

Analisi di Fourier delle funzioni periodiche

Obiettivi

- comprendere il concetto di serie numerica e di convergenza
- estendere il concetto di serie alle funzioni
- comprendere il significato di funzione periodica
- individuare le caratteristiche di una serie trigonometrica
- sviluppare in serie di Fourier una funzione periodica

1. SERIE E FUNZIONI PERIODICHE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 17

1.1 Le serie numeriche

La questione dell'approssimazione di una funzione in un punto è già stata affrontata con lo sviluppo di una funzione tramite i polinomi di Taylor; il problema però rimane se vogliamo costruire l'approssimazione di una funzione in un intervallo del suo dominio e non solo in un punto. Per poter affrontare questo problema dobbiamo premettere alcune questioni che riguardano le serie numeriche e di funzioni.

Consideriamo una successione $\{a_n\}$ di numeri reali definiti da una qualche regola e costruiamo le somme s_n dei termini di tale successione a partire dal primo a quello di indice n :

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

Per esempio, se $a_n = \frac{1}{n}$ (in questo caso si parte da s_1 in quanto s_0 non esiste), le somme s_n sono le seguenti:

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \quad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \quad \dots$$

Gli s_n sono numeri che costituiscono a loro volta una successione numerica $\{s_n\}$ che prende il nome di successione delle **ridotte n -esime**; la generica ridotta n -esima si indica sinteticamente con il simbolo

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

Se $n \rightarrow +\infty$, abbiamo la somma di un numero infinito di termini e a questa somma diamo il nome di *serie numerica*.

Si dice **serie numerica** l'espressione $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

Ci chiediamo a che cosa può dare luogo la somma di un numero infinito di addendi. Questo equivale a chiedersi se esiste e che valore ha il limite per $n \rightarrow +\infty$ di s_n ; si possono presentare tre possibili situazioni:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$
cioè il limite esiste ed è finito ed in questo caso diciamo che la serie è **convergente**
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$
cioè il limite esiste ma non è finito e diciamo allora che la serie è **divergente**
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ non esiste
ed in questo caso diciamo che la serie è **indeterminata**.

Per esempio:

- è intuitivo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$ è divergente a $+\infty$ in quanto somma di termini che diventano sempre più grandi

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è invece convergente perché è la somma dei termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$; sappiamo che tale somma vale $\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$ ed è:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2 \quad \rightarrow \quad \text{la serie converge quindi a } 2$$

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ è indeterminata in quanto non esiste il limite per $n \rightarrow +\infty$ di questa somma.

La somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q vale $\frac{1 - q^n}{1 - q}$

Serie numeriche del tipo di quelle appena viste hanno la forma $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, con $q \in \mathbb{R}$, e si dicono **serie geometriche** in quanto i loro termini costituiscono una progressione geometrica. Si può dimostrare che:

la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$:

- **converge** se $-1 < q < 1$ ed è $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
- **diverge** se $q < -1 \vee q \geq 1$
- è **indeterminata** se $q = -1$.

1.2 Le serie di funzioni

Consideriamo adesso una successione $\{f_n(x)\}$ i cui termini siano delle funzioni, tutte definite in uno stesso dominio D .

Per esempio, possiamo considerare la successione:

$$f_0(x) = x^0 = 1 \quad f_1(x) = x^1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^3 \quad \dots \quad f_n(x) = x^n \quad \dots$$

Analogamente a quanto fatto per le successioni numeriche, possiamo costruire le somme s_n dei termini di questa successione

$$\begin{aligned} s_0 &= f_0(x) \\ s_1 &= f_0(x) + f_1(x) \\ &\vdots \\ s_n &= f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) \end{aligned}$$

Considerando l'esempio precedente:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 1 + x \\ &\vdots \\ s_n &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \end{aligned}$$

Se $n \rightarrow +\infty$, abbiamo la somma di un numero infinito di funzioni e a questa somma diamo il nome di *serie di funzioni*.

Si dice **serie di funzioni** l'espressione $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots$

dove le funzioni $f_n(x)$ sono tutte definite in uno stesso dominio D .

Per le serie di funzioni si usa una terminologia analoga a quella usata per le serie numeriche: le funzioni $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$ si dicono **termini** della serie, la generica funzione $f_n(x)$ ne è il **termine generale**; la somma

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

è la **somma parziale di indice (o ordine) n o ridotta n -esima** ed è ancora una funzione di x definita in D .

Al variare di x in D , la serie di funzioni diventa una serie numerica che può essere convergente, divergente o indeterminata.

Ad esempio, la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

diventa una serie geometrica divergente per $x = 2$: $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$

diventa una serie geometrica convergente per $x = \frac{2}{3}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots$

diventa una serie geometrica indeterminata per $x = -1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

In generale possiamo dire che questa serie di funzioni è una serie numerica:

- convergente se $-1 < x < 1$
- divergente se $x < -1 \vee x \geq 1$
- indeterminata se $x = -1$.

Una serie di funzioni può quindi avere una determinata caratteristica per tutti gli x che appartengono ad un certo insieme, finito o infinito; in particolare, interessa conoscere per quali valori di x una serie di funzioni diventa una serie numerica convergente. Diamo allora la seguente definizione.

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni di dominio D ; si dice che tale serie è convergente in un insieme E se, per ogni $x \in E$, è convergente la serie numerica che si ottiene da quella data.
L'insieme E si dice **dominio di convergenza**.

Il dominio di convergenza E è evidentemente un sottoinsieme, proprio o improprio, del dominio D delle funzioni $f_n(x)$.

Nel caso dell'esempio precedente, le funzioni x^n hanno come dominio R , l'insieme di convergenza è $(-1,1)$.

1.3 Le funzioni periodiche

Una funzione $f(x)$, definita in un dominio D , si dice **periodica** se esiste un numero reale T per il quale si verifica che

$$f(x + T) = f(x)$$

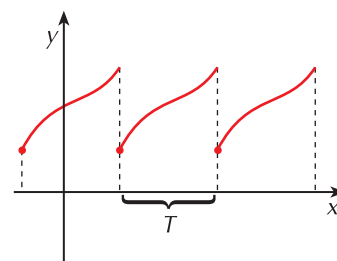
Il più piccolo numero T per il quale vale la precedente relazione rappresenta il **periodo** della funzione.

Geometricamente parlando, la definizione di funzione periodica implica che il suo grafico si può tracciare restringendo il dominio ad un qualunque intervallo di ampiezza T e ripetendo tale grafico in ogni intervallo successivo della stessa ampiezza (**figura 1**).

Abbiamo già visto, per esempio, che le funzioni goniometriche:

- $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π
- $\tan x$ è periodica di periodo π

Figura 1



- $\sin nx$ e $\cos nx$ sono periodiche di periodo $\frac{2\pi}{n}$
- $\tan nx$ è periodica di periodo $\frac{\pi}{n}$.

