

La dimostrazione del teorema

Teorema. Le circonferenze rettificatae sono proporzionali ai rispettivi raggi.

Dimostrazione.

Consideriamo due circonferenze γ e γ' di raggi rispettivamente r e r' ; se C e C' sono le lunghezze delle due circonferenze rettificatae, dobbiamo dimostrare che $C : C' = r : r'$. Consideriamo allora i due poligoni regolari entrambi di n lati inscritti nelle due circonferenze (che per comodità prendiamo concentriche) e disegniamoli in modo che abbiano i lati paralleli a due a due come in **figura 1a**; i lati di questi poligoni sono proporzionali ai raggi (il triangolo OAB ha i lati proporzionali a quelli del triangolo $OA'B'$), quindi possiamo scrivere che:

$$AB : A'B' = OA : OA' \quad \text{cioè} \quad AB : A'B' = r : r'$$

A maggior ragione i perimetri dei due poligoni, che si ottengono moltiplicando per n i termini del primo rapporto, e che indichiamo rispettivamente con p_n e p'_n , sono proporzionali ai raggi, cioè:

$$p_n : p'_n = r : r'$$

Consideriamo adesso i due poligoni regolari di n lati circoscritti alle due circonferenze; con un ragionamento analogo, possiamo dire che anche i perimetri di questi poligoni, che indichiamo con P_n e P'_n , sono proporzionali ai raggi, cioè (**figura 1b**):

$$P_n : P'_n = r : r'$$

Se ora poniamo $\frac{r}{r'} = k$, le precedenti relazioni consentono di scrivere che

$$p_n = k \cdot p'_n \quad \text{e} \quad P_n = k \cdot P'_n \quad (\text{A})$$

Ma, ricordando la definizione di circonferenza rettificata,

$$p'_n < C' < P'_n \quad \text{quindi} \quad kp'_n < kC' < kP'_n$$

Tenendo presenti le relazioni (A), possiamo quindi scrivere $p_n < kC' < P_n$

Ma anche per C vale la relazione $p_n < C < P_n$

Le ultime due relazioni scritte valgono per ogni valore di n e questo significa che

$$C = kC' \quad \text{cioè} \quad \frac{C}{C'} = k$$

cioè, ricordando il significato che abbiamo attribuito a k

$$C : C' = r : r'$$

Da questa relazione, permutando i medi e scrivendo $C : r = C' : r'$

discende immediatamente che il rapporto fra la lunghezza della circonferenza rettificata ed il raggio è costante.

