Analisi di Fourier delle funzioni periodiche

Obiettivi

- comprendere il concetto di serie numerica e di convergenza
- estendere il concetto di serie alle funzioni
- comprendere il significato di funzione periodica
- individuare le caratteristiche di una serie trigonometrica
- sviluppare in serie di Fourier una funzione periodica

1. Serie e funzioni periodiche

1.1 Le serie numeriche

La questione dell'approssimazione di una funzione in un punto è già stata affrontata con lo sviluppo di una funzione tramite i polinomi di Taylor; il problema però rimane se vogliamo costruire l'approssimazione di una funzione in un intervallo del suo dominio e non solo in un punto. Per poter affrontare questo problema dobbiamo premettere alcune questioni che riguardano le serie numeriche e di funzioni.

Consideriamo una successione $\{a_n\}$ di numeri reali definiti da una qualche regola e costruiamo le somme s_n dei termini di tale successione a partire dal primo a quello di indice n:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

Per esempio, se $a_n = \dfrac{1}{n}$ (in questo caso si parte da s_1 in quanto s_0 non esiste), le somme s_n sono le seguenti:

$$s_1 = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \qquad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \qquad \ldots\ldots$$

Gli s_n sono numeri che costituiscono a loro volta una successione numerica $\{s_n\}$ che prende il nome di successione delle **ridotte *n*-esime**; la generica ridotta n-esima si indica sinteticamente con il simbolo

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Se $n \to +\infty$, abbiamo la somma di un numero infinito di termini e a questa somma diamo il nome di *serie numerica*.

Si dice **serie numerica** l'espressione $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ...$

Ci chiediamo a che cosa può dare luogo la somma di un numero infinito di addendi. Questo equivale a chiedersi se esiste e che valore ha il limite per $n \to +\infty$ di s_n; si possono presentare tre possibili situazioni:

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = S$

  cioè il limite esiste ed è finito ed in questo caso diciamo che la serie è **convergente**

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$

  cioè il limite esiste ma non è finito e diciamo allora che la serie è **divergente**

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$ non esiste

  ed in questo caso diciamo che la serie è **indeterminata.**

Per esempio:

- è intuitivo che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 4 + 8 + 16 + 32 + ...$ è divergente a $+\infty$ in quanto somma di termini che diventano sempre più grandi

- la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è invece convergente perché è la somma dei termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$; sappiamo che tale somma vale $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$ ed è:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2 \qquad \rightarrow \qquad \text{la serie converge quindi a 2}$$

La somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q vale $\dfrac{1-q^n}{1-q}$

- la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - .....$ è indeterminata in quanto non esiste il limite per $n \to +\infty$ di questa somma.

Serie numeriche del tipo di quelle appena viste hanno la forma $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, con $q \in R$, e si dicono **serie geometriche** in quanto i loro termini costituiscono una progressione geometrica. Si può dimostrare che:

la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$:

- **converge** se $-1 < q < 1$ ed è $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
- **diverge** se $q < -1 \ \vee \ q \geq 1$
- è **indeterminata** se $q = -1$.

1.2 Le serie di funzioni

Consideriamo adesso una successione $\{f_n(x)\}$ i cui termini siano delle funzioni, tutte definite in uno stesso dominio D.
Per esempio, possiamo considerare la successione:

$$f_0(x) = x^0 = 1 \qquad f_1(x) = x^1 \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = x^3 \qquad ..... \qquad f_n(x) = x^n \qquad ......$$

Analogamente a quanto fatto per le successioni numeriche, possiamo costruire le somme s_n dei termini di questa successione

$$\begin{aligned} s_0 &= f_0(x) \\ s_1 &= f_0(x) + f_1(x) \\ \vdots & \quad \vdots \\ s_n &= f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x) \end{aligned}$$

Considerando l'esempio precedente:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 1 + x \\ \vdots & \quad \vdots \\ s_n &= 1 + x + x^2 + ... + x^n \end{aligned}$$

Se $n \to +\infty$, abbiamo la somma di un numero infinito di funzioni e a questa somma diamo il nome di *serie di funzioni*.

Si dice **serie di funzioni** l'espressione $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + ...$ dove le funzioni $f_n(x)$ sono tutte definite in uno stesso dominio D.

Per le serie di funzioni si usa una terminologia analoga a quella usata per le serie numeriche: le funzioni $f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ...$ si dicono **termini** della serie, la generica funzione $f_n(x)$ ne è il **termine generale**; la somma

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)$$

è la **somma parziale di indice (o ordine) *n*** o **ridotta *n*-esima** ed è ancora una funzione di x definita in D.

Al variare di x in D, la serie di funzioni diventa una serie numerica che può essere convergente, divergente o indeterminata.

Ad esempio, la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots$

diventa una serie geometrica divergente per $x = 2$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots\dots\dots$

diventa una serie geometrica convergente per $x = \frac{2}{3}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots\dots\dots$

diventa una serie geometrica indeterminata per $x = -1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 + \dots\dots\dots$

In generale possiamo dire che questa serie di funzioni è una serie numerica:

- convergente se $-1 < x < 1$
- divergente se $x < -1 \ \vee \ x \geq 1$
- indeterminata se $x = -1$.

Una serie di funzioni può quindi avere una determinata caratteristica per tutti gli x che appartengono ad un certo insieme, finito o infinito; in particolare, interessa conoscere per quali valori di x una serie di funzioni diventa una serie numerica convergente. Diamo allora la seguente definizione.

Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni di dominio D; si dice che tale serie è convergente in un insieme E se, per ogni $x \in E$, è convergente la serie numerica che si ottiene da quella data.
L'insieme E si dice **dominio di convergenza.**

Il dominio di convergenza E è evidentemente un sottoinsieme, proprio o improprio, del dominio D delle funzioni $f_n(x)$.
Nel caso dell'esempio precedente, le funzioni x^n hanno come dominio R, l'insieme di convergenza è $(-1,1)$.

1.3 Le funzioni periodiche

Una funzione $f(x)$, definita in un dominio D, si dice **periodica** se esiste un numero reale T per il quale si verifica che

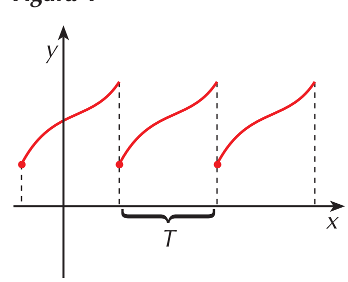
$$f(x + T) = f(x)$$

Il più piccolo numero T per il quale vale la precedente relazione rappresenta il **periodo** della funzione.

Geometricamente parlando, la definizione di funzione periodica implica che il suo grafico si può tracciare restringendo il dominio ad un qualunque intervallo di ampiezza T e ripetendo tale grafico in ogni intervallo successivo della stessa ampiezza (***figura 1***).
Abbiamo già visto, per esempio, che le funzioni goniometriche:

- $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π
- $\tan x$ è periodica di periodo π

Figura 1



- sin nx e cos nx sono periodiche di periodo $\frac{2\pi}{n}$
- tan nx è periodica di periodo $\frac{\pi}{n}$.

