Attività di recupero

Cap 1. Le funzioni goniometriche e i triangoli

Rivedi la teoria

Come si misurano gli angoli

Gli angoli si possono misurare in *gradi* oppure in *radianti*.

- **Misurare in gradi** significa assumere come unità di misura un angolo uguale alla novantesima parte dell'angolo retto; il *grado* ha come sottomultipli:
  - il *primo*: è la sessantesima parte del grado
  - il *secondo*: è la sessantesima parte del primo.
- **Misurare in radianti** significa porre il vertice dell'angolo nel centro di una circonferenza, considerare l'arco *AB* sotteso dall'angolo e valutare il rapporto tra la lunghezza dell'arco rettificato *AB* e il raggio della circonferenza.

La corrispondenza tra le due misure dei principali angoli è riassunta nella seguente tabella:

In gradi	90	180	270	360	30	45	60
In radianti	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

La regola per il passaggio da un sistema di misura all'altro si ricava dalla proporzione:

$$\alpha(rad) : \alpha(gradi) = \pi : 180$$

Fai gli esercizi

Converti in radianti le misure date in gradi dei seguenti angoli.

1 **a.** $80°$ **b.** $270°$ **c.** $225°$ **d.** $330°$

2 **a.** $110°$ **b.** $250°$ **c.** $215°$ **d.** $350°$

Converti dal sistema radiale al sistema sessagesimale:

3 **a.** $\frac{3}{5}\pi$ **b.** $\frac{2}{3}\pi$ **c.** $\frac{6}{5}\pi$ **d.** $-\frac{1}{5}\pi$

4 **a.** $\frac{5}{8}\pi$ **b.** $\frac{5}{6}\pi$ **c.** $\frac{7}{3}\pi$ **d.** $\frac{2}{9}\pi$

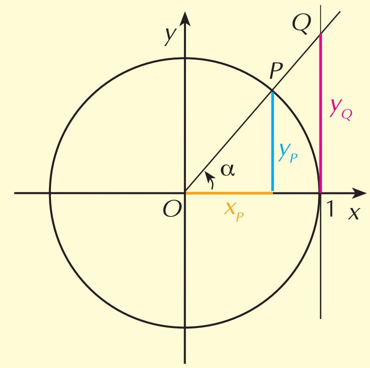
5 Gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sono supplementari e il primo è pari a un terzo del secondo; determina la loro ampiezza, esprimendola sia in gradi che in radianti.
$\left[\widehat{A} = 45° = \frac{\pi}{4};\ \widehat{B} = 135° = \frac{3}{4}\pi\right]$

6 In un triangolo ABC gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ misurano rispettivamente $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5}{12}\pi$; calcola la misura, in gradi, dell'angolo esterno di vertice A. [120°]

Rivedi la teoria

Le funzioni goniometriche fondamentali

Considerata una circonferenza avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e raggio 1, detta **circonferenza goniometrica**, consideriamo un angolo orientato α che ha vertice nell'origine, il primo lato sull'asse x e il secondo lato che interseca la circonferenza in un punto P. Chiamiamo:



- **seno** dell'angolo α l'ordinata del punto P: $\sin\alpha = y_P$
- **coseno** dell'angolo α l'ascissa del punto P: $\cos\alpha = x_p$

Tracciata poi la retta tangente alla circonferenza nel punto di coordinate $(1, 0)$ e indicato con Q il punto in cui la semiretta OP incontra tale tangente, chiamiamo:

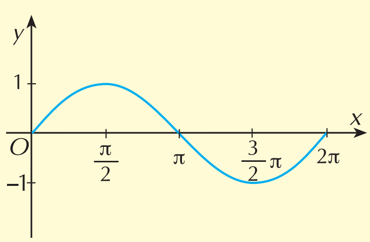
- tangente dell'angolo α l'ordinata del punto Q: $\tan\alpha = y_Q$

Al variare dell'angolo α, anche il seno, il coseno e la tangente di α assumono valori diversi, sono cioè funzioni di α; indicando come d'abitudine con x la variabile indipendente, cioè l'angolo α, le tre funzioni

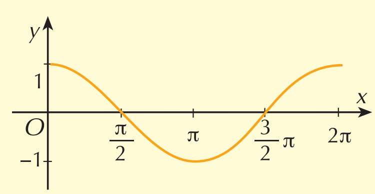
$$y = \sin x \qquad y = \cos x \qquad y = \tan x$$

vengono complessivamente indicate con il nome di **funzioni goniometriche**.

