# Il piano cartesiano, la retta e le funzioni di proporzionalità

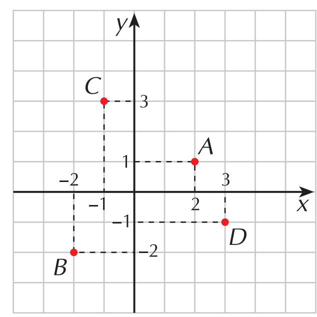
1 **ESERCIZIO SVOLTO**

**Il piano cartesiano.** Per fissare un **sistema di riferimento** nel piano si considerano due rette orientate fra loro perpendicolari e si fissa su ognuna di esse un sistema di ascisse avente come origine il loro punto di intersezione; se l'unità di misura fissata è la stessa per le due rette il sistema si dice monometrico, altrimenti dimetrico.

Convenzionalmente un asse viene disegnato orizzontale e prende il nome di asse delle ascisse o asse $x$, l'altro si disegna verticale e prende il nome di asse delle ordinate o asse $y$.

In questo modo ad ogni punto del piano viene associata una coppia ordinata di numeri $(x, y)$ e, viceversa, ad ogni coppia ordinata di numeri resta associato un solo punto.

Per esempio, nella figura a lato sono rappresentati i punti $A(2, 1)$, $B(-2, -2)$, $C(-1, 3)$, $D(3, -1)$.




2 **ESERCIZIO GUIDATO**

Ricordiamo che:

- la **misura di un segmento *AB*** di estremi $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, è data dalla relazione

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Se poi il segmento $AB$ è parallelo ad uno degli assi coordinati, la formula si semplifica e diventa:

$\overline{AB} = |x_B - x_A|$ se il segmento è parallelo all'asse $x$

$\overline{AB} = |y_B - y_A|$ se il segmento è parallelo all'asse $y$

- il punto medio $M$ del segmento $AB$ ha coordinate $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

Per esempio, dati i punti $A(2, \sqrt{2})$, $B(3, 3\sqrt{2})$, $C(3, \sqrt{2})$, calcoliamo le misure dei segmenti $AB$, $AC$, $BC$ e le coordinate dei loro punti medi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (3\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overline{AC} = |3 - 2| = 1$$

perché i punti $A$ e $C$, avendo la stessa ordinata, individuano un segmento parallelo all'asse $x$

$\overline{BC} = |\sqrt{2} - 3\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$

perché i punti $B$ e $C$, avendo la stessa ascissa, individuano un segmento parallelo all'asse $y$

Punto medio $M$ del segmento $AB$ $\quad M\left(\frac{2+3}{2}, \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}\right)$ cioè $M\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}\right)$

Punto medio $N$ del segmento $AC$ $\quad N\left(\frac{2+3}{2}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right)$ cioè $N\left(\frac{5}{2}, \sqrt{2}\right)$

Punto medio $S$ del segmento $BC$ $\quad S\left(\frac{3+3}{2}, \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right)$ cioè $S(3, 2\sqrt{2})$

**3** Dopo aver rappresentato in un sistema di riferimento monometrico ciascuno dei punti indicati, completa la frase ad essi relativa:

**a.** $A(2, 0)$; tutti i punti che hanno ordinata nulla, appartengono ...........

**b.** $B(0, -4)$; tutti i punti che hanno ascissa nulla, appartengono ...........

**c.** $C(+3, +4)$; tutti i punti che hanno entrambe le coordinate positive appartengono ...........

**d.** $D(-4, -3)$; tutti i punti che hanno entrambe le coordinate negative appartengono ...........

**e.** $E(-2, +5)$; tutti i punti che hanno ascissa negativa e ordinata positiva appartengono ...........

**f.** $F(+3, -4)$; tutti i punti che hanno ascissa positiva e ordinata negativa appartengono ...........

**4** I punti $A(-2, 3)$, $B(3, -1)$, $C(3, 5)$ individuano un triangolo; calcola:

**a.** il suo perimetro

**b.** le coordinate dei punti medi dei suoi lati

**c.** la lunghezza delle mediane del triangolo.

**5** Del triangolo isoscele $ABC$ di base $BC$ si sa che $B(-4, 3)$, $C(0, -1)$; si sa inoltre che il punto medio $M$ del lato $AB$ ha coordinate $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Trova le coordinate del vertice $A$ e la misura del perimetro del triangolo.

**6** Dato il triangolo $ABC$ di vertici $A(1, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(6, 3)$, verifica che è isoscele e determinane il perimetro e l'area.

