Approfondimento

Le disequazioni lineari in due variabili

Una disequazione lineare nelle due variabili x e y si presenta nella forma $ax + by + c > 0$ o in quella analoga con il verso opposto.

Consideriamo per esempio la disequazione: $x + 2y - 4 > 0$

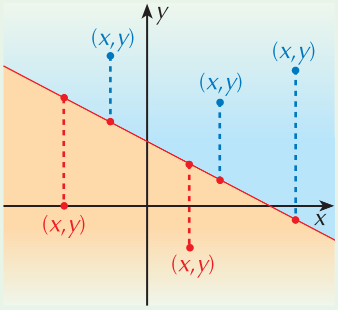
e, come prima cosa, esplicitiamo rispetto a y: $y > -\frac{1}{2}x + 2$

Consideriamo adesso la retta ad essa associata: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

e rappresentiamola nel piano cartesiano; il piano resta in questo modo diviso in due semipiani (***figura 1***) i cui punti hanno queste caratteristiche:

- tutti i punti che appartengono alla regione colorata in blu hanno un'ordinata che è maggiore di quella del punto della retta che ha la stessa ascissa, sono cioè i punti per i quali la y è maggiore di $-\frac{1}{2}x + 2$;
- tutti i punti che appartengono alla regione colorata in giallo hanno un'ordinata che è minore di quella del punto della retta che ha la stessa ascissa, sono cioè i punti per i quali la y è minore di $-\frac{1}{2}x + 2$.

Figura 1



Allora l'insieme delle soluzioni della disequazione è costituito dai punti del semipiano blu, esclusi i punti della retta stessa.

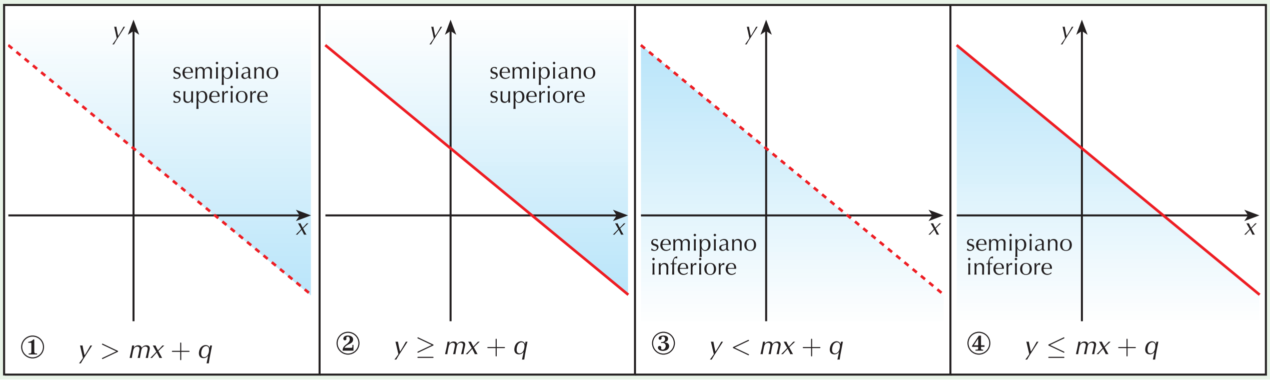
In generale, una volta esplicitata la disequazione rispetto alla variabile y e rappresentata nel piano cartesiano la retta ad essa associata, le soluzioni sono rappresentate (osserva le immagini corrispondenti più sotto):

① dai punti del semipiano superiore delimitato dalla retta r, senza i punti di r, se il verso della disequazione è "$>$";

② dai punti del semipiano superiore delimitato dalla retta r, con i punti di r, se il verso della disequazione è "$\geq$";

③ dai punti del semipiano inferiore delimitato dalla retta r, senza i punti di r, se il verso della disequazione è "$<$";

④ dai punti del semipiano inferiore delimitato dalla retta r, con i punti di r, se il verso della disequazione è "$\leq$"

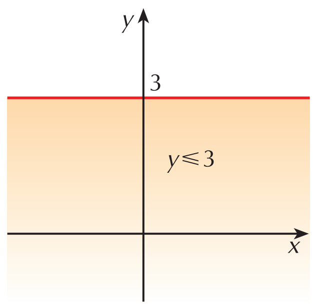
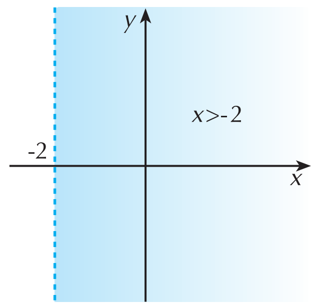


Come indicato anche nelle figure, si è soliti disegnare la retta r a tratto continuo per indicare che i suoi punti appartengono alla regione delle soluzioni, tratteggiata quando non ne fanno parte.

