x(t);\ x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \vartheta\right) + \frac{mg}{k} \\ \text{con le condizioni iniziali } x(0) = x_0 \text{ e } v(0) = 0 \text{ si ha } A = -\frac{mg}{k} \text{ e } \vartheta = \frac{\pi}{2}\end{array}\right]$$

174 Un corpo in caduta libera incontra la resistenza dell'aria; nell'ipotesi in cui la forza resistente F_r sia proporzionale alla velocità del corpo e orientata in senso opposto, cioè $F_r = -kv$, e supponendo che il corpo sia inizialmente fermo:

a. scrivi la seconda legge di Newton per questo sistema

b. dimostra che l'accelerazione del corpo è nulla quando questo raggiunge una velocità, detta terminale, pari a $v_t = \frac{mg}{k}$

c. trova l'equazione della velocità e danne una rappresentazione grafica per un corpo di massa $m = 60\text{kg}$ e $k = 0{,}2$.

$\left[\mathbf{a}.\ mg - ky' = my'';\ \mathbf{c}.\ v = v_t\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]$

Per la verifica delle competenze

1 Calcola l'integrale dell'equazione differenziale $y' - y = 0$ che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 2$. Dopo averne tracciato il grafico, calcola l'area della parte di piano racchiusa dalla curva integrale e dall'asse x nell'intervallo $[0, 2]$. $[y' = 2e^x;\ 2(e^2 - 1)]$

2 Calcola l'integrale generale dell'equazione $(x^2 - 1)y' = 2xy$. Determina poi la curva integrale che ha:

a. tangente orizzontale nel punto di ascissa 1; $[y = k(x^2 - 1);\ y = 0]$

b. tangente perpendicolare alla retta di equazione $3x - 2y + 1 = 0$ in $x = 2$. $\left[y = -\frac{1}{6}(x^2 - 1)\right]$

3 Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'(9 - x^2)^2 + 12xy^2 = 0$. Successivamente verifica che le curve integrali passano tutte per due punti fissi di cui si chiedono le coordinate e che in tali punti hanno anche la stessa retta tangente. $\left[y = \frac{9 - x^2}{6 - c(9 - x^2)};\ (\pm 3, 0)\right]$

4 Determina l'integrale particolare $y = f(x)$ dell'equazione differenziale: $x^2y' - y = 0$ tale che esista il limite di $f(x)$ per x che tende all'infinito e che detto limite sia 1. $\left[y = e^{-\frac{1}{x}}\right]$

5 Stabilisci per quali valori delle costanti di integrazione la soluzione dell'equazione differenziale $(x + 1)^2y'' = -10$ coincide con la funzione $y = 10\ln(x + 1) + x$. $[c_1 = 1;\ c_2 = 0]$

Risultati di alcuni esercizi.

1 a., c., d. **2 a., d.** primo; **b.** terzo; **c.** secondo **4 a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** F **12 b.** **13 a.** ①, ②; **b.** ③
14 d. **15 a.** ②; **b.** ③ **16 b.** **95 c.** **96 a.** **97 c.** **98 b.**
99 a. $y = c_1e^{-4x} + c_2e^x$, **b.** $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$, **c.** $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-2x}$ **100 d.**

Test finale di autovalutazione

1 L'equazione differenziale $y' - 3x^2 + \sin x = 1$

a. si risolve trovando le primitive della funzione:

① $f(x) = -3x^2 + \sin x - 1$ ② $f(x) = 3x^2 - \sin x + 1$ ③ $f(x) = \dfrac{1}{-3x^2 + \sin x}$

b. ha come integrale generale:

① $y = x^3 + x + \cos x + c$ ② $y = x^3 + x - \cos x + c$ ③ $y = -x^3 - x - \cos x + c$

8 punti

2 La funzione $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x} + c$ rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale:

a. $x^2y' + 2x^2 - 1 = 0$ **b.** $x^2y' - 2x^2 + 1 = 0$

c. $x^2y' - 2x^2 - 1 = 0$ **d.** $y' - 2x^2 - 1 = 0$

8 punti

3 Data l'equazione differenziale $2y' + (x - 3)y = 0$, individua tra le seguenti la sola proposizione falsa:

a. è un'equazione lineare equivalente a $\displaystyle\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{3 - x}{2}dx$

b. il suo integrale generale è $y = ke^{\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2}$

c. l'integrale particolare che passa per il punto $(2, 0)$ ha equazione $y = 2e^{\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2}$

d. l'integrale particolare che passa per il punto $(2, 1)$ ha equazione $y = e^{\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - 2}$.

12 punti

4 L'equazione lineare $y' - 4xy = 6x$ ha come integrale generale la famiglia di funzioni:

a. $y = -\dfrac{3}{2} + ce^{2x^2}$ **b.** $y = \dfrac{3}{2} + ce^{2x^2}$

c. $y = -\dfrac{3}{2} + ce^{x^2}$ **d.** $y = -\dfrac{3}{2} + ce^{2x}$

10 punti

5 Data l'equazione del secondo ordine $y'' = e^x$, si può dire che:

a. il suo integrale generale è

① $y = e^x + c_1x$ ② $y = e^x + c_1x^2 + c_2$

③ $y = e^x + c_1x + c_2$ ④ $y = e^x + c_1x^2 + c_2x$

b. l'integrale particolare che soddisfa alle condizioni $y'(0) = 1$ e $y(1) = -1$ è:

① $y = e^x - x - e$ ② $y = e^x + 1 + e$

③ $y = e^x + x - e$ ④ $y = e^x - 1 - e$

12 punti

6 L'integrale generale dell'equazione $y'' - 6y' + 9y = 0$ è:

a. $y = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$ **b.** $y = e^{-3x}(c_1 + c_2x)$

c. $y = e^{3x}(c_1 + c_2x)$ **d.** $y = cxe^{3x}$

10 punti

7 Data l'equazione differenziale $y'' + y' = 4x$, calcola:

a. l'integrale generale

b. la curva integrale γ che nel punto di coordinate $(0, 1)$ ha tangente inclinata di 45° rispetto alla direzione positiva dell'asse x

c. verifica che γ ammette un punto di flesso e trovane l'ascissa.

18 punti

8 In un circuito sono collegati in serie una batteria di forza elettromotrice $f = 70\text{volt}$, una resistenza $R = 7\Omega$ ed un'induttanza $L = 14\text{H}$; calcola l'espressione dell'extracorrente di chiusura e l'intensità di corrente all'istante $t = 2\text{s}$.

12 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
Punteggio									

Voto: $\dfrac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 **a.** ②, **b.** ①

2 **c.**

3 **c.**

4 **a.**

5 **a.** ③, **b.** ④

6 **c.**

7 **a.** $y = 2x^2 - 4x + c_1 + c_2e^{-x}$; **b.** $y = 2x^2 - 4x + 6 - 5e^{-x}$; **c.** punto di flesso in $x = \ln \dfrac{5}{4}$

8 $i(t) = 10\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right), \quad i^*(t) = 10e^{-\frac{1}{2}t}, \quad i(2) = 6{,}32\text{A}$