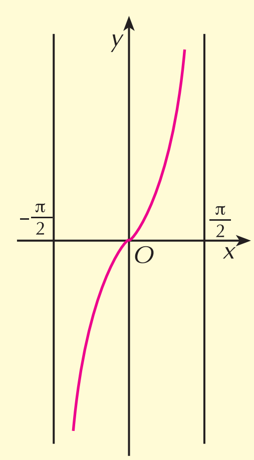
Poiché i valori assunti dal seno e dal coseno si ripetono ogni 360° e quelli assunti dalla tangente si ripetono ogni 180°, si dice che le prime due sono periodiche di periodo 360° e la terza è periodica di periodo 180°. Di seguito sono rappresentati i loro grafici.



$y = \sin x$



$y = \cos x$



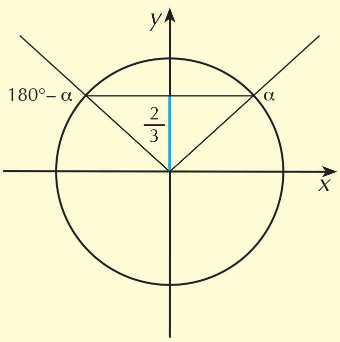
$y = \tan x$

Osserviamo che i valori del seno e del coseno sono sempre compresi tra -1 e 1, mentre la tangente può assumere qualsiasi valore reale.
Accanto a queste tre funzioni se ne introduce una quarta che prende il nome di cotangente e che è così definita:

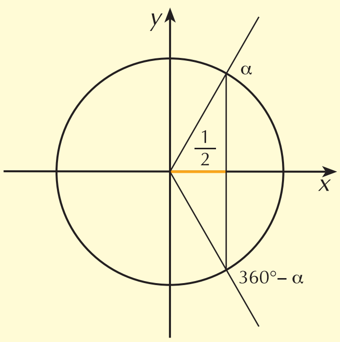
$$\text{cotan}\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

I valori delle funzioni goniometriche

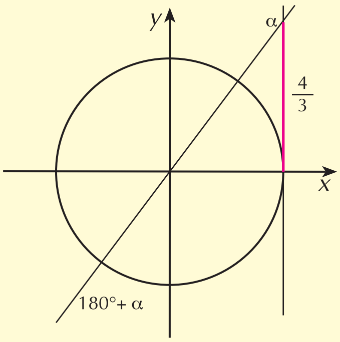
I valori numerici del seno, del coseno e della tangente di un angolo si possono determinare in modo approssimato con la calcolatrice scientifica; viceversa, sapendo per esempio che il seno di un angolo vale $\frac{3}{4}$ si può risalire, sempre in modo approssimato, all'ampiezza dell'angolo.
I seguenti schemi mostrano come sia possibile, dal punto di vista grafico, eseguire questa operazione:



$\sin \alpha = \frac{2}{3}$



$\cos \alpha = \frac{1}{2}$



$\tan \alpha = \frac{4}{3}$

Osserviamo che, nell'intervallo che va da 0° a 360°, ci sono sempre due angoli che soddisfano alla condizione richiesta:

- angoli supplementari nel caso del seno
- angoli esplementari (la somma è un angolo giro) nel caso del coseno
- angoli che differiscono di un angolo piatto nel caso della tangente.

In particolare, i valori delle funzioni goniometriche dei principali angoli acuti sono riassunti nella seguente tabella:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Le relazioni fondamentali

Fra il seno, il coseno e la tangente di un angolo α sussistono le seguenti relazioni:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \text{e} \qquad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Esse ci permettono, noto il valore di una delle tre funzioni e conoscendo la tipologia dell'angolo, di ricavare le altre.

Per esempio, se $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ e α è un angolo acuto, allora:

- dalla prima relazione ricaviamo che: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$ quindi $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- dalla seconda relazione ricaviamo che: $\tan a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Fai gli esercizi

Converti in radianti le misure date in gradi dei seguenti angoli.

7 Dai la rappresentazione grafica sulla circonferenza goniometrica delle funzioni goniometriche dei seguenti angoli:

a. $80°$ **b.** $120°$ **c.** $235°$ **d.** $320°$

8 Dati i seguenti valori delle funzioni goniometriche dell'angolo α, disegna i possibili angoli α supponendo che sia $0 \leq \alpha \leq 360°$:

a. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ **b.** $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ **c.** $\tan\alpha = -1$ **d.** $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

9 $2(\sin 60° + \cos 30°) - \tan 45° + \sin 180° - \sin 270°$ $[2\sqrt{3}]$

10 $2\cos 45° - \sin 45° + \cos 360° - 3\tan 30° + \tan 60°$ $\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

11 $(3\cos 0° + 2\sin 270°)(3\sin 90° - 2\cos 360°)$ $[1]$

12 $(2\cos 180° + \cos 270°)(3\sin 180° - 2\cos 45°)$ $[2\sqrt{2}]$

13 $3(\tan 180° - 4\cos 0°) - 2(\sin 270° + 2\sin 90°)$ $[-14]$

14 $\dfrac{3\sin 90° + 2\cos 180°}{3\cos 540° + 2\cos 720°}$ $[-1]$

15 $\dfrac{3\sin 90°}{2\cos 180° + 2\sin 270°} + \dfrac{\tan 180° + \cos 180°}{4\tan 45°}$ $[-1]$

