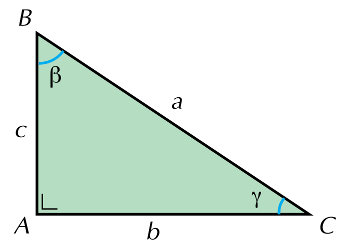
# Matematica in laboratorio

## 1. I TRIANGOLI RETTANGOLI CON EXCEL

Con riferimento alla ***figura 1***, i casi che si possono presentare sono i seguenti.

***Figura 1***




- Conosciamo la misura dell'ipotenusa e quella di un angolo acuto, cioè conosciamo $a$ e $\beta$. Ricaviamo che

  $\gamma = 90° - \beta$ $\qquad$ $b = a \sin\beta$ $\qquad$ $c = a\cos\beta$

- Conosciamo la misura dell'ipotenusa e quella di un cateto, cioè conosciamo $a$ e $b$. Ricaviamo che

  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $\qquad$ $\sin\beta = \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $\gamma = 90° - \beta$

- Conosciamo la misura dei cateti, cioè conosciamo $b$ e $c$. Ricaviamo che

  $a = \sqrt{c^2 + b^2}$ $\qquad$ $\tan\beta = \dfrac{b}{c}$ $\qquad$ $\gamma = 90° - \beta$

- Conosciamo la misura di un cateto e quella di un angolo acuto, cioè conosciamo $b$ e $\gamma$. Ricaviamo che

  $\beta = 90° - \gamma$ $\qquad$ $c = b\tan\gamma$ $\qquad$ $a = \dfrac{b}{\cos\gamma}$

Apriamo allora un foglio di lavoro e impostiamo il calcolo inserendo stringhe, dati e formule nelle celle specificate, come è indicato di seguito.

Nella preparazione del foglio, di cui puoi vedere un esempio in figura, abbiamo tenuto conto del fatto che le funzioni goniometriche di **Excel**, come abbiamo già visto nell'esercitazione dell'unità precedente, usano angoli la cui misura è espressa in radianti mentre noi prevediamo di assegnare le misure degli angoli in gradi (abbreviato nel foglio di esempio in "gr"); quando uno dei valori noti è un angolo, è quindi prevista una cella in cui calcolare il corrispondente valore dell'angolo in radianti (abbreviato nel foglio di esempio in "rad").

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | **RISOLUZIONE TRIANGOLI RETTANGOLI** | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | **1° CASO - ipotenusa e angolo acuto: a, beta** | | | | | **RISULTATI** | | |
| 4 | a | beta (gr) | beta (rad) | | | gamma (gr) | b | c |
| 5 | 10 | 27,5 | 0,4799655 | | | 62,5 | 4,6174861 | 8,870108 |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | **2° CASO - ipotenusa e cateto: a, b** | | | | | **RISULTATI** | | |
| 8 | a | b | | | | beta (gr) | gamma (gr) | c |
| 9 | 15 | 12 | | | | 53,130102 | 36,869898 | 9 |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | **3° CASO - i due cateti: b, c** | | | | | **RISULTATI** | | |
| 12 | b | c | | | | beta (gr) | gamma (gr) | a |
| 13 | 7 | 9 | | | | 37, 874984 | 52,125016 | 11,40175 |
| 14 | | | | | | | | |
| 15 | **4° CASO - cateto e angolo acuto: b, gamma** | | | | | **RISULTATI** | | |
| 16 | b | gamma (gr) | gamma (rad) | | | beta (gr) | c | a |
| 17 | 18 | 36,57 | 0,6382669 | | | 53,43 | 13,353362 | 22,41232 |
| 18 | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | |

La funzione di Excel che esegue la conversione da gradi a radianti è la funzione **RADIANTI**(angolo), quella che esegue la conversione da radianti a gradi è la funzione **GRADI**(angolo).
Le funzioni di Excel che consentono di ricavare l'ampiezza di un angolo nota una delle sue funzioni goniometriche sono:

- ARCSEN($x$)
- ARCCOS($x$)
- ARCTAN($x$)

dove $x$ è il valore della funzione goniometrica. Per esempio ARCSEN(1/2) restituisce l'angolo il cui seno vale $\frac{1}{2}$.