Ma non solo le funzioni goniometriche sono periodiche; per esempio le due funzioni in ***figura 2*** rappresentano rispettivamente:

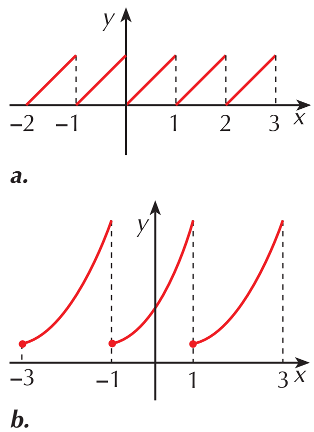
- la funzione $y = x$ definita nell'intervallo $[0, 1)$ e replicata in tutti gli intervalli successivi e precedenti di ampiezza 1:

  .... $[-2, -1)$ $[-1, 0)$ $[0, 1)$ $[1, 2)$ $[2, 3)$ .....

- la funzione $y = e^x$ anch'essa definita nell'intervallo $[-1, 1)$ e replicata in tutti gli intervalli successivi e precedenti di ampiezza 2:

  .... $[-5, -3)$ $[-3, -1)$ $[-1, 1)$ $[1, 3)$ $[3, 5)$ .....

Figura 2



La rappresentazione algebrica di queste funzioni è la seguente:

- $y = x - k$ negli intervalli $[k, 1 + k)$ con $k \in N$

  Infatti:

  se $k = -2$ la funzione ha equazione $y = x + 2$ ed è definita nell'intervallo $[-2, -1)$

  se $k = -1$ la funzione ha equazione $y = x + 1$ ed è definita nell'intervallo $[-1, 0)$

  se $k = 0$ la funzione ha equazione $y = x$ ed è definita nell'intervallo $[0, 1)$

  se $k = 1$ la funzione ha equazione $y = x - 1$ ed è definita nell'intervallo $[1, 2)$

  se $k = 2$ la funzione ha equazione $y = x - 2$ ed è definita nell'intervallo $[2, 3)$

  e così via (prova a disegnare ciascuna funzione nell'intervallo di pertinenza).

- $y = e^{x-2k}$ negli intervalli $[-1 + 2k, 1 + 2k)$ con $k \in N$

  Attribuisci a k alcuni valori interi come nell'esempio precedente e verifica che il grafico ottenuto corrisponde effettivamente a quello in figura.

La forma algebrica di queste funzioni non è sempre facile sia da scrivere che da comprendere in quanto vengono coinvolti dei parametri e i due esempi precedenti, che pure sono semplici, ne sono una prova; per evitare complicazioni, si è soliti scrivere le equazioni di queste funzioni in uno degli intervalli di periodicità, di solito quello principale, e si dice che *vengono prolungate per periodicità*. Le funzioni dei due esempi precedenti si scrivono così:

- $y = x$ in $[0, 1)$ e prolungata per periodicità
- $y = e^x$ in $[-1, 1)$ e prolungata per periodicità.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La serie numerica i cui primi termini sono 0, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, ... è:

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ **b.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ **c.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ **d.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n}$

2. Una funzione è periodica di periodo T se:

a. $f(x) = f(x) + T$ **b.** $f(x + T) = -f(x)$ **c.** $f(x + T) = f(x)$ **d.** $f(x + T) = f(x) + f(T)$

2. Lo sviluppo in serie di una funzione

Abbiamo già ricordato all'inizio del primo paragrafo che i polinomi di Taylor rappresentano l'approssimazione di una funzione in un intorno di un suo punto x_0; essi sono definiti tramite la somma

Lo sviluppo in serie in un punto

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

e sappiamo che il livello di approssimazione migliora all'aumentare del numero di termini, cioè al crescere di k.
Se facciamo tendere k all'infinito, otteniamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

che rappresenta lo **sviluppo in serie di Taylor** relativo alla funzione $f(x)$ e al punto x_0.

Per esempio, lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $y = e^x$ relativa al punto $x_0 = 0$ è il seguente (ricordiamo che, poiché la derivata di e^x è sempre e^x, allora $f^{(n)}(0) = 1$ per ogni valore di n) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Lo sviluppo in serie in un intervallo

Ma, come già evidenziato in apertura del capitolo, il problema che ora vogliamo affrontare è quello di approssimare una funzione in un intervallo del suo dominio. Questo problema fu risolto brillantemente dal francese Joseph Fourier (1768-1830), docente di matematica all'Ecòle Normale e all'Ecòle Polytechnique, il quale ebbe l'intuizione che una qualsiasi funzione periodica può essere sviluppata in una serie che coinvolge le funzioni seno e coseno e che ha la forma

$$\underbrace{\frac{1}{2} a_0}_{\text{termine costante}} + \underbrace{a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx + ...}_{\text{sviluppo in serie di } a_n \cos(nx)} + \underbrace{b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + ... + b_n \sin nx + ...}_{\text{sviluppo in serie di } b_n \sin (nx)}$$

dove gli a_n e i b_n sono coefficienti numerici opportuni.
Siamo in presenza di una serie che viene detta *serie trigonometrica*.

> Chiamiamo **serie trigonometrica** ogni serie del tipo
>
> $$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
>
> dove i termini a_n e b_n sono numeri reali che si dicono **coefficienti della serie**.

Ogni funzione che si ottiene da questa serie per un particolare valore di n rappresenta la *ridotta n-esima* della serie e viene detta **polinomio trigonometrico**.
Ogni termine della serie prende il nome di **armonica** e in particolare:

- $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ si dice prima armonica o armonica fondamentale
- $a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ si dice seconda armonica o armonica di indice 2
- $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ si dice n-esima armonica o armonica di indice n

Per esempio, consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\ldots\ldots$$

che è convergente; essa può essere interpretata come una serie trigonometrica i cui coefficienti sono i numeri

$$a_n = 0 \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

La funzione somma è quindi una funzione periodica di periodo 2π. Le sue armoniche sono le funzioni

- $\sin x$ del primo ordine
- $-\frac{1}{2}\sin 2x$ del secondo ordine
- $\frac{1}{3}\sin 3x$ del terzo ordine e così via.

Le funzioni $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$ sono periodiche rispettivamente di periodo

$$2\pi \quad \pi \; \ldots\ldots \; \frac{2\pi}{n}$$

La loro somma è quindi periodica di periodo 2π, che è il più piccolo multiplo comune a tutti i periodi.

3. Lo sviluppo in serie di Fourier

3.1 Le condizioni di sviluppabilità e la convergenza

L'interesse per lo sviluppo in serie di funzioni periodiche è determinato dal fatto che molti fenomeni hanno la caratteristica di essere associati a funzioni di questo tipo: dalle oscillazioni di un pendolo alla propagazione delle onde meccaniche o elettromagnetiche, dalle pulsazioni cardiache agli impulsi elettrici. Nei fenomeni di tipo ondulatorio vale poi il **principio di sovrapposizione** il quale afferma che se in una regione transitano due o più perturbazioni ondose, esse danno luogo ad un'onda più complessa che si ottiene sommandole punto a punto.

Se riprendiamo l'esempio del paragrafo precedente, il grafico della funzione

$$y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\ldots$$

si può ottenere sommando punto a punto i grafici delle sue armoniche

$$y_1 = \sin x \qquad y_2 = -\frac{1}{2}\sin 2x \qquad y_3 = \frac{1}{3}\sin 3x \qquad y_4 = -\frac{1}{4}\sin 4x \; \ldots\ldots$$

In ***figura 3a*** mostriamo come si costruisce la funzione $y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$ somma delle prime due armoniche: nella figura sono messi in evidenza il segmento a (in blu) che rappresenta il valore di $\sin x$, il segmento b (in rosso) che rappresenta il valore di $-\frac{1}{2}\sin 2x$ e il segmento $a+b$ (in verde) che rappresenta il valore della funzione somma in un punto particolare.