16 Utilizzando la calcolatrice scientifica, calcola il valore delle funzioni seno, coseno e tangente dei seguenti angoli:

a. $25°12'$ **b.** $145°30'10''$ **c.** $225°23'9''$ **d.** $81°30'30''$

e. $\frac{\pi}{12}$ **f.** $\frac{3}{5}\pi$ **g.** $\frac{4}{9}\pi$ **h.** $\frac{3}{5}\pi$

17 Usando la calcolatrice trova tutti gli angoli α con $0° \leq \alpha \leq 360°$ sapendo che:

a. $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ **b.** $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ **c.** $\tan\alpha = 3$ **d.** $\cos\alpha = 2$

e. $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ **f.** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ **g.** $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ **h.** $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$

18 Sapendo che $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ e che α è un angolo acuto, calcola le altre funzioni goniometriche fondamentali di α.
$\left[\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

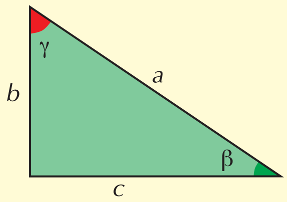
19 Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ e che α è un angolo ottuso, calcola le altre funzioni goniometriche fondamentali di α.
$\left[\sin\alpha = \frac{4}{5}, \tan\alpha = -\frac{4}{3}\right]$

20 Sapendo che $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ e che $270° < \alpha < 360°$, calcola le altre funzioni goniometriche fondamentali di α.
$\left[\cos\alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}, \tan\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}\right]$

Rivedi la teoria

I triangoli rettangoli

I due teoremi che permettono di risolvere un triangolo rettangolo sono i seguenti.



- In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa:
  - per il seno dell'angolo opposto al cateto da trovare, oppure
  - per il coseno dell'angolo adiacente al cateto da trovare.

  In simboli: $b = \begin{cases} a \sin \beta \\ a \cos \gamma \end{cases}$ $\quad c = \begin{cases} a \sin \gamma \\ a \cos \beta \end{cases}$

- In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'altro cateto:
  - per la tangente dell'angolo opposto al cateto da trovare, oppure
  - per la cotangente dell'angolo adiacente al cateto da trovare.

  In simboli: $b = \begin{cases} c \tan \beta \\ c \operatorname{cotan} \gamma \end{cases}$ $\quad c = \begin{cases} b \tan \gamma \\ b \operatorname{cotan} \beta \end{cases}$

Per esempio:

- se di un triangolo ABC rettangolo in A si sa che l'ipotenusa $BC = 28\text{cm}$ e $\beta = 72°$, allora:

  $\gamma = 90° - 72° = 18°$ $\quad \overline{AB} = 28\cos 72° = 8{,}65$

  $\overline{AC} = 28\sin 72° = 26{,}63$

- se di un triangolo ABC rettangolo in A si sa che $AC = 16\text{cm}$ e $\gamma = 48°$, allora:

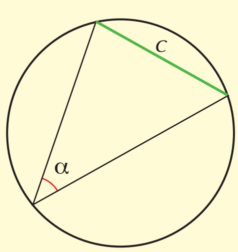
  $\beta = 90° - 48° = 42°$ $\quad \overline{AB} = 16\tan 48° = 17{,}77$ $\quad \overline{BC} = \dfrac{16}{\cos 48°} = 23{,}91$

Le applicazioni

Conseguenze dirette dei teoremi sui triangoli rettangoli sono le seguenti.

- L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso: $S = \dfrac{1}{2} ab \sin \gamma$

  Per esempio, se, usando le solite convenzioni, di un triangolo si sa che rispetto a una stessa unità di misura $a = 10$, $b = 15$ e $\gamma = 45°$, la sua area è uguale a: $S = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \cdot \sin 45° = \dfrac{75}{2}\sqrt{2}$



- In ogni circonferenza di raggio r, la misura c di una corda è data dal prodotto del diametro per il seno di uno qualunque degli angoli α alla circonferenza che insistono sulla corda: $c = 2r \sin \alpha$

  Per esempio, se $r = 20\text{cm}$, e l'angolo alla circonferenza sotteso da una corda AB è di 86°, alllora

  $$\overline{AB} = 2 \cdot 20 \cdot \sin 86° = 39{,}90$$

Fai gli esercizi

Risolvi i seguenti triangoli rettangoli dei quali sono noti i seguenti elementi.