Relativamente al primo caso, abbiamo posto in A5 la misura dell'ipotenusa $a$ (10) e in B5 la misura in gradi nella forma decimale dell'angolo $\beta$ (27,5). Le formule da inserire sono poi le seguenti:

| | | |
|---|---|---|
| C5 | = RADIANTI(B5) | (formula per trasformare la misura di $\beta$ in radianti) |
| F5 | = 90 − B5 | (formula per il calcolo di $\gamma$ in gradi) |
| G5 | = A5 ∗ SEN (C5) | (formula per il calcolo di $b$) |
| H5 | = A5 ∗ COS (C5) | (formula per il calcolo di $c$) |

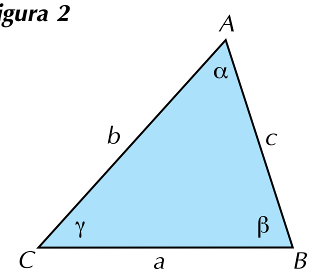
Prosegui impostando gli altri casi come è illustrato nell'esempio; ti indichiamo solamente le formule da inserire nelle celle specificate lasciando a te il compito di inserire le stringhe.

| | | |
|---|---|---|
| F9 | = GRADI(ARCSEN(B9/A9)) | (calcolo di $\beta$ in gradi) |
| G9 | = 90 − F9 | (calcolo di $\gamma$ in gradi) |
| H9 | = RADQ(A9 ∗ A9 − B9 ∗ B9) | (calcolo di $c$) |
| F13 | = GRADI(ARCTAN(A13/B13)) | (calcolo di $\beta$ in gradi) |
| G13 | = 90 − F13 | (calcolo di $\gamma$ in gradi) |
| H13 | = RADQ(A13 ∗ A13 + B13 ∗ B13) | (calcolo di $a$) |
| C17 | = RADIANTI(B17) | (conversione in radianti della misura di $\gamma$) |
| F17 | = 90 − B17 | (calcolo di $\beta$ in gradi) |
| G17 | = A17 ∗ TAN(C17) | (calcolo di $c$) |
| H17 | = A17/COS(C17) | (calcolo di $a$) |

## 2. I TRIANGOLI QUALUNQUE CON EXCEL

Con riferimento alla ***figura 2***, i casi che si possono presentare nella risoluzione di un triangolo qualsiasi sono i seguenti.

***Figura 2***




- Conosciamo la misura di due angoli e quella di un lato, ad esempio $\alpha$, $\gamma$ e $b$. Ricaviamo che

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) \qquad a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} \qquad c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$$

- Conosciamo la misura di due lati e quella dell'angolo compreso, ad esempio $a$, $c$ e $\beta$. Usiamo il teorema di Carnot:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta} \qquad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

- Conosciamo la misura dei tre lati, cioè conosciamo $a$, $b$ e $c$. Usando il teorema di Carnot ricaviamo che:

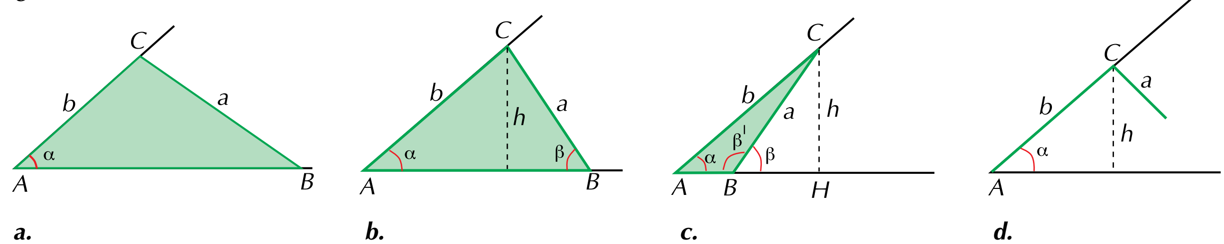
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