Ma non solo le funzioni goniometriche sono periodiche; per esempio le due funzioni in **figura 2** rappresentano rispettivamente:

- la funzione $y = x$ definita nell'intervallo $[0, 1)$ e replicata in tutti gli intervalli successivi e precedenti di ampiezza 1:
.... $[-2, -1)$ $[-1, 0)$ $[0, 1)$ $[1, 2)$ $[2, 3)$
- la funzione $y = e^x$ anch'essa definita nell'intervallo $[-1, 1)$ e replicata in tutti gli intervalli successivi e precedenti di ampiezza 2:
.... $[-5, -3)$ $[-3, -1)$ $[-1, 1)$ $[1, 3)$ $[3, 5)$

La rappresentazione algebrica di queste funzioni è la seguente:

- $y = x - k$ negli intervalli $[k, 1 + k)$ con $k \in \mathbb{N}$

Infatti:

se $k = -2$ la funzione ha equazione $y = x + 2$ ed è definita nell'intervallo $[-2, -1)$

se $k = -1$ la funzione ha equazione $y = x + 1$ ed è definita nell'intervallo $[-1, 0)$

se $k = 0$ la funzione ha equazione $y = x$ ed è definita nell'intervallo $[0, 1)$

se $k = 1$ la funzione ha equazione $y = x - 1$ ed è definita nell'intervallo $[1, 2)$

se $k = 2$ la funzione ha equazione $y = x - 2$ ed è definita nell'intervallo $[2, 3)$

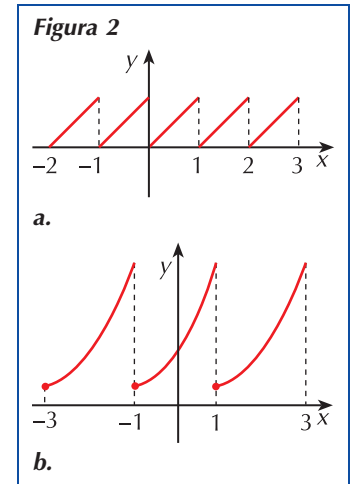
e così via (prova a disegnare ciascuna funzione nell'intervallo di pertinenza).

- $y = e^{x-2k}$ negli intervalli $[-1 + 2k, 1 + 2k)$ con $k \in \mathbb{N}$

Attribuisci a k alcuni valori interi come nell'esempio precedente e verifica che il grafico ottenuto corrisponde effettivamente a quello in figura.

La forma algebrica di queste funzioni non è sempre facile sia da scrivere che da comprendere in quanto vengono coinvolti dei parametri e i due esempi precedenti, che pure sono semplici, ne sono una prova; per evitare complicazioni, si è soliti scrivere le equazioni di queste funzioni in uno degli intervalli di periodicità, di solito quello principale, e si dice che *vengono prolungate per periodicità*. Le funzioni dei due esempi precedenti si scrivono così:

- $y = x$ in $[0, 1)$ e prolungata per periodicità
- $y = e^x$ in $[-1, 1)$ e prolungata per periodicità.



VERIFICA DI COMPrensIONE

1. La serie numerica i cui primi termini sono $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ è:

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$

c. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$

d. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n}$

2. Una funzione è periodica di periodo T se:

a. $f(x) = f(x) + T$

b. $f(x + T) = -f(x)$

c. $f(x + T) = f(x)$

d. $f(x + T) = f(x) + f(T)$

2. LO SVILUPPO IN SERIE DI UNA FUNZIONE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 19

Abbiamo già ricordato all'inizio del primo paragrafo che i polinomi di Taylor rappresentano l'approssimazione di una funzione in un intorno di un suo punto x_0 ; essi sono definiti tramite la somma

$$\sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

e sappiamo che il livello di approssimazione migliora all'aumentare del numero di termini, cioè al crescere di k .

Se facciamo tendere k all'infinito, otteniamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

che rappresenta lo **sviluppo in serie di Taylor** relativo alla funzione $f(x)$ e al punto x_0 .

Per esempio, lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $y = e^x$ relativa al punto $x_0 = 0$ è il seguente (ricordiamo che, poiché la derivata di e^x è sempre e^x , allora $f^{(n)}(0) = 1$ per ogni valore di n):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Ma, come già evidenziato in apertura del capitolo, il problema che ora vogliamo affrontare è quello di approssimare una funzione in un intervallo del suo dominio. Questo problema fu risolto brillantemente dal francese Joseph Fourier (1768-1830), docente di matematica all'École Normale e all'École Polytechnique, il quale ebbe l'intuizione che una qualsiasi funzione periodica può essere sviluppata in una serie che coinvolge le funzioni seno e coseno e che ha la forma

$$\underbrace{\frac{1}{2} a_0}_{\text{termine costante}} + \underbrace{a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots}_{\text{sviluppo in serie di } a_n \cos(nx)} + \underbrace{b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots}_{\text{sviluppo in serie di } b_n \sin(nx)}$$

dove gli a_n e b_n sono coefficienti numerici opportuni. Siamo in presenza di una serie che viene detta *serie trigonometrica*.

Chiamiamo **serie trigonometrica** ogni serie del tipo

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dove i termini a_n e b_n sono numeri reali che si dicono **coefficienti della serie**.

Ogni funzione che si ottiene da questa serie per un particolare valore di n rappresenta la *ridotta n-esima* della serie e viene detta **polinomio trigonometrico**. Ogni termine della serie prende il nome di **armonica** e in particolare:

- $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ si dice prima armonica o armonica fondamentale
- $a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ si dice seconda armonica o armonica di indice 2
- $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ si dice n -esima armonica o armonica di indice n

**LO SVILUPPO IN SERIE
IN UN PUNTO**

**LO SVILUPPO IN SERIE
IN UN INTERVALLO**

Per esempio, consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$$

che è convergente; essa può essere interpretata come una serie trigonometrica i cui coefficienti sono i numeri

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

La funzione somma è quindi una funzione periodica di periodo 2π . Le sue armoniche sono le funzioni

- $\sin x$ del primo ordine
- $-\frac{1}{2} \sin 2x$ del secondo ordine
- $\frac{1}{3} \sin 3x$ del terzo ordine e così via.

Le funzioni $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ sono periodiche rispettivamente di periodo

$$2\pi \quad \pi \quad \dots \quad \frac{2\pi}{n}$$

La loro somma è quindi periodica di periodo 2π , che è il più piccolo multiplo comune a tutti i periodi.

3. LO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

3.1 Le condizioni di sviluppabilità e la convergenza

L'interesse per lo sviluppo in serie di funzioni periodiche è determinato dal fatto che molti fenomeni hanno la caratteristica di essere associati a funzioni di questo tipo: dalle oscillazioni di un pendolo alla propagazione delle onde meccaniche o elettromagnetiche, dalle pulsazioni cardiache agli impulsi elettrici. Nei fenomeni di tipo ondulatorio vale poi il **principio di sovrapposizione** il quale afferma che se in una regione transitano due o più perturbazioni ondose, esse danno luogo ad un'onda più complessa che si ottiene sommandole punto a punto.

Se riprendiamo l'esempio del paragrafo precedente, il grafico della funzione

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$$

si può ottenere sommando punto a punto i grafici delle sue armoniche

$$y_1 = \sin x \quad y_2 = -\frac{1}{2} \sin 2x \quad y_3 = \frac{1}{3} \sin 3x \quad y_4 = -\frac{1}{4} \sin 4x \quad \dots$$

In **figura 3a** mostriamo come si costruisce la funzione $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$

somma delle prime due armoniche: nella figura sono messi in evidenza il segmento a (in blu) che rappresenta il valore di $\sin x$, il segmento b (in rosso) che

rappresenta il valore di $-\frac{1}{2} \sin 2x$ e il segmento $a + b$

(in verde) che rappresenta il valore della funzione somma in un punto particolare.