21 $c = 26{,}4$ $b = 42{,}6$ [$a = 50{,}12$; $\gamma = 31°47'14''$; $\beta = 58°12'46''$]

22 $a = 121{,}2$ $\gamma = 40°20'$ [$c = 78{,}44$; $b = 92{,}39$; $\beta = 49°40'$]

23 $b = 14{,}5$ $a = 30{,}6$ [$c = 26{,}95$; $\gamma = 61°42'54''$; $\beta = 28°17'06''$]

24 $a = 10{,}7$ $c = 8{,}3$ [$b = 6{,}75$; $\gamma = 50°52'07''$; $\beta = 39°7'53''$]

25 $c = 28{,}1$ $\gamma = 38°30'$ [$a = 45{,}14$; $b = 35{,}33$; $\beta = 51°30'$]

26 $b = 6{,}8$ $\beta = 48°25'$ [$a = 9{,}09$; $c = 6{,}03$; $\gamma = 41°35'$]

27 $c = 88{,}35$ $\gamma = 68°54'$ [$a = 94{,}7$; $b = 34{,}09$; $\beta = 21°6'$]

28 $b = 0{,}81$ $\gamma = 70°35'$ [$a = 2{,}44$; $c = 2{,}3$; $\beta = 19°25'$]

29 $a = 20{,}89$ $\beta = 48°33'12''$ [$b = 15{,}66$; $c = 13{,}83$; $\gamma = 41°26'48''$]

30 In un rombo di lato 12cm, l'angolo che la diagonale minore forma con il lato è $\beta = 80°24'21''$. Calcola l'area del rombo. [$S = 47{,}32$]

31 In un triangolo ABC, sono noti questi elementi: $\overline{AB} = 24$, $\overline{BC} = 30{,}14$, $\widehat{A} = 46°53'7''$, $\widehat{C} = 35°32'12''$. Calcola l'area del triangolo. [$S = 358{,}52$]

32 Una corda di una circonferenza è lunga 56cm e sottende un angolo al centro di 128°. Determina il raggio della circonferenza. [$r = 31{,}15$cm]

33 In una circonferenza di centro O e diametro $2r$ è inscritto un triangolo ABC; sapendo che $\widehat{B} = 65°$ e che $\widehat{C} = 34°$, esprimi l'area del triangolo in funzione di r. [$S \approx r^2$]

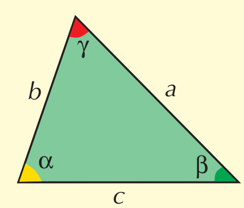
Rivedi la teoria

I triangoli qualsiasi

Per tutti i triangoli valgono i seguenti teoremi.

- In ogni triangolo i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Per esempio, se in un triangolo è $\beta = 36°$, $\gamma = 82°$ e $b = 5{,}2$, allora:

- il terzo angolo misura $\alpha = 180° - (36° + 82°) = 62°$
- per trovare il lato a impostiamo la relazione:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{dalla quale ricaviamo che} \quad a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{5{,}2\sin 62°}{\sin 36°} = 7{,}81$$

- per trovare il lato c impostiamo la relazione:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{dalla quale ricaviamo che} \quad c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{5{,}2\sin 82°}{\sin 36°} = 8{,}76.$$

- In ogni triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due diminuita del doppio prodotto dei due lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Per esempio, se in un triangolo è $b = 72$, $c = 43$ e $\alpha = 52°$, allora:

- il lato a si trova con la relazione

  $a^2 = 72^2 + 43^2 - 2 \cdot 72 \cdot 43 \cdot \cos 52° = 3220{,}8241....$ cioè $a = 56{,}75$
- l'angolo γ si trova applicando la relazione: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

  da cui $\cos \gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{56{,}75^2 + 72^2 - 43^2}{2 \cdot 56{,}75 \cdot 72} = 0{,}80219....$ cioè $\gamma = 36{,}66° = 36°39'34''$
- l'angolo β si tova per differenza: $\beta = 180° - (52° + 36{,}66°) = 91{,}34° = 91°20'26''$.

Fai gli esercizi

Applicando il teorema dei seni o quello del coseno, risolvi i seguenti triangoli.

34	$c = 10{,}89$	$b = 10{,}05$	$\gamma = 47°$	$[a = 14{,}89;\ \alpha = 90°33'2'';\ \beta = 42°26'58'']$
35	$c = 36{,}07$	$b = 25$	$\alpha = 88°07'36''$	$[a = 43{,}21;\ \beta = 35°19'42'';\ \gamma = 56°32'40'']$
36	$a = 175$	$b = 120$	$c = 213$	$[\alpha = 55°14'32'';\ \beta = 34°17'19'';\ \gamma = 90°28'9'']$
37	$a = 15$	$b = 12$	$\beta = 37°45'13''$	$[c = 19{,}58;\ \alpha = 49°56'12'';\ \gamma = 92°18'35'']$
38	$a = 32$	$b = 20$	$\gamma = 50°16'24''$	$[c = 24{,}62;\ \alpha = 91°3'39'';\ \beta = 38°39'57'']$
39	$b = 21{,}40$	$c = 18{,}20$	$\alpha = 60°13'25''$	$[a = 20{,}06;\ \beta = 67°49'29'';\ \gamma = 51°57'6'']$

