

Consigli per risolvere in modo rapido le disequazioni

Spesso si può rendere più veloce la risoluzione di una disequazione tenendo presenti alcune considerazioni.

■ Qualunque fattore di cui è noto il segno può essere trascurato nella risoluzione di una disequazione; in particolare:

- se il fattore è positivo lo si può semplificare mantenendo il verso della disequazione;
- se il fattore è negativo lo si può semplificare cambiando il verso della disequazione.

Per esempio:

• $\frac{(x^2 + 1)(x + 3)}{x^2} > 0$ posto che sia $x \neq 0$, è equivalente alla disequazione $x + 3 > 0$

Infatti sia il binomio $x^2 + 1$ che il denominatore x^2 sono sempre positivi e quindi il loro segno non influisce su quello della frazione.

• $(4x^2 - 1)(-x^2 - 7) > 0$ è equivalente alla disequazione $4x^2 - 1 < 0$

Infatti il binomio $-x^2 - 7$ è sempre negativo e può essere trascurato se si cambia il verso della disequazione.

■ Una potenza di esponente pari, qualunque sia il segno della base, è sempre positiva o nulla e non è mai negativa, quindi una disequazione del tipo

$$[f(x)]^4 > 0 \text{ non è mai equivalente a } f(x) > 0.$$

Una potenza di esponente dispari assume sempre il segno della base, quindi una disequazione del tipo

$$[f(x)]^5 > 0 \text{ è sempre equivalente a } f(x) > 0.$$

Per esempio:

• $(2x^2 - 3)^4 \geq 0$ non è equivalente a $2x^2 - 3 \geq 0$

• $(3x^2 - 1)^3 < 0$ è equivalente a $3x^2 - 1 < 0$

Vediamo qualche esempio di risoluzione di disequazione che tiene conto di queste osservazioni.

I esempio

$$\frac{x(2x - 1)^2}{(x - 2)^3} > 0 \quad \text{di dominio } R - \{2\}.$$

Tenendo presente che:

- $(2x - 1)^2$ è sempre positivo se $x \neq \frac{1}{2}$ e si annulla per tale valore
- $(x - 2)^3$ ha lo stesso segno di $x - 2$

possiamo risolvere la disequazione $\frac{x}{x - 2} > 0$

con la condizione che sia $x \neq \frac{1}{2}$ perché non vogliamo che il numeratore si annulli.

Tabella dei segni	segno di x	0		2		R
	segno di $x-2$	-		+	○	+
	frazione	+		-	+	+

Possiamo quindi concludere che la disequazione è verificata se $x < 0 \vee x > 2$, insieme dal quale il valore $\frac{1}{2}$ è già escluso.

Il esempio

$$\frac{(x^2 + x)^4(4x^2 + 9)}{x^2 - 9} < 0$$

Dei polinomi al numeratore possiamo dire che:

- $(x^2 + x)^4$ è sempre positivo per $x \neq 0 \wedge x \neq -1$ e si annulla per tali valori
- $4x^2 + 9$ è sempre positivo

La disequazione è quindi equivalente a $\frac{1}{x^2 - 9} < 0$

cioè, tenendo presente che il numeratore è positivo, a $x^2 - 9 < 0$

con la condizione che sia $x \neq 0 \wedge x \neq -1$ perché non vogliamo che la frazione sia nulla.

La disequazione è quindi verificata se $-3 < x < 3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -1$

ESERCIZI

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$(x^2 + 5)(x^2 - 9) \geq 0$$

L'espressione al primo membro è già fattorizzata.

Del primo fattore possiamo dire che, essendo la somma di termini positivi, è sempre positivo; esso può quindi essere trascurato e la disequazione è equivalente a

$$x^2 - 9 \geq 0 \quad \text{che ha soluzione} \quad x \leq -3 \vee x \geq 3$$

2 ESERCIZIO GUIDATO

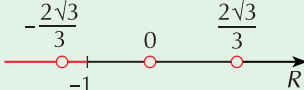
$$\frac{(3x^2 - 4)^2(x^2 + x)^3}{x} < 0$$

Il primo fattore al numeratore, essendo un quadrato, è sempre positivo se $x \neq \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Il segno del secondo fattore, che è elevato a potenza dispari, è quello della sua base.

La disequazione è quindi equivalente a $\frac{x^2+x}{x} < 0$ con $x \neq \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Raccogliendo x al numeratore e posto $x \neq 0$ si può poi semplificare ottenendo la disequazione equivalente

$$x + 1 < 0 \quad \text{con} \quad x \neq \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge x \neq 0$$


L'insieme delle soluzioni è quindi: $x < -1$ con $x \neq -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3 $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 3) < 0$ [$-3 < x < -2$]

4 $-4x^2(x + 1)^2(x - 1) \geq 0$ [$x \leq 1$]

5 $(x^4 - 16)(x - 2)^3 < 0$ [$x < -2$]

6 $(x^4 - 4x^3)(x^2 + 3x)^3 > 0$ [$x < -3 \vee x > 4$]

7 $\left(\frac{x^2 - x}{x + 2}\right)^2 > 0$ [$S = R - \{-2, 0, 1\}$]

8 $\frac{(x^2 - 4)^3(x + 1)^2}{x^2 - x - 2} \geq 0$ [$x \leq -2 \vee x > -1 \wedge x \neq 2$]

9 $\frac{(x^2 + 7)(x^3 + 8)}{x^4 - x^2} > 0$ [$-2 < x < -1 \vee x > 1$]

10 $\frac{(1 - 4x^2)^3(1 + 4x^2)}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} \geq 0$ [$x < -\frac{1}{2}$]

11 $\frac{4x^2 - 1}{(2x - 1)^2(x + 1)} \leq 0$ [$x < -1 \vee -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$]

12 $\frac{5x(x + 2)^4}{(x + 3)^2} \geq 0$ [$x \geq 0 \vee x = -2$]

13 $\left(\frac{3x^2 + 3 + 6x}{x^2 - 5x + 6}\right)^4 > 0$ [$S = R - \{-1, 2, 3\}$]

14 $\frac{(2x - 1)^2(x + 2)^3}{x} \geq 0$ [$x \leq -2 \vee x > 0 \vee x = \frac{1}{2}$]

15 $\frac{x^2(1 - 5x)^3}{(x^2 + 1)(x + 1)} > 0$ [$-1 < x < \frac{1}{5} \wedge x \neq 0$]