- Conosciamo la misura di due lati e dell'angolo opposto ad uno di essi, ad esempio $a$, $b$ e $\alpha$. Ricaviamo che:
  - se $a \geq b$ esiste un solo triangolo (***figura 3a.*** di pagina seguente) ed è:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \quad \text{cioè} \quad \beta = \arcsin\left(\frac{b \sin \alpha}{a}\right); \quad \gamma = 180° - (\alpha + \beta) \qquad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

- se $b \sin \alpha \leq a < b$ esistono due triangoli (***figura 3b.*** e ***c.***)
  - il primo si risolve con le stesse modalità del caso precedente
  - per il secondo $\beta' = 180° - \beta$ $\quad \gamma' = 180° - (\alpha + \beta')$ $\quad c = \dfrac{a \sin \gamma'}{\sin \alpha}$
- se $a < b \sin \alpha$ il problema non ammette soluzione (***figura 3d.***).

***Figura 3***




Impostiamo il foglio di lavoro in questo modo (osserva la figura per inserire le stringhe, i dati e convertire gli angoli, noi ti indichiamo solamente le formule di calcolo degli elementi del triangolo)

**1° CASO**

| | |
|---|---|
| G5 | = 180 − B5 − C5 |
| H5 | = A5 * SEN(D5)/SEN(RADIANTI(G5)) |
| I5 | = A5 * SEN(E5)/SEN(RADIANTI(G5)) |

**2° CASO**

| | |
|---|---|
| G9 | = RADQ(A9 * A9 + B9 * B9 − 2 * A9 * B9 * COS(D9)) |
| H9 | = GRADI(ARCCOS((G9 * G9 + B9 * B9 − A9 * A9)/(2 * G9 * B9))) |
| I9 | = 180 − C9 − H9 |

**3° CASO**

| | |
|---|---|
| G13 | = GRADI(ARCCOS((B13 * B13 + C13 * C13 − A13 * A13)/(2 * B13 * C13))) |
| H13 | = GRADI(ARCCOS((A13 * A13 + C13 * C13 − B13 * B13)/(2 * A13 * C13))) |
| I13 | = 180 − G13 − H13 |

**4° CASO**

Questo è il caso più complesso perché, a seconda delle misure assegnate, dobbiamo prevedere di risolvere un solo triangolo, due triangoli o nessun triangolo.

Formule per il caso di un solo triangolo (caso $a \geq b$):

| | |
|---|---|
| G17 | = SE(A17 >= B17; GRADI(ARCSEN((B17 * SEN(D17))/A17))) |
| H17 | = SE(A17 >= B17; 180 − G17 − C17) |
| I17 | = SE(A17 >= B17; (A17 * SEN(RADIANTI(H17)))/SEN(D17)) |

Formule per il caso di due triangoli (caso $b \sin \alpha \leq a < b$):

| | |
|---|---|
| G19 | = SE(E(A17 < B17; A17 >= B17 * SEN(D17)); GRADI(ARCSEN((B17 * SEN(D17))/A17))) |
| H19 | = SE(E(A17 < B17; A17 >= B17 * SEN(D17)); 180 − G19 − C17) |
| I19 | = SE(E(A17 < B17; A17 >= B17 * SEN(D17)); (A17 * SEN(RADIANTI(H19)))/SEN(D17)) |
| G20 | = SE(G19; 180 − G19) |
| H20 | = SE(G19; 180 − C17 − G20) |
| I20 | = SE(G19; A17 * SEN(RADIANTI(H20))/SEN(D17)) |

Formule per il caso di nessun triangolo:

| | |
|---|---|
| G22 | = SE(A17 < B17 * SEN(D17); VERO()) |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | **RISOLUZIONE TRIANGOLI QUALSIASI** | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | **1° CASO - due angoli e un lato: alfa, gamma, b** | | | | | | | **RISULTATI** | |
| 4 | b | alfa (gr) | gamma (gr) | alfa (rad) | gamma (rad) | | beta (gr) | a | c |
| 5 | 15 | 32,25 | 50,65 | 0,562869 | 0,8840093 | | 97,1 | 8,066069 | 11,68894 |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | **2° CASO - due lati e l'angolo compreso: a, c, beta** | | | | | | | **RISULTATI** | |
| 8 | a | c | beta (gr) | beta (rad) | | | b | alfa (gr) | gamma (gr) |
| 9 | 153 | 75 | 15,22056 | 0,265649 | | | 83,00019 | 151,0563 | 13,72313 |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | **3° CASO - tre lati: a, b, c** | | | | | | | **RISULTATI** | |
| 12 | a | b | c | | | | alfa (gr) | beta (gr) | gamma (gr) |
| 13 | 175 | 286 | 197 | | | | 37,01136 | 100,3284 | 42,66027 |
| 14 | | | | | | | | | |
| 15 | **4° CASO - due lati e l'angolo opposto ad uno di essi: a, b, alfa** | | | | | | | **RISULTATI** | |
| 16 | a | b | alfa (gr) | alfa (rad) | | | beta (gr) | gamma (gr) | c |
| 17 | 98 | 112 | 55 | 0,959931 | | 1 triangolo | FALSO | FALSO | FALSO |
| 18 | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | 2 triangoli | 69,41861 | 55,58139 | 98,69125 |
| 20 | | | | | | | 110,5814 | 14,41861 | 29,78988 |
| 21 | | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | nes. triang. | FALSO | | |

## 3. LA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI: UN CASO PARTICOLARE CON GEOGEBRA

Verifichiamo che se di un triangolo sono assegnate le misure di due lati $a$ e $b$ e dell'angolo opposto ad uno di essi, per esempio l'angolo $\alpha$ opposto al lato $a$, si possono presentare tre possibilità a seconda della misura di $a$.
Eliminando dalla finestra grafica gli assi cartesiani, disegniamo dunque un angolo $\alpha$ e fissiamo su uno dei suoi lati un punto $C$ in modo che sia $\overline{AC} = b$.

Seguiamo adesso questa procedura.

- costruiamo uno slider che rappresenti la misura del segmento $a$ assumendo zero come estremo sinistro e un valore superiore alla lunghezza di $b$ come estremo superiore del range di valori (nella nostra simulazione, essendo $b = 5$, abbiamo posto uguale a 7 l'estremo destro)
- Disegniamo la circonferenza di centro $C$ e raggio uguale ad $a$ usando lo strumento *6 - Circonferenza dati centro e raggio* indicando $a$ come misura del raggio.
- Con lo strumento *2 - Intersezione di due oggetti troviamo* i punti d'intersezione della circonferenza con la semiretta $r$ (il lato dell'angolo che non contiene il punto $C$).

Agiamo adesso sullo slider e facciamo variare la lunghezza del segmento $a$; ci accorgiamo che fino ad un certo valore non esistono intersezioni tra la circonferenza e la semiretta $r$, poi ne ce sono due e infine ne troviamo una sola.
Cerchiamo di capire a che cosa corrispondono queste situazioni.
Tracciamo da $C$ la retta perpendicolare a $r$ e indichiamo con $H$ il suo punto d'intersezione con $r$; definiamo quindi il segmento $CH$ (nella figura è evidenziato in blu) e nascondiamo la perpendicolare.
La misura di $CH$ viene calcolata automaticamente da GeoGebra e corrisponde al valore $b \sin \alpha$; puoi controllare applicando il primo teorema dei triangoli rettangoli al triangolo $CAH$.

Questo è il valore del raggio al di sotto del quale la circonferenza non interseca la retta $r$ e non può quindi definire alcun triangolo.

Oltre questo valore troviamo inizialmente due punti di intersezione e dobbiamo concludere che esistono due triangoli. Quando il raggio diventa più lungo del lato *b*, vi è un solo punto d'intersezione con la semiretta *r* e dunque vi è un solo triangolo.

Per costruirli dobbiamo usare lo strumento *5- Poligono* e indicare i tre vertici del primo triangolo (nella figura *ACE*) tornando sul primo punto per chiuderlo e poi i vertici del secondo (*ACD*).

Per evidenziarli in modo che si possano distinguere, dal menu contestuale, abbiamo poi usato due tipi differenti di tratteggio che si possono scegliere dalla scheda *Stile*.