Al crescere del numero n di armoniche si ottiene un grafico come quello in **figura 3b**. Esso rappresenta un'approssimazione della funzione periodica in **figura 3c** che viene detta onda a *dente di sega* e che svolge un ruolo particolarmente importante in elettronica.

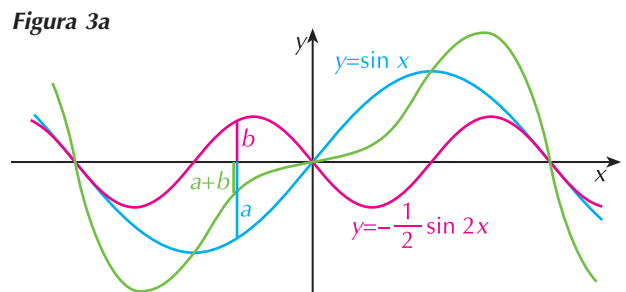


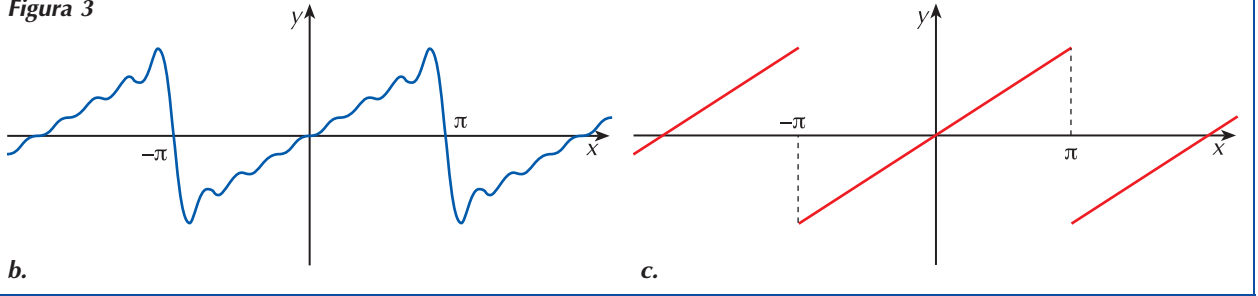
Figura 3a

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 21



Applicazione informatica on line

Figura 3



Il problema si presenta però di solito in forma inversa rispetto all'esempio ora presentato, vale a dire che si ha una funzione periodica come quella in **figura 3c** e si vuole trovare la serie di funzioni che meglio la approssima.

Fourier, nella sua analisi, comprese che ogni segnale periodico di periodo T può essere ottenuto mediante la sovrapposizione di un numero infinito di segnali di tipo trigonometrico, ciascuno dei quali è associato ad una particolare frequenza che è multipla di quella fondamentale $\frac{1}{T}$. Questo significa che ogni funzione periodica, sotto opportune condizioni, è sviluppabile in serie trigonometrica.

Le condizioni per cui è possibile eseguire uno sviluppo in serie sono piuttosto complesse e vanno al di là delle nostre attuali conoscenze. Possiamo tuttavia affermare che:

se una funzione $f(x)$, periodica di periodo T , si mantiene limitata ed è integrabile nell'intervallo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, allora è sviluppabile in serie trigonometrica.

Funzioni periodiche come quelle rappresentate in **figura 2** e in **figura 3** precedenti, che sono periodiche e limitate e delle quali è possibile calcolare l'integrale in ogni intervallo di periodicità, sono quindi sviluppabili in serie.

Possiamo adesso dare la seguente definizione che vale per le funzioni periodiche di periodo 2π .

Data una funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π , integrabile nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, si dice **serie di Fourier** ad essa associata la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

in cui i coefficienti a_n e b_n sono detti coefficienti di Fourier.

Nelle ipotesi specificate sopra per la funzione f , si dimostra poi che i coefficienti di Fourier delle funzioni periodiche di periodo 2π sono dati dalle relazioni:

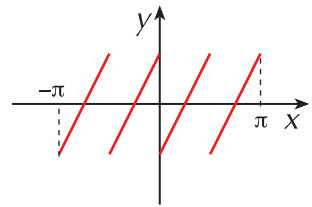
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & \text{per } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & \text{per } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

In un fenomeno rappresentato da una funzione periodica di periodo T , si dice *frequenza* l'espressione $f = \frac{1}{T}$. Essa rappresenta il numero di oscillazioni che avviene in un periodo e si misura in Hertz.

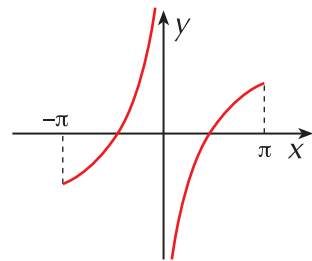
Una funzione è integrabile in un intervallo limitato $[a, b]$ se è continua in $[a, b]$.

Il problema non è però ancora del tutto risolto: se una funzione possiede le caratteristiche che abbiamo enunciato è possibile svilupparla in serie di Fourier, ma non siamo ancora sicuri che lo sviluppo converga alla funzione f . Il seguente teorema ci dà delle condizioni sufficienti per la convergenza (ne vediamo una forma semplificata).

Figura 4



a. funzione continua a tratti e monotona



b. funzione non continua a tratti (in $x = 0$ discontinuità di seconda specie)

Teorema (di Dirichlet). Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π ; se $f(x)$:

- è continua a tratti nell'intervallo $[-\pi, \pi]$
- è monotona a tratti in tale intervallo

allora la serie di Fourier ad essa associata converge a $f(x)$.

Le espressioni *continua a tratti* e *monotona a tratti* hanno il seguente significato (**figura 4**):

- la funzione è continua in tutti i punti dell'intervallo tranne al più in un numero finito di punti che sono però discontinuità di prima o di terza specie; vale a dire che è continua in ciascun sottointervallo dell'intervallo di periodicità con eventuali salti della funzione nei punti estremi
- in ciascuno dei sottointervalli identificati sopra, la funzione è monotona.

Nell'ipotesi di convergenza, la somma della serie è:

- la funzione $f(x)$ in tutti i punti dell'intervallo $(-\pi, \pi)$ che sono di continuità per f ;
- la media aritmetica dei limiti destro e sinistro di f nei punti x_0 di discontinuità interni all'intervallo $[-\pi, \pi]$: $\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right]$
- il valore $\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) \right]$ negli estremi $-\pi$ e π .

ESEMPI

Dopo aver verificato che le seguenti funzioni sono sviluppabili in serie di Fourier, scriviamone lo sviluppo.

1. $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità

Il grafico della funzione è in **figura 5a** ed in essa riconosciamo la **curva a dente di sega** di cui abbiamo parlato a inizio paragrafo.

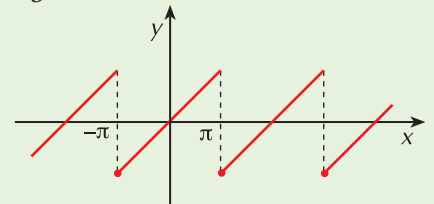
La funzione è continua in ogni intervallo di periodicità e presenta una discontinuità di prima specie in $x = \pi$.