**7** **ESERCIZIO SVOLTO**

**La retta nel piano cartesiano.** Abbiamo visto che ad una retta corrisponde sempre un'equazione lineare nelle due variabili $x$ e $y$; in particolare si ha che:

- un'equazione del tipo $x = k$ rappresenta una retta parallela all'asse $y$
- un'equazione del tipo $y = h$ rappresenta una retta parallela all'asse $x$
- un'equazione del tipo $y = mx$ rappresenta una retta passante per l'origine del sistema di riferimento
- un'equazione del tipo $y = mx + q$ rappresenta una retta generica non parallela all'asse $y$

Il parametro $m$, che non esiste per le rette parallele all'asse $y$, è il **coefficiente angolare** della retta ed è un indicatore dell'inclinazione della retta rispetto alla direzione positiva dell'asse delle ascisse (***figura 1a*** di pagina seguente):

- se $m$ è negativo la retta forma un angolo ottuso con la direzione positiva dell'asse delle ascisse
- se $m = 0$ la retta è parallela all'asse $x$
- se $m$ è positivo la retta forma un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Il parametro $q$ rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate e prende il nome di **ordinata all'origine** (***figura 1b***).

Per esempio (***figura 1c***):

- l'equazione $a: x = -5$ rappresenta una retta parallela all'asse $y$
- l'equazione $b: y = 3$ rappresenta una retta parallela all'asse $x$ (coefficiente angolare uguale a zero)
- l'equazione $c: y = \frac{3}{2}x$ rappresenta una retta per l'origine di coefficiente angolare $\frac{3}{2}$
- l'equazione $d: y = x - 2$ rappresenta una retta di coefficiente angolare 1 e ordinata all'origine $-2$

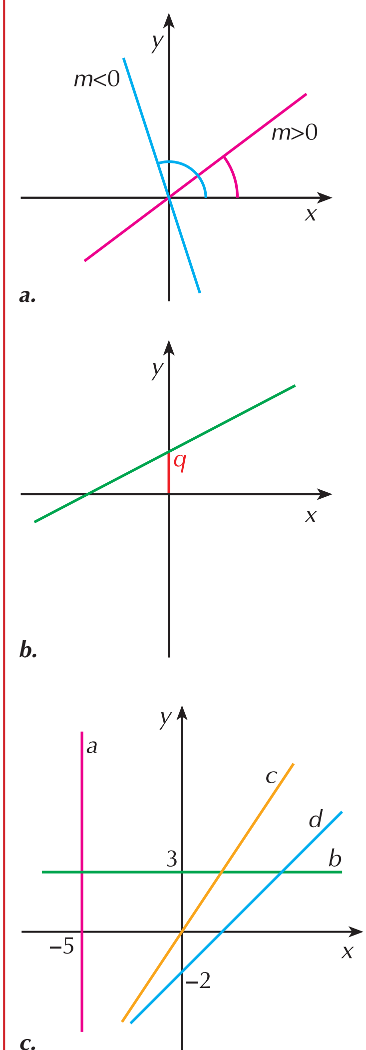
Quando l'equazione di una retta è data nella forma $ax + by + c = 0$, si dice che è espressa in **forma implicita**; quando è data nella forma $y = mx + q$ si dice che è espressa in **forma esplicita**; si può passare da una forma all'altra mediante semplici calcoli.

Per esempio:

- equazione in forma implicita $\quad 3x - 4y + 1 = 0$

  l'equazione in forma esplicita corrispondente si ottiene ricavando l'espressione di $y$: $\quad y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

***Figura 1***




- equazione in forma esplicita $\quad y = 3x - \frac{1}{2}$

  l'equazione in forma implicita corrispondente si ottiene trasportando tutti i termini al primo membro e calcolando eventualmente il *m.c.m.* fra i denominatori: $6x - 2y - 1 = 0$.