Valutazioni analoghe valgono anche per disequazioni della forma:

$$y > k \qquad \text{e} \qquad x > h$$

che consideriamo di due variabili con il coefficiente di x o di y che è nullo.
Poiché le rette $y = k$ e $x = h$ sono parallele rispettivamente all'asse x e all'asse y, l'insieme delle soluzioni è ancora costituito dai punti di un semipiano.

	
soluzioni della disequazione $y \leq 3$: semipiano inferiore della retta $y = 3$ compresi i punti della retta	soluzioni della disequazione $x > -2$: semipiano a destra della retta $x = -2$ esclusi i punti della retta

Un metodo alternativo

Per scegliere il semipiano che rappresenta le soluzioni si può anche procedere in un altro modo. Una volta disegnata la retta:

- si sceglie un punto qualunque (non sulla retta) che appartiene a uno dei due semipiani da essa delimitati
- si sostituiscono le sue coordinate nella disequazione
- se la relazione trovata è vera, la regione delle soluzioni è quella a cui appartiene il punto
- se la relazione trovata è falsa, la regione delle soluzioni è quella opposta a quella a cui appartiene il punto.

Esempio.

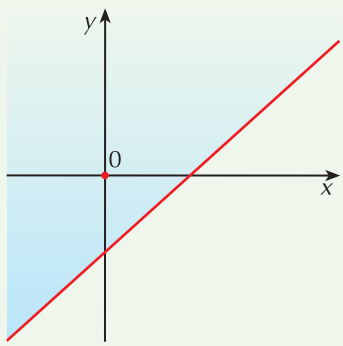
Rappresentiamo le soluzioni della disequazione: $3x - 4y - 6 \leq 0$

Disegniamo la retta associata alla disequazione: $3x + 4y - 6 = 0$

Prendiamo un punto in uno dei due semipiani delimitati dalla retta, per esempio l'origine, e sostituiamo le sue coordinate nella disequazione; otteniamo

$$-6 \leq 0$$

che è una relazione vera. L'insieme delle soluzioni è il semipiano che contiene questo punto.



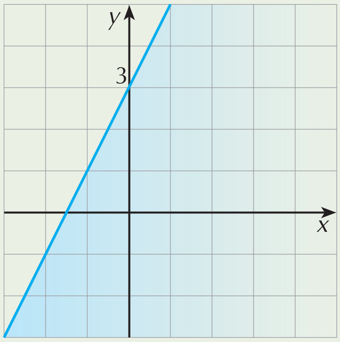
1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$y - 2x \leq 3$

Esplicitiamo la disequazione rispetto alla variabile y: $y \leq 2x + 3$
e disegniamo la retta r: $y = 2x + 3$.
L'insieme delle soluzioni è il semipiano inferiore delimitato da r, compresi i punti di r.
In alternativa, per la scelta del semipiano possiamo anche scegliere un punto del piano, per esempio l'origine, e sostituire le sue coordinate nella disequazione; troviamo in questo modo la relazione:

$$0 \leq 3 \qquad \text{vera}$$

Il semipiano delle soluzioni è quello che contiene questo punto.



2 $2x + 6y - 3 > 0$

3 $4x - 7y < 0$

4 $x + 5y - 10 \geq 0$

5 $9x + 6y - 1 \leq 0$

6 $3x > 2y - 5$

7 $4 - 3x \leq 0$

8 $12y - 6x - 3 \leq 0$

9 $8 + 3y > 0$

10 $3 \leq x + 7y$

11 $7x - 21y \geq 9$

12 $9y - 3x + 4 < 0$

13 $10y \leq 3x + 15$

14 $3 - 2x + 4y \geq 0$

15 $8 + 2x < 6y$

16 $-3x > 0$

17 $3x - 5y > 2$

18 $5x - \frac{3}{2}y + 5 < 0$

19 $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - 1 \leq 0$

20 $12x + \frac{y}{3} - 1 \geq 0$

21 $6y - 2x + 5 < 0$

22 $3 - 2x \leq y$

23 $5 + 2y - \frac{3x}{4} \leq 0$

24 $10x - y < 0$

25 $2 \geq -x + 3y$

26 $-3y + 2 \leq 0$

27 $4x - 3y + 2 \leq 0$

Scegli la risposta giusta.

28 La disequazione $y + 2x - 1 > 0$ è rappresentata dal semipiano delimitato dalla retta $y = 1 - 2x$:
a. che contiene l'origine
b. che contiene il punto $(2, 2)$.

29 La disequazione $x - 3 < 0$ individua:
a. il semipiano a sinistra della retta $x = 3$ compresi i punti di tale retta
b. il semipiano a destra della retta $x = 3$ esclusi i punti di tale retta
c. il semipiano a sinistra della retta $x = 3$ esclusi i punti di tale retta
d. i punti della retta $x = 3$.