Essa è quindi sviluppabile in serie di Fourier; calcoliamo i coefficienti della serie.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Figura 5a



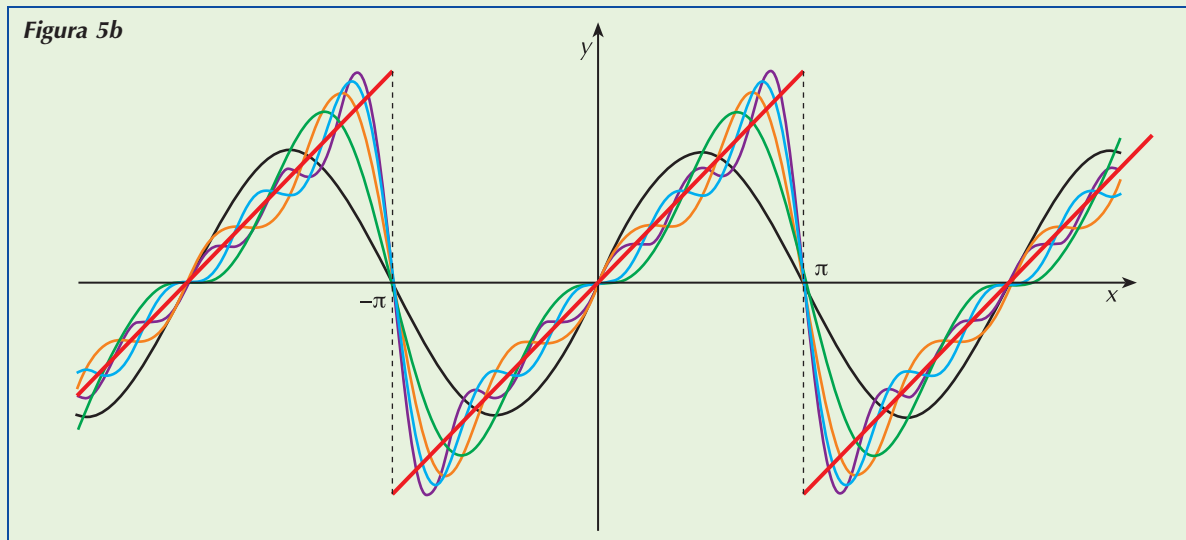
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione data:

- nei punti degli intervalli $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$

$$2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 4x + \dots = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

Figura 5b



- agli estremi di tali intervalli si ha $\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow -\pi^+} x + \lim_{x \rightarrow -\pi^-} x \right] = \frac{1}{2} (-\pi + \pi) = 0$ mentre la funzione data vale $-\pi$ e π in tali punti.

In **figura 5b** puoi vedere il grafico di alcune ridotte della serie e in sottofondo la funzione $f(x)$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ h & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ e prolungata per periodicità, con h costante positiva.

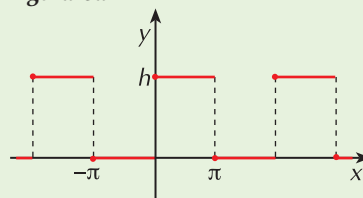
Il grafico della funzione f è in **figura 6a**; esso, per la forma che assume, viene detto **onda quadra**.

I punti di discontinuità della funzione si hanno nei punti $x = k\pi$ dove

$$\lim_{x \rightarrow -k\pi^-} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ h & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -k\pi^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ h & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

Figura 6a



Nei punti $x = k\pi$ vi è quindi una discontinuità di prima specie; possiamo allora concludere che, essendo la funzione continua a tratti, la prima ipotesi del teorema è verificata.

Osserviamo poi che, in ciascuno degli intervalli individuati dai punti di discontinuità, $f(x)$ è monotona; anche la seconda ipotesi è dunque verificata.

La funzione f è dunque sviluppabile in serie di Fourier in tutto \mathbb{R} ; determiniamo i coefficienti della serie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h dx = \frac{1}{\pi} \cdot h \cdot [x]_0^{\pi} = h$$

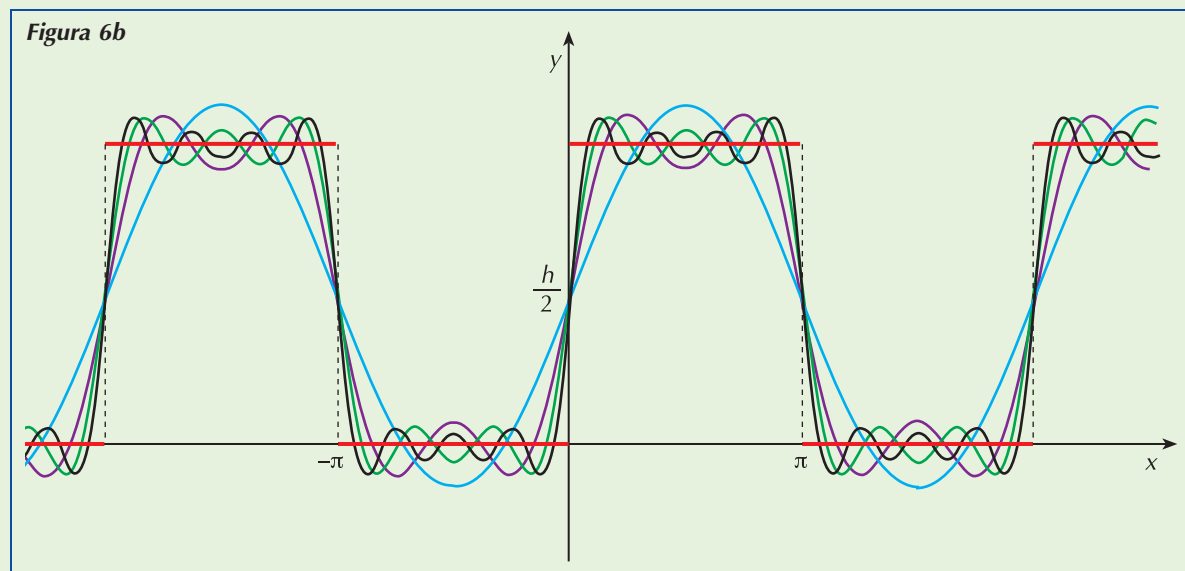
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{h}{n} \cdot [\sin nx]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \cdot \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-h}{n} [\cos nx]_0^{\pi} = -\frac{h}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2h}{n\pi} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Allora, ricordando che il termine noto della serie è $\frac{1}{2} a_0$ possiamo scrivere che:

- nei punti dove la funzione f è continua è

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \sin x + \frac{2h}{3\pi} \sin 3x + \frac{2h}{5\pi} \sin 5x + \dots = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}$$



- nei punti di discontinuità $x = k\pi$ è $\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow k\pi^-} h + \lim_{x \rightarrow k\pi^+} 0 \right] = \frac{h}{2}$

dunque in tali punti la serie converge a $\frac{h}{2}$, mentre la funzione vale 0 oppure h in tali punti.

In **figura 6b** puoi vedere il grafico di alcune ridotte della serie e in sottofondo la funzione $f(x)$

LO SVILUPPO DI FUNZIONI PERIODICHE DI PERIODO T

Se il periodo della funzione è T , le considerazioni precedenti sono ancora valide con una modifica alle formule che esprimono i coefficienti della serie.

Introduciamo il parametro $\omega = \frac{2\pi}{T}$ che rappresenta la pulsazione della funzione f . In questo caso la serie di Fourier è definita dalla relazione

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

e si dimostra che i coefficienti della serie sono i seguenti:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x \, dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x \, dx$$

Determiniamo, per esempio, lo sviluppo in serie della funzione periodica

$f(x) = x + 1$ nell'intervallo $[-1, 1)$ e prolungata per periodicità.