Al crescere del numero n di armoniche si ottiene un grafico come quello in ***figura 3b***. Esso rappresenta un'approssimazione della funzione periodica in ***figura 3c*** che viene detta onda a *dente di sega* e che svolge un ruolo particolarmente importante in elettronica.

Figura 3a

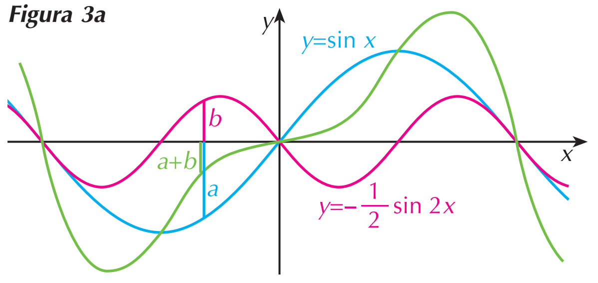
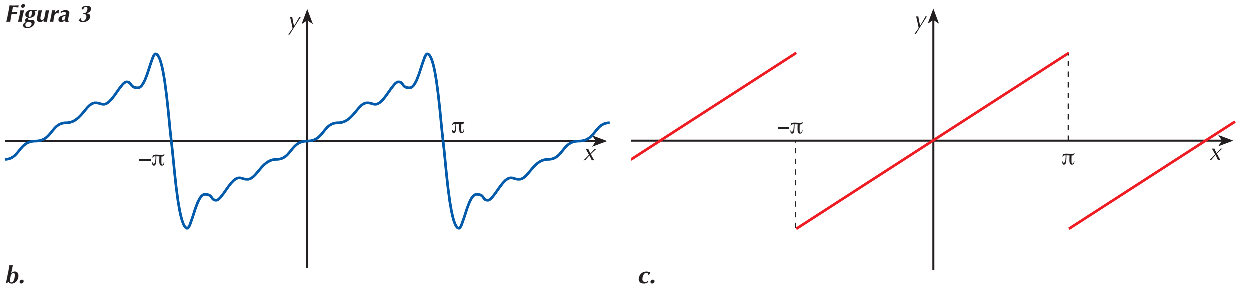


Figura 3



Il problema si presenta però di solito in forma inversa rispetto all'esempio ora presentato, vale a dire che si ha una funzione periodica come quella in ***figura 3c*** e si vuole trovare la serie di funzioni che meglio la approssima.
Fourier, nella sua analisi, comprese che ogni segnale periodico di periodo T può essere ottenuto mediante la sovrapposizione di un numero infinito di segnali di tipo trigonometrico, ciascuno dei quali è associato ad una particolare frequenza che è multipla di quella fondamentale $\frac{1}{T}$. Questo significa che ogni funzione periodica, sotto opportune condizioni, è sviluppabile in serie trigonometrica.

In un fenomeno rappresentato da una funzione periodica di periodo T, si dice frequenza l'espressione $f = \frac{1}{T}$. Essa rappresenta il numero di oscillazioni che avviene in un periodo e si misura in Hertz.

Le condizioni per cui è possibile eseguire uno sviluppo in serie sono piuttosto complesse e vanno al di là delle nostre attuali conoscenze. Possiamo tuttavia affermare che:

se una funzione $f(x)$, periodica di periodo T, si mantiene limitata ed è integrabile nell'intervallo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, allora è sviluppabile in serie trigonometrica.

Funzioni periodiche come quelle rappresentate in ***figura 2*** e in ***figura 3*** precedenti, che sono periodiche e limitate e delle quali è possibile calcolare l'integrale in ogni intervallo di periodicità, sono quindi sviluppabili in serie.

Una funzione è integrabile in un intervallo limitato $[a, b]$ se è continua in $[a, b]$.

Possiamo adesso dare la seguente definizione che vale per le funzioni periodiche di periodo 2π.

Data una funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π, integrabile nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, si dice **serie di Fourier** ad essa associata la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

in cui i coefficienti a_n e b_n sono detti coefficienti di Fourier.

Nelle ipotesi specificate sopra per la funzione f, si dimostra poi che i coefficienti di Fourier delle funzioni periodiche di periodo 2π sono dati dalle relazioni:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx & \text{per } n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx & \text{per } n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Il problema non è però ancora del tutto risolto: se una funzione possiede le caratteristiche che abbiamo enunciato è possibile svilupparla in serie di Fourier, ma non siamo ancora sicuri che lo sviluppo converga alla funzione f.
Il seguente teorema ci dà delle condizioni sufficienti per la convergenza (ne vediamo una forma semplificata).

Teorema (di Dirichlet). Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π; se $f(x)$:

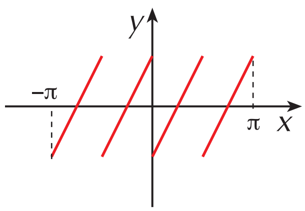
- è continua a tratti nell'intervallo $[-\pi, \pi]$
- è monotòna a tratti in tale intervallo

allora la serie di Fourier ad essa associata converge a $f(x)$.

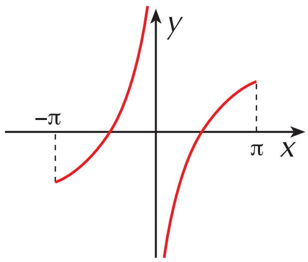
Le espressioni *continua a tratti* e *monotona a tratti* hanno il seguente significato (***figura 4***):

- la funzione è continua in tutti i punti dell'intervallo tranne al più in un numero finito di punti che sono però discontinuità di prima o di terza specie; vale a dire che è continua in ciascun sottointervallo dell'intervallo di periodicità con eventuali salti della funzione nei punti estremi
- in ciascuno dei sottointervalli identificati sopra, la funzione è monotòna.

Figura 4



a. funzione continua a tratti e monotòna



b. funzione non continua a tratti (in $x = 0$ discontinuità di seconda specie)

Nell'ipotesi di convergenza, la somma della serie è:

- la funzione $f(x)$ in tutti i punti dell'intervallo $(-\pi, \pi)$ che sono di continuità per f;
- la media aritmetica dei limiti destro e sinistro di f nei punti x_0 di discontinuità interni all'intervallo $[-\pi, \pi]$: $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right]$
- il valore $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -\pi^+} f(x) + \lim_{x\to \pi^-} f(x)\right]$ negli estremi $-\pi$ e π.

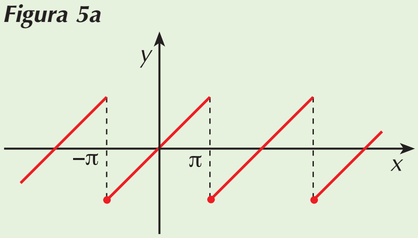
ESEMPI

Dopo aver verificato che le seguenti funzioni sono sviluppabili in serie di Fourier, scriviamone lo sviluppo.

1. $f(x) = x \quad$ in $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità

Il grafico della funzione è in ***figura 5a*** ed in essa riconosciamo la **curva a dente di sega** di cui abbiamo parlato a inizio paragrafo.
La funzione è continua in ogni intervallo di periodicità e presenta una discontinuità di prima specie in $x = \pi$.
Essa è quindi sviluppabile in serie di Fourier; calcoliamo i coefficienti della serie.