Cap 2. I VETTORI

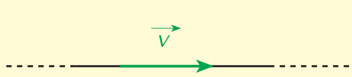
Rivedi la teoria

I vettori

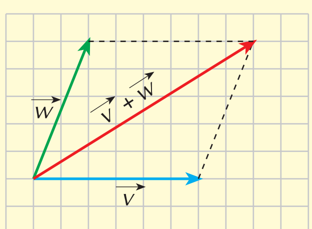
Per caratterizzare alcune grandezze, come per esempio un tempo o una lunghezza, è sufficiente dare un numero che rappresenta la sua misura; queste grandezze si dicono **scalari**. Per altre grandezze, per esempio uno spostamento, la sola misura non è sufficiente ed è necessario dare altre indicazioni; queste grandezze si dicono **vettoriali**.
Un **vettore** è quindi una grandezza che è caratterizzata da:

- una *direzione*, corrispondente alla retta di azione del vettore
- un *verso* che ne indica l'orientamento
- una *intensità* o *modulo* che ne esprime la misura.

Graficamente un vettore si rappresenta come un segmento orientato di lunghezza proporzionale alla sua intensità.



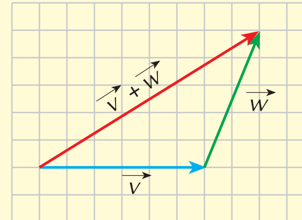
Le operazioni fondamentali



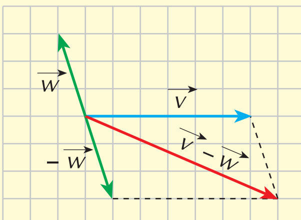
■ Due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si possono sommare:

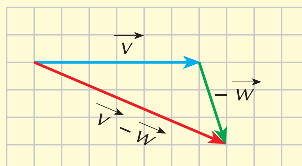
- con la **regola del parallelogramma:** si riportano i due vettori con l'origine in comune, si costruisce il parallelogramma che li ha per lati; la diagonale uscente dall'origine comune rappresenta il vettore somma.

- con il **metodo punta coda:** disegnato il vettore $\vec{v}$, si riporta $\vec{w}$ in modo che la sua origine coincida con il secondo estremo di $\vec{v}$; in pratica la punta del primo vettore deve coincidere con la coda del secondo; il vettore somma ha origine nella coda di $\vec{v}$ e come secondo estremo la punta di $\vec{w}$.

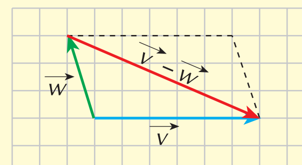


Due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si possono sottrarre sommando $\vec{v}$ con l'opposto di $\vec{w}$; l'opposto di un vettore è il vettore che ha la stessa direzione e la stessa intensità, ma verso opposto rispetto al primo. La figura che segue illustra il procedimento.

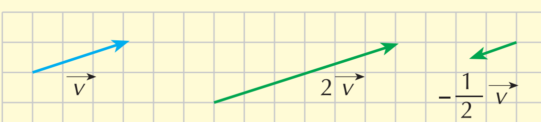




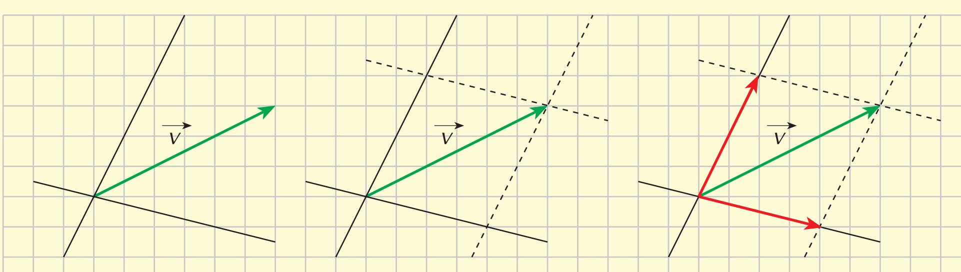
In pratica, basta applicare la regola del parallelogramma ai due vettori e considerare l'altra diagonale del parallelogramma, orientata dalla punta del secondo vettore alla punta del primo.