**8** Individua la tipologia delle rette che hanno le seguenti equazioni; trova, quando esistono, il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine e traccia il loro grafico:

**a.** $3x - 1 = 0$ **b.** $y + 2 = 0$ **c.** $y = -\frac{3}{4}x$

**d.** $-2x + 3y - 5 = 0$ **e.** $3y = 0$ **f.** $y = x - 1$

**9** **ESERCIZIO GUIDATO**

Se di una retta sono note le coordinate di due punti, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, il coefficiente angolare $m$ della retta passante per $P_1$ e $P_2$ è dato dalla seguente relazione:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Per esempio, il coefficiente angolare della retta che passa per i punti di coordinate $(3, 2)$ e $(5, -1)$ è:

$$m = \frac{-1-2}{5-3} = -\frac{3}{2}$$

Calcola ora da solo il coefficiente angolare delle rette che passano per le seguenti coppie di punti:

**a.** $A(0, 1)$ $\quad B(-2, 3)$

**b.** $P(2, 2)$ $\quad Q(-3, -5)$

**c.** $R\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$ $\quad S(-1, 2)$

Ricordiamo poi la condizione di parallelismo e quella di perpendicolarità di due rette di coefficienti angolari $m$ e $m'$:

- due rette sono parallele se e solo se $m = m'$
- due rette sono perpendicolari se e solo se $m \cdot m' = -1$ cioè $m' = -\frac{1}{m}$

Individua se le seguenti coppie di rette sono parallele, perpendicolari o se non si trovano in nessuna di queste situazioni:

- $r: 3x - 6y = 2$ $\quad s: x - 2y + 1 = 0$
- $r: x - 3y = 1$ $\quad s: 3x + y - 2 = 0$
- $r: 2x + y = 4$ $\quad s: 2x - y - 3 = 0$
- $r: -x + y + 1 = 0$ $\quad s: y + x - 3 = 0$
- $r: 3x - 3y = 2$ $\quad s: 3x - 3y = 1$
- $r: x + 3 = 0$ $\quad s: y - 2 = 0$

10 **ESERCIZIO GUIDATO**

Ricordiamo infine le formule che permettono di scrivere l'equazione di una retta conoscendo:

- le coordinate $(x_0, y_0)$ di un suo punto ed il coefficiente angolare $m$: $y - y_0 = m(x - x_0)$
- le coordinate $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ di due suoi punti: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

La seconda formula non è utilizzabile se la retta è parallela all'asse $x$ o all'asse $y$.
Per esempio:

- la retta che passa per il punto di coordinate $(2, -5)$ ed ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$ ha equazione:

$$y + 5 = \frac{1}{2}(x - 2) \qquad \text{cioè} \qquad y = \frac{1}{2}x - 6$$

- la retta che passa per i punti di coordinate $(-1, 3)$ e $(2, -2)$ ha equazione:

$$\frac{y-3}{-2-3} = \frac{x+1}{2+1} \qquad \text{cioè} \qquad 5x + 3y - 4 = 0$$

Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(-3, 1)$ ed ha coefficiente angolare $-2$; scrivi poi l'equazione della retta che passa per i punti $A(0, -2)$ e $B(5, 1)$.

**11** Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(0, 3)$ ed è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.
(Suggerimento: il coefficiente angolare della retta è uguale a ..........)

**12** Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $A(1, -4)$ ed è perpendicolare alla retta di equazione $x + 2y = 0$.

**13** Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti di coordinate $(-5, 2)$ e $(-5, -6)$.

**14** Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(1, 4)$ e per il punto $Q$ in cui la retta di equazione $y + 2x + 2 = 0$ interseca l'asse $y$.

**15** Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $A(0, -3)$ ed è perpendicolare alla retta passante per i punti $P(1, -2)$ e $Q(3, 5)$.
(Suggerimento: trova il coefficiente angolare della retta $PQ$ con la formula $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e poi scrivi l'equazione della retta)

**16** **ESERCIZIO GUIDATO**

Ricordiamo che per determinare le coordinate del punto di intersezione di due rette si deve risolvere il sistema formato dalle loro equazioni; in particolare:

- se il sistema è determinato le rette sono incidenti
- se il sistema è indeterminato le rette sono coincidenti
- se il sistema è impossibile le rette sono parallele e distinte.

Trova, se esiste, il punto di intersezione delle rette che hanno le seguenti equazioni:

**a.** $r: x + 2y - 7 = 0$ $\quad s: 3x + 2y + 1 = 0$

**b.** $r: x - 3y - 5 = 0$ $\quad s: -2x + 6y + 1 = 0$

**c.** $r: 5y - 1 = 0$ $\quad s: 2x + 3 = 0$

**17** Trova le coordinate dei vertici del triangolo i cui lati appartengono alle rette di equazioni $3x - y - 1 = 0$, $5x + 4y + 4 = 0$, $x - 6y + 28 = 0$.

**18** **ESERCIZIO SVOLTO**

La distanza del punto $P(x_0, y_0)$ dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$ è data dalla formula

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ricordiamo che, per applicare correttamente tale formula, l'equazione della retta deve essere data in forma implicita.