Figura 5a



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

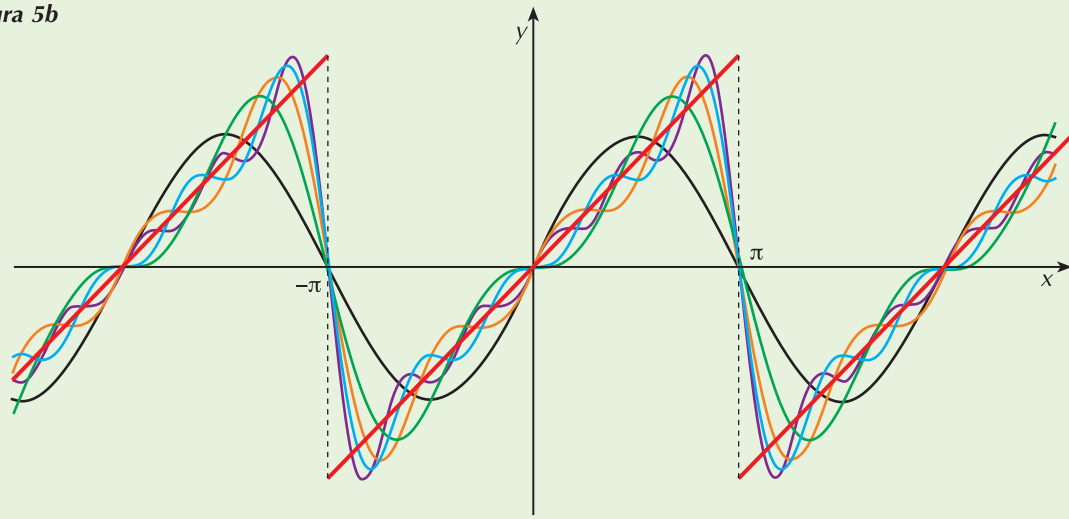
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} -\dfrac{2}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{2}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione data:

- nei punti degli intervalli $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$

$$2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \dots\dots\dots = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

Figura 5b



- agli estremi di tali intervalli si ha $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to-\pi^+} x + \lim_{x\to\pi^-} x\right] = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0$

  mentre la funzione data vale $-\pi$ e π in tali punti.

In ***figura 5b*** puoi vedere il grafico di alcune ridotte della serie e in sottofondo la funzione $f(x)$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ h & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases}$ e prolungata per periodicità, con h costante positiva.

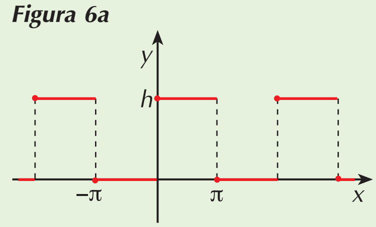
Il grafico della funzione f è in ***figura 6a***; esso, per la forma che assume, viene detto **onda quadra.**

I punti di discontinuità della funzione si hanno nei punti $x = k\pi$ dove

$$\lim_{x\to k\pi^-} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ h & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to k\pi^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ h & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

Figura 6a



Nei punti $x = k\pi$ vi è quindi una discontinuità di prima specie; possiamo allora concludere che, essendo la funzione continua a tratti, la prima ipotesi del teorema è verificata.
Osserviamo poi che, in ciascuno degli intervalli individuati dai punti di discontinuità, $f(x)$ è monotona; anche la seconda ipotesi è dunque verificata.
La funzione f è dunque sviluppabile in serie di Fourier in tutto R; determiniamo i coefficienti della serie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} hdx = \frac{1}{\pi}\cdot h \cdot \Big[x\Big]_0^{\pi} = h$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} h\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{h}{n}\cdot\Big[\sin nx\Big]_0^{\pi} = 0$$

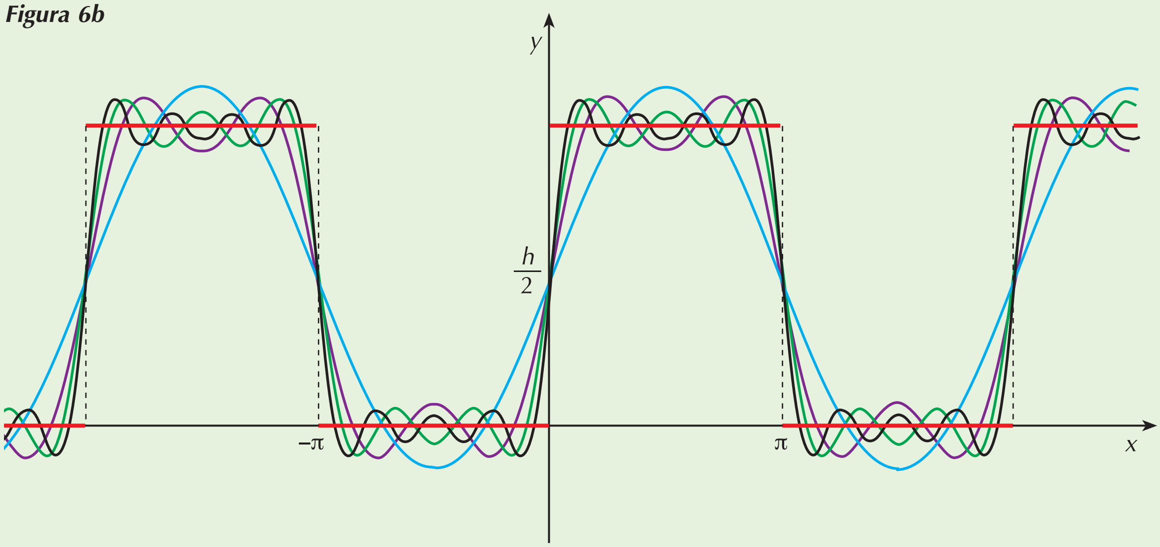
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} h\cdot\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-h}{n}\Big[\cos nx\Big]_0^{\pi} = -\frac{h}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{2h}{n\pi} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Allora, ricordando che il termine noto della serie è $\frac{1}{2}a_0$ possiamo scrivere che:

- nei punti dove la funzione f è continua è

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\sin x + \frac{2h}{3\pi}\sin 3x + \frac{2h}{5\pi}\sin 5x + ... = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

Figura 6b



- nei punti di discontinuità $x = k\pi$ è $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to k\pi^-} h + \lim_{x\to k\pi^+} 0\right] = \frac{h}{2}$

dunque in tali punti la serie converge a $\frac{h}{2}$, mentre la funzione vale 0 oppure h in tali punti.

In ***figura 6b*** puoi vedere il grafico di alcune ridotte della serie e in sottofondo la funzione $f(x)$.

LO SVILUPPO DI FUNZIONI PERIODICHE DI PERIODO T

Se il periodo della funzione è T, le considerazioni precedenti sono ancora valide con una modifica alle formule che esprimono i coefficienti della serie.

Introduciamo il parametro $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ che rappresenta la pulsazione della funzione f. In questo caso la serie di Fourier è definita dalla relazione

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

e si dimostra che i coefficienti della serie sono i seguenti:

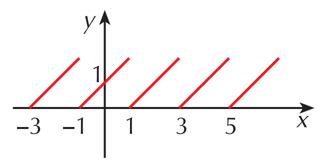
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x \, dx \qquad\qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x \, dx$$

Determiniamo, per esempio, lo sviluppo in serie della funzione periodica

$f(x) = x + 1$ nell'intervallo $[-1, 1)$ e prolungata per periodicità.

In questo caso è $T = 2$ ed il grafico della funzione è in ***figura 7***.