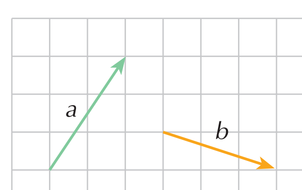
Si può eseguire il prodotto di un numero reale a per un vettore $\vec{v}$; il vettore risultato ha la stessa direzione di $\vec{v}$, lo stesso verso se a è positivo, verso opposto se a è negativo, modulo uguale ad av.
Dato il vettore $\vec{v}$ in figura puoi vedere come si ottiene il vettore $2\vec{v}$ e il vettore $-\dfrac{1}{2}\vec{v}$.



Eseguendo un procedimento inverso rispetto alla somma, si può scomporre un vettore lungo due direzioni principali; la figura che segue mostra come fare.



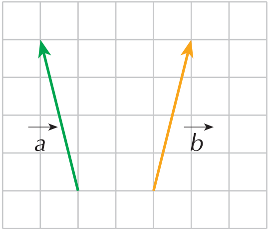
Fai gli esercizi



1 Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in figura, esegui graficamente le seguenti operazioni:

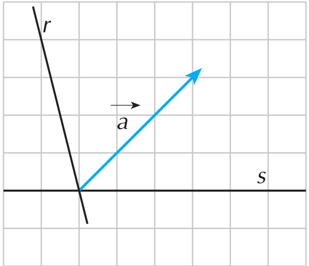
a. $\vec{a}+\vec{b}$ **b.** $\vec{a}-\vec{b}$ **c.** $2\vec{a}$ **d.** $-3\vec{b}$

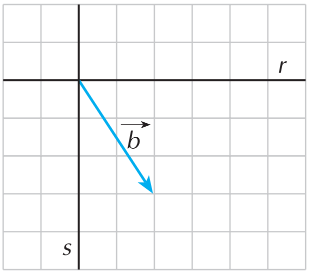
2 Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in figura, esegui graficamente le seguenti operazioni e rappresenta il vettore risultato:



a. $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ **b.** $4\vec{a} + \vec{b}$ **c.** $2\vec{a} - \vec{b}$ **d.** $3\vec{a} + 2\vec{b}$

3 Scomponi i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ lungo le direzioni r ed s assegnate in figura.



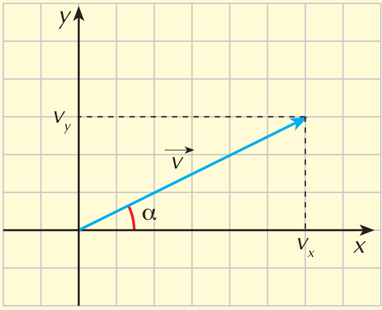


Rivedi la teoria

I vettori nel piano cartesiano

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, un vettore $\vec{v}$ è dato mediante le sue componenti v_x e v_y lungo gli assi cartesiani (osserva la figura) e si scrive

$$\vec{v}(v_x, v_y)$$



Il modulo del vettore $\vec{v}$ si calcola applicando il teorema di Pitagora:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

La direzione, cioè l'angolo α che esso forma con la direzione positiva dell'asse x, si calcola tenendo presente che, in base ai teoremi sui triangoli rettangoli:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \qquad \sin\alpha = \frac{v_y}{v} \qquad \tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Per esempio, il vettore $\vec{v}(4, 6)$ ha come componenti $v_x = 4$ e $v_y = 6$ ed ha:

- modulo uguale a: $v = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$
- direzione α tale che: $\cos\alpha = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ cioè $\alpha = 56°18'36''$

Per sommare o sottrarre due vettori, moltiplicare un vettore per uno scalare, si eseguono le stesse operazioni sulle loro componenti. Per esempio, se $\vec{v}(1, 4)$ e $\vec{w}(3, 2)$:

- $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$ ha come componenti $v_x + w_x = 1 + 3 = 4$ e $v_y + w_y = 4 + 2 = 6$ quindi $\vec{s}(4, 6)$
- $\vec{r} = \vec{v} - \vec{w}$ ha come componenti $v_x - w_x = 1 - 3 = -2$ e $v_y - w_y = 4 - 2 = 2$ quindi $\vec{r}(-2, 2)$
- $\vec{p} = 3\vec{v}$ ha come componenti $3v_x = 3$ e $3v_y = 12$ quindi $\vec{p}(3,12)$

Fai gli esercizi

4 Calcola il modulo di ciascuno dei seguenti vettori e l'angolo da essi formato con la direzione positiva dell'asse x :

$\vec{s}(3, 6)$ $\vec{v}(-3, 2)$ $\vec{w}(5, 8)$ $\vec{z}(-6, 2)$

5 Calcola il modulo di ciascuno dei vettori $\overrightarrow{AB}$, nei quali A è il primo estremo e B il secondo, e l'angolo da essi formato con la direzione positiva dell'asse x:

a. $A(0, 1)$ $B(2, 3)$ **b.** $A(4, 6)$ $B(3, 1)$ [**a.** $2\sqrt{2}$, 45°; **b.** $\sqrt{26}$, 78°41′24″]

c. $A(-2, 1)$ $B(2, -1)$ **d.** $A(-3, 0)$ $B(2, -4)$ [**c.** $2\sqrt{5}$, 153°26′6″; **d.** $\sqrt{41}$, 141°20′25″]