Per esempio, calcoliamo la distanza del punto $P(3, 4)$ dalla retta di equazione $y = -3x + 6$.

Scriviamo l'equazione della retta in forma implicita: $3x + y - 6 = 0$

Applichiamo la formula: $\dfrac{|3 \cdot 3 + 4 - 6|}{\sqrt{9+1}} = \dfrac{7}{\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{10}$.

**19** Calcola la distanza del punto $P(-3, -2)$ dalla retta di equazione $\dfrac{1}{2}x + y - 1 = 0$.

**20** Le rette di equazioni $r: y = 2x - 1$, $s: y = -2x + 7$, $t: y = 5$, $v: y = 2x - 5$ intersecandosi individuano un quadrilatero. Verifica che si tratta di un trapezio e calcolane il perimetro e l'area.

**21** Calcola l'area del triangolo di vertici $A(0, 3)$, $B(-1, -2)$, $C(5, 2)$.
(Suggerimento: scelta la base, per esempio, il lato $BC$, devi determinare l'altezza ad essa relativa, quindi devi calcolare la distanza del vertice $A$ dalla retta $BC$)

**22** **ESERCIZIO SVOLTO**

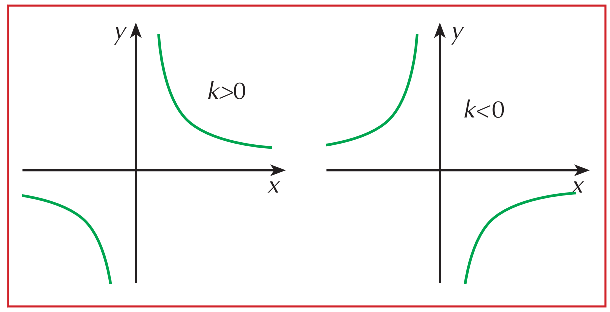
**Le funzioni di proporzionalità.** Ricordiamo che due grandezze variabili $x$ ed $y$ si dicono **direttamente proporzionali** quando il loro rapporto è costante, cioè $\frac{y}{x} = m$ o equivalentemente $y = mx$, con $m$ costante di proporzionalità diversa da zero; la relazione data è graficamente rappresentata da una retta passante per l'origine.

La relazione di **proporzionalità inversa** fra due grandezze variabili $x$ ed $y$ si esprime, invece, con l'equazione:

$$xy = k$$

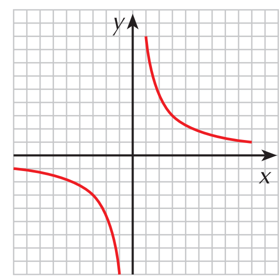
o equivalentemente $y = \frac{k}{x}$ con $k \neq 0$

che rappresenta un'iperbole equilatera il cui grafico ha la forma indicata nella figura a lato a seconda che sia $k > 0$ oppure $k < 0$.



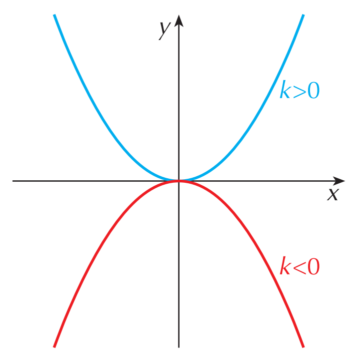

Per tracciare il grafico di un'iperbole equilatera, per esempio, quello corrispondente all'equazione $y = \frac{9}{x}$, si determinano le coordinate di alcuni punti:

| $x$ | 1 | 3 | 9 | $-1$ | $-3$ | $-9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 3 | 1 | $-9$ | $-3$ | $-1$ |




Sappiamo, invece, che se **la grandezza variabile $y$ è direttamente proporzionale al quadrato della grandezza variabile $x$** la relazione che lega le due variabili mediante una costante di proporzionalità $k$ è la seguente:

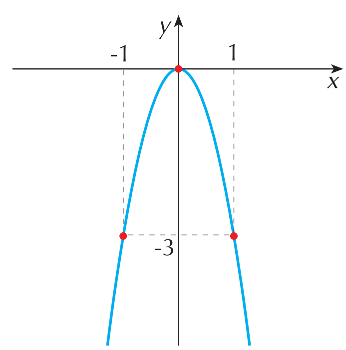
$$\frac{y}{x^2} = k \quad \text{o equivalentemente} \quad y = kx^2 \qquad \text{con} \quad k \neq 0$$