Figura 7



La pulsazione è $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ e lo sviluppo della funzione è dato dalla serie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \pi nx + b_n \sin \pi nx)$$

I suoi coefficienti sono espressi dalle relazioni:

$$a_n = \int_{-1}^{1}(x+1)\cdot \cos \pi nx \, dx \qquad\qquad b_n = \int_{-1}^{1}(x+1)\cdot \sin \pi nx \, dx$$

Sviluppando il calcolo otteniamo (l'integrale si sviluppa per parti):

$$a_n = \int_{-1}^{1}(x+1)\cdot \cos \pi nx \, dx = \left[\frac{\cos \pi nx}{\pi^2 n^2} + \frac{x+1}{\pi n}\cdot \sin \pi nx\right]_{-1}^{1} = \frac{2\sin \pi n}{\pi n}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1}(x+1)\cdot \sin \pi nx \, dx = \left[\frac{\sin \pi nx}{\pi^2 n^2} - \frac{x+1}{\pi n}\cdot \cos \pi nx\right]_{-1}^{1} = \frac{2\sin \pi n - 2\pi n \cos \pi n}{\pi^2 n^2}$$

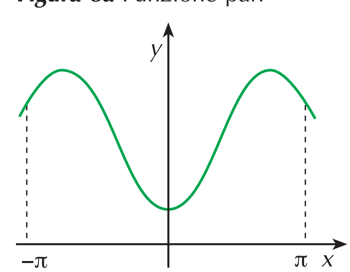
In definitiva: $f(x) = 1 + \dfrac{2}{\pi}\sin \pi x - \dfrac{1}{\pi}\sin 2\pi x + \dfrac{2}{3\pi}\sin 3\pi x - ....$

3.2 Le serie di Fourier delle funzioni pari e dispari

Ricordiamo che:

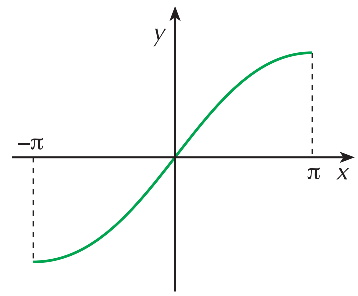
- una funzione è pari se presenta una simmetria rispetto all'asse y, cioè se $f(-x) = f(x)$ (***figura 8a***)
- è dispari se presenta una simmetria rispetto all'origine, cioè se $f(-x) = -f(x)$ (***figura 8b*** di pagina seguente)

Figura 8a Funzione pari



In questi due particolari casi, i coefficienti dello sviluppo di Fourier di una funzione periodica assumono valori particolari e lo sviluppo della funzione si semplifica.

Figura 8b Funzione dispari



Il caso della funzione pari

Se la funzione $f(x)$ è pari, poiché sin nx è dispari (la funzione è simmetrica rispetto all'origine), si ha che $f(x)\sin nx$ è dispari:

$$f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$$

L'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine è sempre nullo; di conseguenza i coefficienti b_n sono sempre nulli:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0$$

Allora

> lo sviluppo in serie di una funzione pari non contiene la funzione seno ed è una funzione di soli coseni:
>
> $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

Il prodotto di una funzione pari con una funzione dispari è una funzione dispari.

Il caso della funzione dispari

Se la funzione $f(x)$ è dispari, poiché cos nx è pari (la funzione è simmetrica rispetto all'asse y), si ha che $f(x)\cos nx$ è dispari:

$$f(-x)\cos(-nx) = -f(x)\cos nx$$

In questo caso si ha quindi che sono nulli i coefficienti a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0$$

Allora

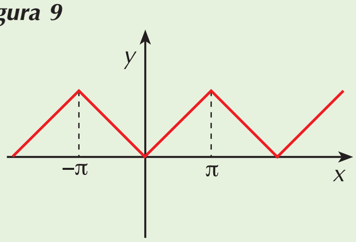
> lo sviluppo in serie di una funzione dispari non contiene la funzione coseno ed è una funzione di soli seni:
>
> $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

ESEMPI

1. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ x & \text{se } 0 \le x \le \pi \end{cases}$, e prolungata per periodicità, proviamo che è sviluppabile in serie di Fourier e scriviamo la serie corrispondente.

La funzione è periodica di periodo 2π ed ha il grafico di ***figura 9***. Esso, per la forma che assume, è noto con il nome di **onda triangolare.**

Figura 9



La funzione f è continua in tutto R, monotona a tratti e quindi, soddisfacendo le ipotesi del teorema di Dirichlet, è sviluppabile in serie di Fourier.
Osserviamo poi che si tratta di una funzione pari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) e quindi il suo sviluppo in serie sarà di soli coseni.
Calcoliamo i coefficienti a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari } (n \neq 0) \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si ha quindi che

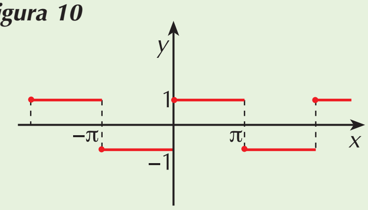
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \ldots\ldots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

2. Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione che è il prolungamento periodico di

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

La funzione è periodica di periodo 2π ed il suo grafico, che rappresenta un'**onda quadra**, è in ***figura 10***.
Si tratta di una funzione continua a tratti e monotona in ogni intervallo in cui è continua; è una funzione dispari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi); essa è quindi sviluppabile in serie di Fourier ed il suo sviluppo è una serie di soli seni; dobbiamo quindi calcolare i soli coefficienti b_n:

Figura 10



$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Agli estremi dell'intervallo di periodicità la serie converge a zero.
Possiamo quindi scrivere che, nei punti interni all'intervallo di periodicità

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1} + \ldots\ldots\ldots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin (2n+1)x}{2n+1}$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Barra vero o falso.

a. Qualunque funzione può essere sviluppata in serie di Fourier. V F

b. Una funzione può essere sviluppata in serie di Fourier solo se è periodica. V F

c. Lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione $f(x)$ periodica di periodo T è convergente solo se $f(x)$ è continua a tratti e monotòna nell'intervallo di periodicità. V F

d. Se $f(x)$ è pari il suo sviluppo in serie di Fourier è una funzione di soli seni. V F

I concetti e le regole

Le serie numeriche

Si chiama **serie numerica** l'espressione $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. + a_n + \ldots...$

Di una serie numerica si possono calcolare le **ridotte *n*-esime s_n** che sono date dalle somme dei termini da a_0 fino a quello di indice n:

$$s_0 = a_0 \qquad s_1 = a_0 + a_1 \qquad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \qquad \ldots.. \qquad s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots. + a_n$$

Il carattere di una serie si determina studiando il comportamento delle sue ridotte *n*-esime e si presentano tre casi:

- $\lim_{n\to+\infty} s_n = S$ la serie è **convergente** ed il numero S è la sua somma
- $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$ la serie è **divergente** ed ha somma infinita
- $\lim_{n\to+\infty} s_n$ non esiste la serie è **indeterminata**.

Fra le diverse tipologie di serie abbiamo visto la serie i cui termini costituiscono una progressione geometrica di ragione q e che per questo viene detta serie geometrica: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Una serie geometrica è:

- convergente a $\frac{1}{1-q}$ se $-1 < q < 1$
- divergente se $q < -1 \ \vee \ q \geq 1$
- indeterminata se $q = -1$

Le serie di funzioni

Chiamiamo **serie di funzioni** la somma di infinite funzioni definite in uno stesso dominio D:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots.. + f_n(x) + \ldots\ldots$$

- Una serie di funzioni diventa una serie numerica quando la variabile indipendente x assume un particolare valore del dominio D e può essere una serie numerica convergente, divergente o indeterminata.
- L'insieme E dei valori x del dominio D per i quali si ottiene una serie numerica convergente si chiama **dominio di convergenza**.
- Di una serie convergente si può definire la **funzione somma** $f(x)$ come limite per $n \to +\infty$ della successione delle somme parziali $\{s_n(x)\}$.