In questo caso è $T = 2$ ed il grafico della funzione è in **figura 7**.

La pulsazione è $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$ e lo sviluppo della funzione è dato dalla serie

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \pi n x + b_n \sin \pi n x)$$

I suoi coefficienti sono espressi dalle relazioni:

$$a_n = \int_{-1}^1 (x + 1) \cdot \cos \pi n x \, dx \quad b_n = \int_{-1}^1 (x + 1) \cdot \sin \pi n x \, dx$$

Sviluppando il calcolo otteniamo (l'integrale si sviluppa per parti):

$$a_n = \int_{-1}^1 (x + 1) \cdot \cos \pi n x \, dx = \left[\frac{\cos \pi n x}{\pi^2 n^2} + \frac{x + 1}{\pi n} \cdot \sin \pi n x \right]_{-1}^1 = \frac{2 \sin \pi n}{\pi n}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 (x + 1) \cdot \sin \pi n x \, dx = \left[\frac{\sin \pi n x}{\pi^2 n^2} - \frac{x + 1}{\pi n} \cdot \cos \pi n x \right]_{-1}^1 = \frac{2 \sin \pi n - 2 \pi n \cos \pi n}{\pi^2 n^2}$$

In definitiva: $f(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \sin \pi x - \frac{1}{\pi} \sin 2\pi x + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi x - \dots$

Figura 7

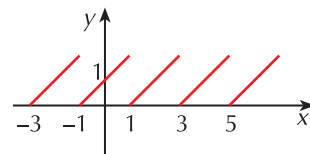
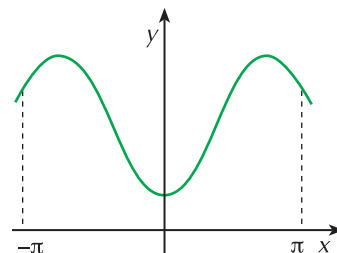


Figura 8a Funzione pari



3.2 Le serie di Fourier delle funzioni pari e dispari

Ricordiamo che:

- una funzione è pari se presenta una simmetria rispetto all'asse y , cioè se $f(-x) = f(x)$ (**figura 8a**)
- è dispari se presenta una simmetria rispetto all'origine, cioè se $f(-x) = -f(x)$ (**figura 8b** di pagina seguente)

In questi due particolari casi, i coefficienti dello sviluppo di Fourier di una funzione periodica assumono valori particolari e lo sviluppo della funzione si semplifica.

Il caso della funzione pari

Se la funzione $f(x)$ è pari, poiché $\sin nx$ è dispari (la funzione è simmetrica rispetto all'origine), si ha che $f(x)\sin nx$ è dispari:

$$f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$$

L'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine è sempre nullo; di conseguenza i coefficienti b_n sono sempre nulli:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = 0$$

Allora

lo sviluppo in serie di una funzione pari non contiene la funzione seno ed è una funzione di soli coseni:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

Il caso della funzione dispari

Se la funzione $f(x)$ è dispari, poiché $\cos nx$ è pari (la funzione è simmetrica rispetto all'asse y), si ha che $f(x)\cos nx$ è dispari:

$$f(-x)\cos(-nx) = -f(x)\cos nx$$

In questo caso si ha quindi che sono nulli i coefficienti a_n :

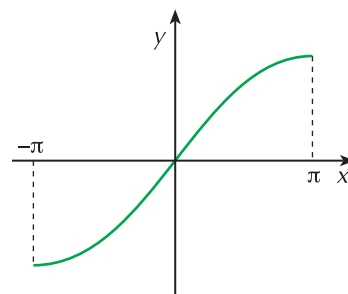
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = 0$$

Allora

lo sviluppo in serie di una funzione dispari non contiene la funzione coseno ed è una funzione di soli seni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

Figura 8b Funzione dispari



Il prodotto di una funzione pari con una funzione dispari è una funzione dispari.

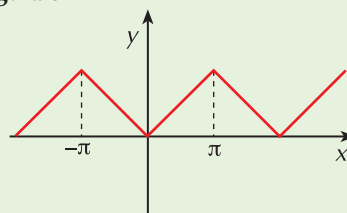
ESEMPI

1. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, e pro-

lungata per periodicità, proviamo che è sviluppabile in serie di Fourier e scriviamo la serie corrispondente.

La funzione è periodica di periodo 2π ed ha il grafico di **figura 9**. Esso, per la forma che assume, è noto con il nome di **onda triangolare**.

Figura 9



La funzione f è continua in tutto \mathbb{R} , monotona a tratti e quindi, soddisfacendo le ipotesi del teorema di Dirichlet, è sviluppabile in serie di Fourier.

Osserviamo poi che si tratta di una funzione pari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) e quindi il suo sviluppo in serie sarà di soli coseni.

Calcoliamo i coefficienti a_n :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari } (n \neq 0) \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si ha quindi che

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

2. Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione che è il prolungamento periodico di

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

La funzione è periodica di periodo 2π ed il suo grafico, che rappresenta un'onda quadra, è in **figura 10**.

Si tratta di una funzione continua a tratti e monotona in ogni intervallo in cui è continua; è una funzione dispari (il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi); essa è quindi sviluppabile in serie di Fourier ed il suo sviluppo è una serie di soli seni; dobbiamo quindi calcolare i soli coefficienti b_n :

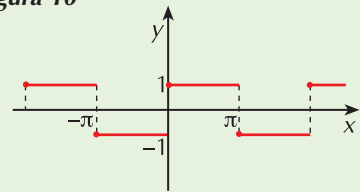
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Agli estremi dell'intervallo di periodicità la serie converge a zero.

Possiamo quindi scrivere che, nei punti interni all'intervallo di periodicità

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1}$$

Figura 10



VERIFICA DI COMPrensIONE

1. Barra vero o falso.

a. Qualunque funzione può essere sviluppata in serie di Fourier.

V F

b. Una funzione può essere sviluppata in serie di Fourier solo se è periodica.

V F

c. Lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione $f(x)$ periodica di periodo T è convergente solo se $f(x)$ è continua a tratti e monotona nell'intervallo di periodicità.

V F

d. Se $f(x)$ è pari il suo sviluppo in serie di Fourier è una funzione di soli seni.

V F

7 concetti e le regole

Le serie numeriche

Si chiama **serie numerica** l'espressione $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

Di una serie numerica si possono calcolare le **ridotte n -esime s_n** che sono date dalle somme dei termini da a_0 fino a quello di indice n :

$$s_0 = a_0 \quad s_1 = a_0 + a_1 \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \quad \dots \quad s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Il carattere di una serie si determina studiando il comportamento delle sue ridotte n -esime e si presentano tre casi:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ la serie è **convergente** ed il numero S è la sua somma
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$ la serie è **divergente** ed ha somma infinita
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ non esiste la serie è **indeterminata**.

Fra le diverse tipologie di serie abbiamo visto la serie i cui termini costituiscono una progressione geometrica di ragione q e che per questo viene detta serie geometrica: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Una serie geometrica è:

- convergente a $\frac{1}{1-q}$ se $-1 < q < 1$
- divergente se $q < -1 \vee q \geq 1$
- indeterminata se $q = -1$

Le serie di funzioni

Chiamiamo **serie di funzioni** la somma di infinite funzioni definite in uno stesso dominio D :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

- Una serie di funzioni diventa una serie numerica quando la variabile indipendente x assume un particolare valore del dominio D e può essere una serie numerica convergente, divergente o indeterminata.
- L'insieme E dei valori x del dominio D per i quali si ottiene una serie numerica convergente si chiama **dominio di convergenza**.
- Di una serie convergente si può definire la **funzione somma** $f(x)$ come limite per $n \rightarrow +\infty$ della successione delle somme parziali $\{s_n(x)\}$.