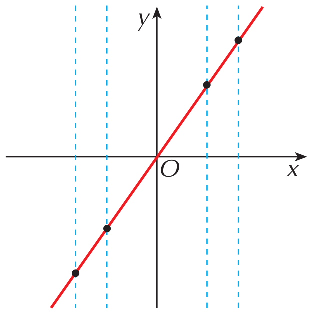

L'equazione $y = kx^2$ esprime **una proporzionalità quadratica** che graficamente corrisponde ad una curva nel piano cartesiano detta **parabola**. Tale curva passa per l'origine degli assi e tale punto è detto vertice della parabola. Inoltre se $k > 0$ la parabola ha la concavità verso l'alto, se $k < 0$ la concavità è rivolta verso il basso.

Per tracciare il grafico di una parabola, per esempio, del tipo $y = -3x^2$, si determinano le coordinate di alcuni punti:

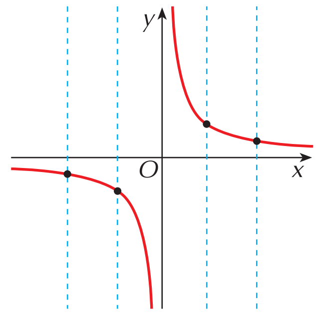
| $x$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | 0 | $-3$ |



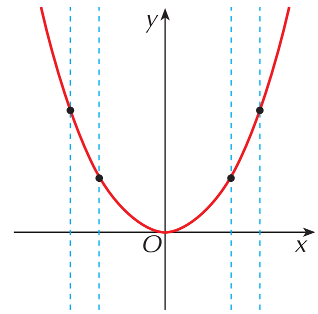
Facciamo un'ultima osservazione.




$y = mx \ (m \neq 0)$




$y = \dfrac{k}{x} \ (k \neq 0)$




$y = kx^2 \ (k \neq 0)$

Dalla figura notiamo che le curve nel piano cartesiano che esprimono la proporzionalità diretta, inversa e quadratica e cioè rispettivamente la retta (per l'origine), l'iperbole e la parabola (con vertice nell'origine) vengono intersecate, da rette parallele all'asse $y$, in un solo punto; siamo, dunque, di fronte a grafici di particolari **funzioni**, cioè di relazioni che associano ad ogni $x$ reale uno ed un solo $y$ reale.
Possiamo concludere che le tre relazioni di proporzionalità che abbiamo richiamato brevemente sono in realtà delle funzioni, dette rispettivamente **funzione di proporzionalità diretta**, inversa e quadratica.

**23** Costruisci i grafici delle seguenti funzioni di proporzionalità:

**a.** $y = -\dfrac{1}{2}x$ **b.** $y = -\dfrac{4}{x}$ **c.** $y = \dfrac{6}{5x}$ **d.** $y = \dfrac{3}{5}x$

**e.** $y = 2x^2$ **f.** $y = \dfrac{1}{2}x^2$ **g.** $\dfrac{y}{x^2} = -2$

**24** Un certo bene viene venduto a € 3 al pezzo; indicando con $x$ il numero di pezzi venduti e con $y$ i corrispondenti ricavi, scrivi la relazione che lega le due variabili e rappresentala graficamente.

**25** Un triangolo ha l'area di $12 cm^2$; se la misura della base è $x$ e quella dell'altezza è $y$, scrivi la relazione che lega le due variabili e rappresentala graficamente.

**Risultati di alcuni esercizi.**

**4.** $\sqrt{41} + \sqrt{29} + 6$; **b.** $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $(3, 2)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$; **c.** $\sqrt{26}$, $\dfrac{\sqrt{89}}{2}$, $\dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

**5.** $A(3, 6)$; $2p = 2\sqrt{58} + 4\sqrt{2}$ **9.** $2p(\widehat{ABC}) = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$; area$(\widehat{ABC}) = 15$

**10.** $2x + y + 5 = 0$; $3x - 5y - 10 = 0$ **11.** $y = x + 3$ **12.** $y = 2x - 6$

**13.** $x = -5$ **14.** $y = 6x - 2$ **15.** $7y + 2x + 21 = 0$

**16.** **a.** $\left(-4, \dfrac{11}{2}\right)$; **b.** parallele; **c.** $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{5}\right)$ **17.** $(2, 5)$, $(-4, 4)$, $(0, -1)$

**19.** $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ **20.** $2p = 2 + 4\sqrt{5}$; area $= 6$ **21.** 13

**24.** $y = 3x$, retta per l'origine **25.** $xy = 24$, iperbole equilatera