Le funzioni periodiche

Una funzione $f(x)$, di dominio D, è **periodica di periodo** T se $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D$.

Il più piccolo valore positivo di T per cui vale questa uguaglianza si dice **periodo minimo** o **principale.**

Anche una funzione f non periodica può diventarlo se viene definita in un intervallo $[a,b)$ e se viene ripetuta in tutti gli intervalli di ampiezza $b-a$ successivi e precedenti contigui uno all'altro; si dice allora che f è **prolungata per periodicità**.

La serie di Taylor e la serie trigonometrica

La **serie di Taylor** rappresenta lo sviluppo di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 ed è così definita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Una **serie trigonometrica** ha espressione $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ con $a_n,\ b_n \in R$

I numeri a_n e b_n si dicono **coefficienti della serie**, la ridotta n-esima si chiama **polinomio trigonometrico** di ordine n, ogni termine della serie si dice **armonica**:

- $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ è la prima armonica
- $a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ è la seconda armonica e così via.

Lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica

Data una funzione $f(x)$ periodica di periodo 2π, continua o con al più un numero finito di discontinuità di prima o terza specie nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, si dice **serie di Fourier** della funzione $f(x)$ la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

i cui coefficienti sono espressi dalle formule: $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{cases}$ $\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots..$

Tale serie converge alla funzione $f(x)$ se:

- $f(x)$ è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$
- l'intervallo $[-\pi, \pi]$ può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali f è monotona.

In tali ipotesi, la somma della serie è la funzione così definita:

$$\begin{cases} f(x) & \text{per tutti gli } x \in (-\pi, \pi) \text{ che sono di continuità per } f \\ \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) + \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x)\right] & \text{nei punti } x_0 \text{ di discontinuità interni a } [-\pi, \pi] \\ \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) + \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x)\right] & \text{agli estremi dell'intervallo} \end{cases}$$

Se la funzione $f(x)$ presenta delle simmetrie il suo sviluppo di Fourier si semplifica; in particolare:

- se $f(x)$ è pari, il suo sviluppo è una funzione di soli coseni: $f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$
- se $f(x)$ è dispari, il suo sviluppo è una funzione di soli seni: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$

Analisi di Fourier delle funzioni periodiche

SERIE E FUNZIONI PERIODICHE

RICORDA

Una serie numerica è:

- convergente se $\lim_{n\to+\infty} s_n = S$ con S valore finito
- divergente se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$
- indeterminata se $\lim_{n\to+\infty} s_n$ non esiste

Comprensione

1 La ridotta n-esima di una serie numerica rappresenta:
a. l'elenco dei primi n termini di una successione numerica
b. la somma dei primi n termini di una successione numerica
c. la somma di n termini qualsiasi di una successione numerica
d. la somma degli ultimi n termini di una successione numerica.

2 Completa in modo che le seguenti proposizioni risultino vere.
Una serie geometrica di ragione q
a. converge se ....
b. diverge se ....
c. è indeterminata se ....

3 Dopo aver detto che cos'è una successione di funzioni, spiega che cosa si intende per serie di funzioni specificando poi il significato dei seguenti termini:
a. termine generale della serie **b.** ridotta n-esima

4 La serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^n$ ha come dominio di convergenza l'insieme:

a. $x > -1$ **b.** $-1 < x < 1$ **c.** $x < -1$ **d.** $x > -2$

5 Dopo aver detto quando una funzione si dice periodica e come si determina il suo periodo principale, indica il periodo delle seguenti funzioni:

a. $\cos 3x$ **b.** $\sin \frac{4}{3}x$ **c.** $\tan \frac{x}{2}$ **d.** $\cos \frac{x}{3}$

6 Che cosa significa che una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b)$ è prolungata per periodicità? Fai qualche esempio.

Applicazione

Scrivi i primi cinque termini delle seguenti serie.

7 **a.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

8 **a.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{n!}$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n!}{2n-1}$

9 **a.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2}$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (e^n - n)$

Scrivi le seguenti serie in forma compatta.

10 $\displaystyle \frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\ldots..$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}\right]$

11 $\displaystyle 4+\frac{9}{2}+\frac{16}{3}+\frac{25}{4}+\frac{36}{5}+\ldots..$ $\left[\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n-1}\right]$

12 $\displaystyle 1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\ldots..$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2}\right]$

13 $\displaystyle 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots..$ $\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}\right]$

14 $\displaystyle \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{20}+\ldots..$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}\right]$

15 $\displaystyle 2+\frac{5}{2}+\frac{10}{3}+\frac{17}{4}+\frac{26}{5}+\ldots..$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n}\right]$

Determina il carattere delle seguenti serie geometriche calcolandone la somma nel caso in cui sono convergenti.

16 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n$ $\left[S=\frac{7}{6}\right]$

17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $[S=2]$

18 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ $\left[S=\frac{5}{2}\right]$

19 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ $\left[S=\frac{1}{30}\right]$

20 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ [diverge]

21 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^n$ [diverge]

22 $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$ [$S = 2$]

23 $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n}$ [diverge]

Stabilisci il carattere delle seguenti serie per i valori di x assegnati.

24 **ESERCIZIO GUIDA**

$\sum_{n=0}^{+\infty} (3-2x)^n$ per $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$, $x = 3$

I termini della serie hanno come dominio l'insieme dei numeri reali.

- Per $x = 0$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n$ che, essendo la serie geometrica di ragione 3, è divergente.
- Per $x = \frac{4}{3}$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ che, essendo la serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, è convergente.
- Per $x = 3$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n$ che è una serie a termini di segno alterno; essa è divergente perchè il suo termine generale non è infinitesimo.

25 $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{4nx}$ $x = 2$ e $x = -1$ [divergente, convergente]

26 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{2x-1}\right)^n$ $x = 4$ e $x = 0$ [convergente, divergente]

27 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x-1}{(\sqrt{2})^n}$ $x = 0$ e $x = 1$ [convergente, convergente]

28 $\sum_{n=0}^{+\infty} (\ln x - 1)^n$ $x = 2$ e $x = e$ [convergente, convergente]

29 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2-x)^n}$ $x = 4$ e $x = -2$ [convergente, convergente]

LO SVILUPPO IN SERIE DI UNA FUNZIONE

Comprensione

30 Indica quale fra le seguenti rappresenta la serie di Taylor:

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n$ **b.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^n$

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^n$ **d.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

31 Dopo aver spiegato che cos'è un polinomio trigonometrico, stabilisci se l'espressione goniometrica $1 + \cos x - 4\sin x + \cos 4x - \sin 5x$ è un polinomio trigonometrico di ordine:

a. 1 **b.** 4 **c.** 5 oppure **d.** non è un polinomio trigonometrico

Applicazione

Determina lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni nel punto assegnato.