6 Calcola le componenti cartesiane dei seguenti vettori dei quali sono noti il modulo v e l'angolo α da essi formato con la direzione positiva dell'asse x:

a. $v = 5$ $\alpha = 30°$ **b.** $v = 3$ $\alpha = 60°$ **c.** $v = 2$ $\alpha = 45°$

d. $v = 7$ $\alpha = 40°35'$ **e.** $v = 6$ $\alpha = 120°45'$ **f.** $v = 4$ $\alpha = 68°24'12''$

[**a.** $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right)$; **b.** $\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; **c.** $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; **d.** (5,32; 4,55); **e.** (−3,07; 5,16); **f.** (1,47; 3,72)]

7 Dati i vettori $\vec{a}(2, -3)$ e $\vec{b}(-1, 4)$, calcola:

a. $\vec{a} + \vec{b}$ **b.** $\vec{a} - \vec{b}$ **c.** $\vec{a} + 2\vec{b}$ **d.** $4\vec{a} + 5\vec{b}$

e. $6\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$ **f.** $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ **g.** $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a}$ **h.** $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$

[**a.** (1; 1); **b.** (3; − 7); **c.** (0; 5); **d.** (3; 8); **e.** $\left(\frac{51}{4}; -21\right)$; **f.** $\left(\frac{9}{2}; -8\right)$; **g.** $\left(1; \frac{1}{6}\right)$; **h.** $\left(\frac{1}{6}; -4\right)$]

8 Dati i vettori $\vec{a}(5, -3)$ e $\vec{b}(2, 4)$, calcola il vettore $\vec{s} = \vec{a} + 2\vec{b}$; determinane poi il modulo e la direzione.
[$\vec{s}(9, 5)$; $s = \sqrt{106}$, $\alpha = 29°3'17''$]

Rivedi la teoria

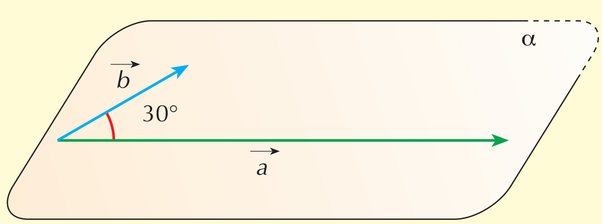
Le applicazioni alla Fisica

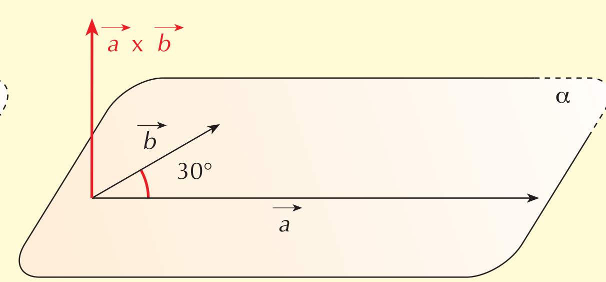
Oltre alle operazioni viste, in Fisica si ricorre spesso ad altre due operazioni sui vettori: il *prodotto scalare* e il *prodotto vettoriale*.

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si definisce:

- **prodotto scalare** di $\vec{a}$ per $\vec{b}$ lo scalare che si ottiene moltiplicando il modulo dei due vettori per il coseno dell'angolo tra essi compreso: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha$
- **prodotto vettoriale** di $\vec{a}$ per $\vec{b}$ il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ che ha:
  - modulo uguale a: $ab \sin\alpha$
  - direzione perpendicolare al piano definito dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$
  - verso determinato dalla regola della mano destra (vedi la figura dell'esempio successivo).

Per esempio, se $\vec{a}$ ha modulo 6, $\vec{b}$ ha modulo 2, i due vettori formano un angolo di 30° e giacciono sul piano della pagina (***vedi la figura***), allora:





- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 2 \cdot \cos 30° = 6\sqrt{3}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ha: modulo uguale a $6 \cdot 2 \cdot \sin 30° = 6$, direzione perpendicolare al piano della pagina, verso che si determina puntando il pollice della mano destra nel verso del vettore $\vec{a}$, le altre dita della mano nel verso del vettore $\vec{b}$: il verso del vettore prodotto è uscente dal palmo della mano.

Fai gli esercizi

Calcola il prodotto scalare e il modulo del prodotto vettoriale dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che seguono.