Le funzioni periodiche

Una funzione $f(x)$, di dominio D , è **periodica di periodo T** se $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D$.

Il più piccolo valore positivo di T per cui vale questa uguaglianza si dice **periodo minimo** o **principale**.

Anche una funzione f non periodica può diventarlo se viene definita in un intervallo $[a, b)$ e se viene ripetuta in tutti gli intervalli di ampiezza $b - a$ successivi e precedenti contigui uno all'altro; si dice allora che f è **prolungata per periodicità**.

La serie di Taylor e la serie trigonometrica

La **serie di Taylor** rappresenta lo sviluppo di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 ed è così definita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

Una **serie trigonometrica** ha espressione $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$

I numeri a_n e b_n si dicono **coefficienti della serie**, la ridotta n -esima si chiama **polinomio trigonometrico** di ordine n , ogni termine della serie si dice **armonica**:

- $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ è la prima armonica
- $a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ è la seconda armonica e così via.

Lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica

Data una funzione $f(x)$ periodica di periodo 2π , continua o con al più un numero finito di discontinuità di prima o terza specie nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, si dice **serie di Fourier** della funzione $f(x)$ la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

i cui coefficienti sono espressi dalle formule:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tale serie converge alla funzione $f(x)$ se:

- $f(x)$ è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$
- l'intervallo $[-\pi, \pi]$ può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali f è monotona.

In tali ipotesi, la somma della serie è la funzione così definita:

$$\begin{cases} f(x) & \text{per tutti gli } x \in (-\pi, \pi) \text{ che sono di continuità per } f \\ \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right] & \text{nei punti } x_0 \text{ di discontinuità interni a } [-\pi, \pi] \\ \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \right] & \text{agli estremi dell'intervallo} \end{cases}$$

Se la funzione $f(x)$ presenta delle simmetrie il suo sviluppo di Fourier si semplifica; in particolare:

- se $f(x)$ è pari, il suo sviluppo è una funzione di soli coseni: $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$
- se $f(x)$ è dispari, il suo sviluppo è una funzione di soli seni: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$

Analisi di Fourier delle funzioni periodiche

SERIE E FUNZIONI PERIODICHE

la teoria è a pag. 1

RICORDA

Una serie numerica è:

- convergente se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ con S valore finito
- divergente se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$
- indeterminata se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ non esiste

Comprensione

- 1 La ridotta n -esima di una serie numerica rappresenta:
 - a. l'elenco dei primi n termini di una successione numerica
 - b. la somma dei primi n termini di una successione numerica
 - c. la somma di n termini qualsiasi di una successione numerica
 - d. la somma degli ultimi n termini di una successione numerica.
- 2 Completa in modo che le seguenti proposizioni risultino vere.
Una serie geometrica di ragione q
 - a. converge se
 - b. diverge se
 - c. è indeterminata se
- 3 Dopo aver detto che cos'è una successione di funzioni, spiega che cosa si intende per serie di funzioni specificando poi il significato dei seguenti termini:
 - a. termine generale della serie
 - b. ridotta n -esima
- 4 La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^n$ ha come dominio di convergenza l'insieme:
 - a. $x > -1$
 - b. $-1 < x < 1$
 - c. $x < -1$
 - d. $x > -2$
- 5 Dopo aver detto quando una funzione si dice periodica e come si determina il suo periodo principale, indica il periodo delle seguenti funzioni:
 - a. $\cos 3x$
 - b. $\sin \frac{4}{3}x$
 - c. $\tan \frac{x}{2}$
 - d. $\cos \frac{x}{3}$
- 6 Che cosa significa che una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b)$ è prolungata per periodicità? Fai qualche esempio.

Applicazione

Scrivi i primi cinque termini delle seguenti serie.

7 a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n-1}$ b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

8 a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{n!}$ b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n!}{2n-1}$

9 a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2}$ b. $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^n - n)$

Scrivi le seguenti serie in forma compatta.

10 $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n} \right]$$

11 $4 + \frac{9}{2} + \frac{16}{3} + \frac{25}{4} + \frac{36}{5} + \dots$

$$\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n-1} \right]$$

12 $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2} \right]$$

13 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \right]$$

14 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \dots$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} \right]$$

15 $2 + \frac{5}{2} + \frac{10}{3} + \frac{17}{4} + \frac{26}{5} + \dots$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n} \right]$$

Determina il carattere delle seguenti serie geometriche calcolandone la somma nel caso in cui sono convergenti.

16 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n$

$$\left[S = \frac{7}{6} \right]$$

17 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$[S = 2]$$

18 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$\left[S = \frac{5}{2} \right]$$

19 $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$\left[S = \frac{1}{30} \right]$$

20 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$

[diverge]

21 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^n$

[diverge]

$$22 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$$

[S = 2]

$$23 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n$$

[diverge]

Stabilisci il carattere delle seguenti serie per i valori di x assegnati.

24 ESERCIZIO GUIDA

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3 - 2x)^n \quad \text{per } x = 0, \quad x = \frac{4}{3}, \quad x = 3$$

I termini della serie hanno come dominio l'insieme dei numeri reali.

- Per $x = 0$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n$ che, essendo la serie geometrica di ragione 3, è divergente.
- Per $x = \frac{4}{3}$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ che, essendo la serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$, è convergente.
- Per $x = 3$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n$ che è una serie a termini di segno alterno; essa è divergente perchè il suo termine generale non è infinitesimo.

$$25 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{4nx} \quad x = 2 \quad \text{e} \quad x = -1$$

[divergente, convergente]

$$26 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{2x-1}\right)^n \quad x = 4 \quad \text{e} \quad x = 0$$

[convergente, divergente]

$$27 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x-1}{(\sqrt{2})^n} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = 1$$

[convergente, convergente]

$$28 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (\ln x - 1)^n \quad x = 2 \quad \text{e} \quad x = e$$

[convergente, convergente]

$$29 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2-x)^n} \quad x = 4 \quad \text{e} \quad x = -2$$

[convergente, convergente]

LO SVILUPPO IN SERIE DI UNA FUNZIONE

la teoria è a pag. 6

Comprensione

30 Indica quale fra le seguenti rappresenta la serie di Taylor:

$$\text{a.} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n$$

$$\text{b.} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^n$$

$$\text{c.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^n$$

$$\text{d.} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

31 Dopo aver spiegato che \cos^2 è un polinomio trigonometrico, stabilisci se l'espressione goniometrica $1 + \cos x - 4\sin x + \cos 4x - \sin 5x$ è un polinomio trigonometrico di ordine:

- a. 1 b. 4 c. 5 oppure d. non è un polinomio trigonometrico

Applicazione

Determina lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni nel punto assegnato.