32 $\cos \pi x$ $n = 3,\ x = 0$ $\left[1 - \frac{\pi^2}{2}x^2\right]$

33 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ $n = 5,\ x = 0$ $\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right]$

34 $\sqrt{1 + x^2}$ $n = 5,\ x = 0$ $\left[1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right]$

35 $\sqrt[3]{1 - x}$ $n = 2,\ x = 0$ $\left[1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right]$

36 $\sin(\ln x)$ $n = 2,\ x = 1$ $\left[-\frac{3}{2} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]$

37 $\sqrt{1 + \ln x}$ $n = 2,\ x = 1$ $\left[\frac{1}{8} + \frac{5}{4}x - \frac{3}{8}x^2\right]$

38 $\sin x^2$ $n = 6,\ x = 0$ $\left[x^2 - \frac{x^6}{6}\right]$

39 $\cos\sqrt{\pi^2 + x^2}$ $n = 6,\ x = 0$ $\left[-1 + \frac{1}{8\pi^2}x^4 - \frac{1}{16\pi^4}x^6\right]$

40 $\ln(1 + \sin x)$ $n = 5,\ x = 0$ $\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24}\right]$

41 $e^{\sin x}$ $n = 4,\ x = 0$ $\left[1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right]$

Determina lo sviluppo delle seguenti serie trigonometriche arrestate al valore di n indicato.

42 $3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\cos nx$ $n = 6$

43 $\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin nx$ $n = 5$

44 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} [n \cos nx + (n - 1)\sin nx]$ $n = 4$

45 $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\cos nx + \frac{n+1}{n}\sin nx\right)$ $n = 6$

46 $\frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \cos nx + (-1)^{n+1}\sin nx]$ $n = 5$

47 $2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+1}\cos nx + \frac{1}{n+1}\sin nx\right]$ $n = 3$

LO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

RICORDA

Data la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π, integrabile nell'intervallo $[-\pi, \pi)$, si dice serie di Fourier la serie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dove $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx & \text{con } n \geq 0 \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx & \text{con } n > 0 \end{cases}$

Comprensione

48 Una funzione si dice continua a tratti se:

a. presenta un numero finito di discontinuità

b. presenta un numero finito di discontinuità solo di prima specie

c. presenta un numero finito di discontinuità solo di prima specie o eliminabili

d. presenta un numero finito di discontinuità di seconda specie.

49 Dopo aver ricordato il significato di funzione pari e di funzione dispari, completa le seguenti proposizioni in modo che diventino vere:

a. il prodotto di due funzioni pari è una funzione .... perché ....

b. il prodotto di due funzioni dispari è una funzione .... perché ....

c. il prodotto di una funzione pari con una funzione dispari è una funzione .... perché ....

d. se una funzione f è pari, allora $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx =$ ....

e. se una funzione f è dispari, allora $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx =$ ....

50 Nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia pari o dispari, il suo sviluppo in serie di Fourier risulta semplificato. Scrivi le espressioni della serie nei due casi motivando la forma ottenuta.

51 I coefficienti a_n dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $y = x^2$ definita nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità hanno espressione $a_n = (-1)^n \dfrac{4}{n^2}$; allora:

a. $a_1 = -4$ **b.** $a_3 = -\dfrac{4}{9}$ **c.** $a_4 = -\dfrac{1}{4}$ **d.** $a_6 = -\dfrac{1}{9}$

52 Una sola delle seguenti proposizioni relative allo sviluppo in serie di Fourier di una funzione pari è falsa, individuala.

a. $f(x)\cos nx$ è una funzione pari.

b. È formata soltanto da coseni.

c. $a_0 = a_n = 0$.

53 Una sola delle seguenti proposizioni relative allo sviluppo in serie di Fourier di una funzione dispari è falsa, individuala.

a. $f(x)\sin nx$ è una funzione pari. **b.** $b_n = 0$. **c.** $a_n = 0$.

Applicazione

Calcola gli sviluppi in serie di Fourier delle seguenti funzioni di periodo 2π, definite nell'intervallo indicato e prolungate per periodicità.

54 $f(x) = \frac{x}{2}$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx\right]$

55 $f(x) = x^2$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx\right]$

56 $f(x) = 1 - x$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx\right]$

57 $f(x) = \pi - x$ $\quad 0 \le x < 2\pi$ $\quad \left[2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}\right]$

58 $f(x) = x + |x|$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}\sin nx\right\}\right]$

59 $f(x) = \pi^2 - x^2$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[\frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx\right]$

60 $f(x) = \pi - |x|$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \cos nx\right]$

61 $f(x) = \sin^2 x$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right]$

62 $f(x) = |\sin x|$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}\right]$

63 $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[12\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx\right]$

64 $f(x) = x^3 - 2$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[2 \cdot \left\{-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^3} \sin nx\right\}\right]$

65 $f(x) = e^{|x|} - 1$ $\quad -\pi \le x < \pi$ $\quad \left[\frac{e^{\pi}}{\pi} - \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2e^{\pi}(-1)^n}{\pi(n^2+1)} - \frac{2}{\pi(n^2+1)}\right)\cos nx\right]$

66 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\quad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} \sin nx\right]$

67 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\quad \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right]$

68 $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi}x & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\quad \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin nx + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx\right]$

69 $f(x) = \begin{cases} 3x + \pi & -\pi \le x < 0 \\ 3x - \pi & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\left[-2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n + 1}{n} \sin nx\right]$

70 $f(x) = \begin{cases} x - 1 & -\pi \le x < 0 \\ x + 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 - 2(\pi + 1)(-1)^n}{n\pi} \sin nx\right]$

71 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\pi \le x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx\right]$

72 $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \le x < 0 \\ 2x & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx - 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx\right]$

73 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \sin nx\right]\right]$

74 $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$ $\left[\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{(2 - \pi^2 n^2)(-1)^n - 2}{\pi n^3} \sin nx\right]\right]$

75 $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n - 1 - \pi(-1)^n}{n} \sin nx\right\}\right]$

76 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ \cos x & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\left\{\frac{n}{n^2 - 1}\left[1 + (-1)^n\right] \sin nx\right\}\right]$

APPROFONDIMENTI *Lo sviluppo di funzioni periodiche di periodo T*

Determina gli sviluppi in serie di Fourier delle seguenti funzioni, definite nel periodo indicato e prolungate per periodicità.

77 $f(x) = 3 - x$ $\quad -1 \le x < 1$ $\left[3 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \pi nx\right]$

78 $f(x) = 3x$ $\quad 0 \le x < \pi$ $\left[\frac{3}{2}\pi - 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2nx}{n}\right]$

79 $f(x) = 1 - x^2$ $\quad -2 \le x < 2$ $\left[-\frac{1}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{\pi nx}{2}\right]$

80 $f(x) = x^2$ $\quad -1 \le x < 1$ $\left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi nx\right]$

81 $f(x) = 1 - x^2$ $\quad -1 \le x < 1$ $\left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi nx\right]$

82 $f(x) = \cos 2\pi x$ $\quad -\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{3}$ $\left[\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{6\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos 3\pi nx}{4 - 9n^2}\right]$

83 $f(x) = x^2 - x \qquad 0 \le x < 1$ $\left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2}\right]$

Funzioni pari

Scrivi la serie di Fourier delle seguenti funzioni pari nell'intervallo $[-\pi, \pi)$.

84 $f(x) = |2x|$ $\left[\pi + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx\right]$

85 $f(x) = \frac{x^2}{2}$ $\left[\frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\right]$

86 $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ $\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx\right]$

87 $f(x) = x^2|x|$ $\left[\frac{\pi^3}{4} + 6\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx\right]$

88 $f(x) = x^2 + |x|$ $\left[\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1+(-1)^n+2\pi(-1)^n}{n^2}\cos nx\right]$

89 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx\right]$

90 $f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & -\pi \le x < 0 \\ (x-\pi)^2 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ $\left[\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx\right]$

91 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ \left(|x| - \frac{\pi}{2}\right)^2 & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ $\left[\frac{\pi^2}{24} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx\right]$

92 $f(x) = \cos^2 x$ $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right]$

93 $f(x) = \cos^3 x$ $\left[\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right]$

Funzioni dispari

Scrivi la serie di Fourier delle seguenti funzioni dispari nell'intervallo $[-\pi, \pi)$.