9 $a = 4$ $b = 2$ $\alpha = 60°$ $[4;\ 4\sqrt{3}]$

10 $a = 2$ $b = 5$ $\alpha = 30°40'$ [8,6; 5,1]

11 $a = 6$ $b = 3$ $\alpha = 20°35'40''$ [16,85; 6,33]

12 $a = 5$ $b = 4$ $\alpha = 32°43'53''$ [16,82; 10,81]

Verifica del recupero

1 Calcola il valore della seguente espressione: $6\cos 45° - 4\sin 45° + \sin 360° - 9\tan 30° + 3\tan 60°$.

0,25 punti

2 Risolvi i triangoli rettangoli rettangoli di ipotenusa a e cateti b e c, di cui si sa che:

a. $a = 10{,}25$ $\quad\gamma = 38°27'12''$
b. $b = 14{,}60$ $\quad c = 34{,}20$
c. $c = 10{,}26$ $\quad a = 23{,}40$

0,75 punti per ogni esercizio

3 Risolvi i triangoli qualunque, di cui sono assegnati i seguenti dati:

a. $a = 13{,}7$ $\quad\beta = 44°$ $\quad\gamma = 33°$
b. $\alpha = 47°10'$ $\quad\gamma = 18°44'$ $\quad b = 42{,}36$
c. $b = 9$ $\quad a = 12$ $\quad\gamma = 65°$

1 punto per ogni esercizio

4 Un triangolo ha un angolo di 115° e i due lati che lo formano sono lunghi 10,24cm e 26,13cm. Calcolane l'area.

0,5 punti

5 Calcola la lunghezza di una circonferenza che ha una corda che misura 56,8 sapendo che un suo corrispondente angolo al centro è di $140°48'$.

0,5 punti

6 In una circonferenza di raggio r traccia le corde AB e BC che formano fra loro un angolo di 120°; sapendo che la prima è lunga $r\sqrt{2}$, calcola un valore approssimato dell'area del triangolo ABC.

1,5 punti

7 Per calcolare la distanza di due ripetitori televisivi R_1 e R_2 separati da un laghetto e da un bosco, si sceglie un punto P in un luogo accessibile e in modo tale che si possano effettuare le seguenti misure in metri: $\overline{PR_1} = 860$, $\overline{PR_2} = 1230$, $R_1\widehat{P}R_2 = 120°$. Calcola la distanza fra i due ripetitori.

2 punti

Soluzioni

1 $\sqrt{2}$

2 **a.** $b = 8{,}03$; $\beta = 51°32'48''$; $c = 6{,}37$
b. $a = 37{,}19$; $\beta = 23°7'4''$; $\gamma = 66°52'56''$
c. $b = 21{,}03$; $\beta = 63°59'39''$; $\gamma = 26°21''$

3 **a.** $\alpha = 103°$; $b = 9{,}77$; $c = 7{,}66$
b. $\beta = 114°6'$; $a = 34{,}03$; $c = 14{,}90$
c. $c = 11{,}56$; $\beta = 44°50'37''$; $\alpha = 70°9'23''$

4 $121{,}25 cm^2$

5 189,42

6 $0{,}32\ r^2$

7 1819,42 metri

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	
Punteggio								

Valutazione in decimi

Math in English

Glossary

angle	angolo	**i.e. (id est)**	cioè
degree	grado	**radiant**	radiante
gradient	pendenza, inclinazione	**to sketch**	tracciare un grafico
ground speed	velocità rispetto al suolo		

1 Translate the following degree measures into radian measures: $54°$ $120°$ $150°$.

2 In a circle of radius $r = 3$ centimeters, what arc lenght s along the circumference corresponds to a central angle α of $\frac{\pi}{6}$ radians?

3 Find $\sin\alpha$ if α is an acute angle such that $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

4 Show that $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ and $\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$.

5 In triangle ABC is $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 7$ and $\cos\widehat{ABC} = \frac{3}{5}$. Find $\overline{BC}$.

6 Sketch the graph of $f(x) = 2|\sin x| - 1$.

7 You are traveling uphill on a road and see a sign telling you this is a 5% grade, i.e. rising 5 meters for every 100 meters of road. What is the angle between the road and the horizontal direction?

8 An airplane is flying at 170 km/s towards the north-east, in a direction making an angle of 52° with the eastward direction. The wind is blowing at 30 km/s towards the north west, making an angle 20° with the northward direction. What is the actual "ground speed" of the airplane, and what is the angle A between the airplane's actual path and the eastward direction?

9 The Colorado river drops from 3200 feet at Lake Mead to 900 feet elevation at Lee's Ferry, a river distance of 270 miles. What is the gradient in degrees?

1 $\frac{3}{10}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$ **2** $s = \frac{\pi}{2}$ centimeters **3** $\frac{3}{5}$ **5** $4\sqrt{2}$ **7** 2,86° **8** 188km/s, 59,8° **9** 34,5°