32 $\cos \pi x$ $n = 3, x = 0$ $\left[1 - \frac{\pi^2}{2} x^2\right]$

33 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ $n = 5, x = 0$ $\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right]$

34 $\sqrt{1+x^2}$ $n = 5, x = 0$ $\left[1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right]$

35 $\sqrt[3]{1-x}$ $n = 2, x = 0$ $\left[1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right]$

36 $\sin(\ln x)$ $n = 2, x = 1$ $\left[-\frac{3}{2} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]$

37 $\sqrt{1+\ln x}$ $n = 2, x = 1$ $\left[\frac{1}{8} + \frac{5}{4}x - \frac{3}{8}x^2\right]$

38 $\sin x^2$ $n = 6, x = 0$ $\left[x^2 - \frac{x^6}{6}\right]$

39 $\cos\sqrt{\pi^2+x^2}$ $n = 6, x = 0$ $\left[-1 + \frac{1}{8\pi^2}x^4 - \frac{1}{16\pi^4}x^6\right]$

40 $\ln(1+\sin x)$ $n = 5, x = 0$ $\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24}\right]$

41 $e^{\sin x}$ $n = 4, x = 0$ $\left[1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right]$

Determina lo sviluppo delle seguenti serie trigonometriche arrestate al valore di n indicato.

42 $3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \cos nx$ $n = 6$

43 $\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin nx$ $n = 5$

44 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} [n \cos nx + (n-1) \sin nx]$ $n = 4$

45 $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \cos nx + \frac{n+1}{n} \sin nx\right)$ $n = 6$

46 $\frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \cos nx + (-1)^{n+1} \sin nx]$ $n = 5$

47 $2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+1} \cos nx + \frac{1}{n+1} \sin nx\right]$ $n = 3$

RICORDA

Data la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π , integrabile nell'intervallo $[-\pi, \pi)$, si dice serie di Fourier la serie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dove $\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & \text{con } n \geq 0 \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & \text{con } n > 0 \end{cases}$

Comprensione

- 48 Una funzione si dice continua a tratti se:
 - a. presenta un numero finito di discontinuità
 - b. presenta un numero finito di discontinuità solo di prima specie
 - c. presenta un numero finito di discontinuità solo di prima specie o eliminabili
 - d. presenta un numero finito di discontinuità di seconda specie.

- 49 Dopo aver ricordato il significato di funzione pari e di funzione dispari, completa le seguenti proposizioni in modo che diventino vere:
 - a. il prodotto di due funzioni pari è una funzione perché
 - b. il prodotto di due funzioni dispari è una funzione perché
 - c. il prodotto di una funzione pari con una funzione dispari è una funzione perché
 - d. se una funzione f è pari, allora $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \dots\dots\dots$
 - e. se una funzione f è dispari, allora $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \dots\dots\dots$

- 50 Nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia pari o dispari, il suo sviluppo in serie di Fourier risulta semplificato. Scrivi le espressioni della serie nei due casi motivando la forma ottenuta.

- 51 I coefficienti a_n dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $y = x^2$ definita nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità hanno espressione $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$; allora:
 - a. $a_1 = -4$ b. $a_3 = -\frac{4}{9}$ c. $a_4 = -\frac{1}{4}$ d. $a_6 = -\frac{1}{9}$

- 52 Una sola delle seguenti proposizioni relative allo sviluppo in serie di Fourier di una funzione pari è falsa, individuala.
 - a. $f(x) \cos nx$ è una funzione pari.
 - b. È formata soltanto da coseni.
 - c. $a_0 = a_n = 0$.

- 53 Una sola delle seguenti proposizioni relative allo sviluppo in serie di Fourier di una funzione dispari è falsa, individuala.
 - a. $f(x) \sin nx$ è una funzione pari. b. $b_n = 0$. c. $a_n = 0$.

Applicazione

Calcola gli sviluppi in serie di Fourier delle seguenti funzioni di periodo 2π , definite nell'intervallo indicato e prolungate per periodicità.

- 54** $f(x) = \frac{x}{2} \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right]$
- 55** $f(x) = x^2 \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \right]$
- 56** $f(x) = 1 - x \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right]$
- 57** $f(x) = \pi - x \quad 0 \leq x < 2\pi \quad \left[2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \right]$
- 58** $f(x) = x + |x| \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n} \sin nx \right\} \right]$
- 59** $f(x) = \pi^2 - x^2 \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \right]$
- 60** $f(x) = \pi - |x| \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos nx \right]$
- 61** $f(x) = \sin^2 x \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right]$
- 62** $f(x) = |\sin x| \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \right]$
- 63** $f(x) = x^3 - \pi^2 x \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \right]$
- 64** $f(x) = x^3 - 2 \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[2 \cdot \left\{ -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^3} \sin nx \right\} \right]$
- 65** $f(x) = e^{|x|} - 1 \quad -\pi \leq x < \pi \quad \left[\frac{e^\pi}{\pi} - \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2e^\pi (-1)^n}{\pi(n^2 + 1)} - \frac{2}{\pi(n^2 + 1)} \right) \cos nx \right]$
- 66** $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} \sin nx \right]$
- 67** $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right]$
- 68** $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi} x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx \right]$

$$69 \quad f(x) = \begin{cases} 3x + \pi & -\pi \leq x < 0 \\ 3x - \pi & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[-2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n + 1}{n} \sin nx \right]$$

$$70 \quad f(x) = \begin{cases} x - 1 & -\pi \leq x < 0 \\ x + 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 - 2(\pi + 1)(-1)^n}{n\pi} \sin nx \right]$$

$$71 \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \right]$$

$$72 \quad f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right]$$

$$73 \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \quad \left[\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right] \right]$$

$$74 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \quad \left[\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{(2 - \pi^2 n^2)(-1)^n - 2}{\pi n^3} \sin nx \right] \right]$$

$$75 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n - 1 - \pi(-1)^n}{n} \sin nx \right\} \right]$$

$$76 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \cos x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \left[\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} \left\{ \frac{n}{n^2 - 1} [1 + (-1)^n] \sin nx \right\} \right]$$

APPROFONDIMENTI *Lo sviluppo di funzioni periodiche di periodo T*

Determina gli sviluppi in serie di Fourier delle seguenti funzioni, definite nel periodo indicato e prolungate per periodicità.

$$77 \quad f(x) = 3 - x \quad -1 \leq x < 1 \quad \left[3 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \pi nx \right]$$

$$78 \quad f(x) = 3x \quad 0 \leq x < \pi \quad \left[\frac{3}{2} \pi - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2nx}{n} \right]$$

$$79 \quad f(x) = 1 - x^2 \quad -2 \leq x < 2 \quad \left[-\frac{1}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{\pi nx}{2} \right]$$

$$80 \quad f(x) = x^2 \quad -1 \leq x < 1 \quad \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi nx \right]$$

$$81 \quad f(x) = 1 - x^2 \quad -1 \leq x < 1 \quad \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi nx \right]$$

$$82 \quad f(x) = \cos 2\pi x \quad -\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3} \quad \left[\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos 3\pi nx}{4 - 9n^2} \right]$$

$$83 \quad f(x) = x^2 - x$$

$$0 \leq x < 1$$

$$\left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^2} \right]$$

Funzioni pari

Scrivi la serie di Fourier delle seguenti funzioni pari nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

$$84 \quad f(x) = |2x|$$

$$\left[\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx \right]$$

$$85 \quad f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\left[\frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \right]$$

$$86 \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

$$\left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx \right]$$

$$87 \quad f(x) = x^2|x|$$

$$\left[\frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^4} \cos nx \right]$$

$$88 \quad f(x) = x^2 + |x|$$

$$\left[\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1 + (-1)^n + 2\pi(-1)^n}{n^2} \cos nx \right]$$

$$89 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx \right]$$

$$90 \quad f(x) = \begin{cases} (x + \pi)^2 & -\pi \leq x < 0 \\ (x - \pi)^2 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\left[\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx \right]$$

$$91 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ \left(|x| - \frac{\pi}{2}\right)^2 & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\left[\frac{\pi^2}{24} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx \right]$$

$$92 \quad f(x) = \cos^2 x$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right]$$

$$93 \quad f(x) = \cos^3 x$$

$$\left[\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \right]$$

Funzioni dispari

Scrivi la serie di Fourier delle seguenti funzioni dispari nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

$$94 \quad f(x) = x|x|$$

$$\left[-2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} \sin nx \right]$$