94 $f(x) = x|x|$ $\left[-2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^3}\sin nx\right]$

95 $f(x) = x \cos x$ $\qquad \left[2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}\sin nx\right]$

96 $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ $\qquad \left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2\pi^2}{3n}(-1)^{n-1}+\frac{4}{n^3}(-1)^n\right)\sin nx\right]$

97 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\qquad \left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin nx + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right]$

98 $f(x) = \begin{cases} x^2+\pi x & -\pi \le x < 0 \\ \pi x - x^2 & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\qquad \left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^3}\sin nx\right]$

99 $f(x) = \begin{cases} x+\pi & -\pi \le x < 0 \\ x-\pi & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\qquad \left[-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin nx\right]$

100 $f(x) = \begin{cases} -x-\pi & -\pi \le x < 0 \\ -x+\pi & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\qquad \left[2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin nx\right]$

101 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}x+1 & -\pi \le x < 0 \\ \dfrac{2}{\pi}x-1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\qquad \left[-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}\sin nx\right]$

102 $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & -\pi \le x < 0 \\ 1-x^2 & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\qquad \left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[n^2(\pi^2-1)-2](-1)^n+n^2+2}{n^3}\sin nx\right]$

Per la verifica delle competenze

1 Scrivi lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$ per $x \in [-\pi, \pi)$ e dall'espressione ottenuta deduci la validità dell'uguaglianza $\dfrac{3}{4}\pi^2 = -1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{5} - \dfrac{18}{35} + \dfrac{4\sqrt{3}}{21} - \dfrac{5}{33} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

2 Scrivi lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$ per $x \in [-\pi, \pi)$ e dall'espressione ottenuta deduci l'uguaglianza $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{63} + \dfrac{1}{143} - \dfrac{1}{255} + \ldots\ldots\ldots$

Risultati di alcuni esercizi.

1 b. **2 a.** $|q| < 1$; **b.** $q < -1 \ \vee \ q \ge 1$; **c.** $q = -1$ **4 a.** **5 a.** $\frac{2}{3}\pi$; **b.** $\frac{3}{2}\pi$; **c.** 2π; **d.** 6π

30 d. **31 c.** **48 c.** **49 a.** pari; **b.** pari; **c.** dispari; **d.** $2\int_0^{\pi} f(x)dx$; **e.** 0

51 a., b. **52 c.** **53 b.**

Test finale di autovalutazione

1 Indica in quali fra i seguenti modi si può scrivere sinteticamente la serie

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\ldots\ldots$

a. $\sum_{n=1}^{7}\frac{n}{n+1}$ **b.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n+2}$ **c.** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n+2}$ **d.** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}$

3 punti

2 Date le serie numeriche

① $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ ② $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^n$ ③ $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\log\frac{1}{2}\right)^n$ ④ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ ⑤ $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{7}{5}\right)^n$

risultano convergenti:

a. ①, ③, ⑤ **b.** ①, ③ **c.** ②, ③ **d.** ④, ⑤ **e.** tutte

3 punti

3 La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty}x^{-n}$:

a. è divergente per $x=3$ V F

b. è convergente per $x=2$ V F

c. è divergente per $x=\frac{1}{4}$ V F

d. è convergente $\forall x \in R^-$ V F

4 punti

4 Stabilisci il carattere della seguente serie di funzione per i valori di x assegnati:

$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^n$ $x=-2$ $x=4$

4 punti

5 Sviluppa le seguenti funzioni in serie di potenze di Taylor in $x=0$:

a. $\sin 4x$ **b.** $(1+3x)^{12}$

8 punti

6 Considera la serie trigonometrica che ha come primi termini i seguenti, quindi rispondi a ciascuna domanda:

$-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{18}\cos 9x+\frac{1}{20}\cos 10x-\ldots\ldots$

a. si tratta di una serie trigonometrica di coefficienti $b_n=0$ e $a_n=\frac{(-1)^n}{2n}$ V F

b. l'espressione sintetica della serie trigonometrica è $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{2n}$ V F

c. i termini scritti rappresentano la ridotta di ordine 10 della serie V F

d. l'armonica del terzo ordine di $f(x)$ è $-\frac{1}{6}\cos 3x$ V F

8 punti

7 Della funzione $f(x) = x + \pi$ con $-\pi \le x < \pi$, puoi dire che:

a. ha periodo π V F

b. ha periodo 2π e può essere prolungata per periodicità V F

c. il coefficiente a_n dello sviluppo in serie di Fourier ha espressione

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx \qquad \forall n \in N$$ V F

d. il coefficiente a_n dello sviluppo in serie di Fourier ha espressione

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx \qquad \text{solo se } n \neq 0$$ V F

e. il coefficiente a_n dello sviluppo in serie di Fourier ha espressione

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx \qquad \forall n \in N$$ V F

f. il coefficiente b_n dello sviluppo in serie di Fourier ha espressione

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\,dx \qquad \forall n \in N$$ V F

6 punti

8 Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = |\cos x|$ con $0 \le x < \pi$ è:

a. $\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2-1}$

b. $\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2-1}$

c. $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2-1}$

d. $\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2-1}$

10 punti

9 Considerata la serie trigonometrica $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)}$,

a. scrivi la ridotta di ordine 7

b. specifica il valore dei coefficienti a_n e b_n

c. scrivi l'armonica del quarto ordine.

6 punti

10 Considera le seguenti funzioni nell'intervallo assegnato e scrivi il loro sviluppo in serie di Fourier:

a. $f(x) = \frac{3x-1}{2} \quad -\pi \le x < \pi$

b. $f(x) = \pi^2 + x^2 \quad -\pi \le x < \pi$

c. $f(x) = \begin{cases} 2 & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < \pi \end{cases}$

18 punti

11 Scrivi lo sviluppo in serie di Fourier delle seguenti funzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, dopo aver individuato quelle pari e quelle dispari:

a. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b. $f(x) = 3x^2$

c. $f(x) = x^4$

d. $f(x) = 3x^3 - x$

20 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Totale
Punteggio												

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 **b.**, **d.**

2 **b.**

3 **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** F

4 converge a $\frac{2}{3}$, diverge

5 **a.** $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$; **b.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{12}{n}3^n x^n$

6 **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** V

7 **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** F, **e.** V, **f.** V

8 **a.**

9 **a.** $\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{7}\cos 7x+\frac{1}{9}\cos 9x+\frac{1}{11}\cos 11x+\frac{1}{13}\cos 13x+\frac{1}{15}\cos 15x$;

b. $b_n=0,\ a_n=\frac{1}{2n+1}$; **c.** $\frac{1}{9}\cos 9x$

10 **a.** $-\frac{1}{2}-3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$; **b.** $4\left(\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}\right)$; **c.** $1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[(-1)^n-1]\sin nx}{n}$

11 **a.** dispari, $2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(6-\pi^2n^2)\sin nx}{3n^3}$

b. pari, $\pi^2+12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

c. pari, $\frac{1}{5}\pi^4+8\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}-48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^4}$

d. dispari, $2\left[18\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^3}-(3\pi^2-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}\right]$