95 $f(x) = x \cos x$

$$\left[2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2 - 1} \sin nx \right]$$

96 $f(x) = \frac{x^3}{3}$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2\pi^2}{3n} (-1)^{n-1} + \frac{4}{n^3} (-1)^n \right) \sin nx \right]$$

97 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$\left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin nx + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right]$$

98 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi x - x^2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$\left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx \right]$$

99 $f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi \leq x < 0 \\ x - \pi & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$\left[-2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin nx \right]$$

100 $f(x) = \begin{cases} -x - \pi & -\pi \leq x < 0 \\ -x + \pi & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$\left[2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin nx \right]$$

101 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x + 1 & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{2}{\pi}x - 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$\left[-\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} \sin nx \right]$$

102 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 - x^2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$\left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[n^2(\pi^2 - 1) - 2](-1)^n + n^2 + 2}{n^3} \sin nx \right]$$

Per la verifica delle competenze

1 Scrivi lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ per $x \in [-\pi, \pi]$ e dall'espressione ottenuta deduci la validità dell'uguaglianza $\frac{3}{4}\pi^2 = -1 + \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{18}{35} + \frac{4\sqrt{3}}{21} - \frac{5}{33} + \dots$

$$\frac{3}{4}\pi^2 = -1 + \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{18}{35} + \frac{4\sqrt{3}}{21} - \frac{5}{33} + \dots$$

2 Scrivi lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ per $x \in [-\pi, \pi]$ e dall'espressione ottenuta deduci l'uguaglianza $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255} + \dots$

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255} + \dots$$

Risultati di alcuni esercizi.

1 b. 2 a. $|q| < 1$; b. $q < -1 \vee q \geq 1$; c. $q = -1$ 4 a. 5 a. $\frac{2}{3}\pi$; b. $\frac{3}{2}\pi$; c. 2π ; d. 6π

30 d. 31 c. 48 c. 49 a. pari; b. pari; c. dispari; d. $2 \int_0^\pi f(x) dx$; e. 0

51 a., b. 52 c. 53 b.

Test finale di autovalutazione

1 Indica in quali fra i seguenti modi si può scrivere sinteticamente la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \dots$$

a. $\sum_{n=1}^7 \frac{n}{n+1}$

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}$

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}$

d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$

3 punti

2 Date le serie numeriche

① $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

② $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^n$

③ $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\log \frac{1}{2}\right)^n$

④ $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$

⑤ $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{7}{5}\right)^n$

risultano convergenti:

a. ①, ③, ⑤

b. ①, ③

c. ②, ③

d. ④, ⑤

e. tutte

3 punti

3 La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{-n}$:

a. è divergente per $x = 3$

b. è convergente per $x = 2$

c. è divergente per $x = \frac{1}{4}$

d. è convergente $\forall x \in \mathbb{R}^-$

V F

V F

V F

V F

4 punti

4 Stabilisci il carattere della seguente serie di funzione per i valori di x assegnati:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^n$$

$x = -2$ $x = 4$

4 punti

5 Sviluppa le seguenti funzioni in serie di potenze di Taylor in $x = 0$:

a. $\sin 4x$

b. $(1 + 3x)^{12}$

8 punti

6 Considera la serie trigonometrica che ha come primi termini i seguenti, quindi rispondi a ciascuna domanda:

$$-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{18} \cos 9x + \frac{1}{20} \cos 10x - \dots$$

a. si tratta di una serie trigonometrica di coefficienti $b_n = 0$ e $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$

V F

b. l'espressione sintetica della serie trigonometrica è $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{2n}$

V F

c. i termini scritti rappresentano la ridotta di ordine 10 della serie

V F

d. l'armonica del terzo ordine di $f(x)$ è $-\frac{1}{6} \cos 3x$

V F

8 punti

7 Della funzione $f(x) = x + \pi$ con $-\pi \leq x < \pi$, puoi dire che:

- a. ha periodo π
- b. ha periodo 2π e può essere prolungata per periodicità
- c. il coefficiente a_n dello sviluppo in serie di Fourier ha espressione

V F
V F

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) \cos nx \, dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

V F

d. il coefficiente a_n dello sviluppo in serie di Fourier ha espressione

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) \cos nx \, dx \quad \text{solo se } n \neq 0$$

V F

e. il coefficiente a_n dello sviluppo in serie di Fourier ha espressione

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) \cos nx \, dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

V F

f. il coefficiente b_n dello sviluppo in serie di Fourier ha espressione

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) \sin nx \, dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

V F

6 punti

8 Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = |\cos x|$ con $0 \leq x < \pi$ è:

a. $\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2 - 1}$

b. $\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2 - 1}$

c. $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2 - 1}$

d. $\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2 - 1}$

10 punti

9 Considerata la serie trigonometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)}$,

- a. scrivi la ridotta di ordine 7
- b. specifica il valore dei coefficienti a_n e b_n
- c. scrivi l'armonica del quarto ordine.

6 punti

10 Considera le seguenti funzioni nell'intervallo assegnato e scrivi il loro sviluppo in serie di Fourier:

a. $f(x) = \frac{3x-1}{2} \quad -\pi \leq x < \pi$ b. $f(x) = \pi^2 + x^2 \quad -\pi \leq x < \pi$ c. $f(x) = \begin{cases} 2 & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

18 punti

11 Scrivi lo sviluppo in serie di Fourier delle seguenti funzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, dopo aver individuato quelle pari e quelle dispari:

a. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ b. $f(x) = 3x^2$ c. $f(x) = x^4$ d. $f(x) = 3x^3 - x$

20 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Totale
Punteggio												

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 b., d.

2 b.

3 a. F, b. V, c. V, d. F

4 converge a $\frac{2}{3}$, diverge

5 a. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$; b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{12}{n} 3^n x^n$

6 a. V, b. V, c. V, d. V

7 a. F, b. V, c. V, d. F, e. V, f. V

8 a.

9 a. $\cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \frac{1}{7} \cos 7x + \frac{1}{9} \cos 9x + \frac{1}{11} \cos 11x + \frac{1}{13} \cos 13x + \frac{1}{15} \cos 15x$;

b. $b_n = 0$, $a_n = \frac{1}{2n+1}$; c. $\frac{1}{9} \cos 9x$

10 a. $-\frac{1}{2} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$; b. $4 \left(\frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \right)$; c. $1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[(-1)^n - 1] \sin nx}{n}$

11 a. dispari, $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (6 - \pi^2 n^2) \sin nx}{3n^3}$

b. pari, $\pi^2 + 12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$

c. pari, $\frac{1}{5} \pi^4 + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^4}$

d. dispari, $2 \left[18 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3} - (3\pi^2 - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n} \right]$