La fattorizzazione dei polinomi

Obiettivi

- scomporre un polinomio mediante:
  - raccoglimenti a fattor comune
  - riconoscimenti di prodotti notevoli
  - la regola del trinomio caratteristico
  - l'individuazione dei divisori col teorema di Ruffini
  - la regola della somma e della differenza di potenze di uguale esponente
- calcolare *M.C.D.* e *m.c.m.* fra due o più polinomi

Matematica e realtà

In un film di avventura l'eroe di turno, per liberare l'amata dalle grinfie del solito cattivo, deve trovare il luogo dove si narra che sia nascosto il tesoro degli Urveli, antica popolazione che la leggenda dice costruisse città d'oro. Dopo aver affrontato mille pericoli, raggiunge infine il luogo segreto e si trova davanti a una porta di pietra che si potrà aprire solo dando la risposta esatta ad un quesito matematico; dare una risposta sbagliata gli costerà, ahimè, la vita. Il quesito recita così.

Tre fieri leoni sono i custodi del tesoro e possiedono le tre chiavi d'accesso; il primo si sveglia ogni n ore, controlla la sua chiave e poi si riaddormenta, il secondo si sveglia ogni $n+1$ ore e il terzo ogni $n-1$ ore; n ore fa tutti e tre erano svegli e tu, cavaliere solitario hai perso un'occasione per impadronirti delle tre chiavi. Ma non temere, non dovrai aspettare più di tre giorni; bada però di essere presente al prossimo risveglio comune o morirai.

Se tu fossi il nostro eroe, dopo quanto tempo ti faresti trovare sul posto?
La soluzione si può determinare applicando alcune regole del calcolo algebrico, in questo caso le regole sulla scomposizione dei polinomi e sulla determinazione del *m.c.m.*
Giochino a parte, queste regole sono quelle che ci aiuteranno a eseguire la maggior parte dei calcoli legati alla risoluzione di equazioni, sistemi e, più in generale, problemi ad essi connessi.

1. Che cos'è la fattorizzazione

Fattorizzare o **scomporre un polinomio** significa poterlo vedere come prodotto di due o più polinomi; se poi ciascun polinomio di tale prodotto non è ulteriormente fattorizzabile, allora la scomposizione è in fattori primi.

Per esempio:

- poiché sappiamo che $(1-x)(1+x)=1-x^2$
  allora una scomposizione del binomio $1-x^2$ è $(1-x)(1+x)$
- poiché sappiamo che $(2x-1)(x+2)=2x^2+3x-2$
  allora una scomposizione del trinomio $2x^2+3x-2$ è $(2x-1)(x+2)$

Polinomi riducibili e irriducibili

Polinomi come $1-x^2$ e $2x^2+3x-2$ si dicono riducibili.
Ci sono invece altri polinomi che non si possono scomporre, come per esempio x^2+1 (vedremo perché verso la fine del capitolo).
Questi polinomi si dicono irriducibili.

Un polinomio è **riducibile** se è possibile scomporlo nel prodotto di altri polinomi, tutti di grado inferiore a quello dato. Si dice **irriducibile** in caso contrario.

Le regole per eseguire la scomposizione di un polinomio non sono del tutto nuove perché si tratta, nella maggior parte dei casi, di leggere da destra verso sinistra le regole già note sul prodotto di polinomi e sui prodotti notevoli.

2. Il raccoglimento a fattor comune

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 21

2.1 Il raccoglimento totale

Abbiamo già imparato nel precedente capitolo ad eseguire il raccoglimento a fattor comune di un monomio in un polinomio P; ricordiamo la procedura ed applichiamola a qualche esempio:

La regola

- si individua il $M.C.D.$ fra i monomi di P; esso, a meno di un coefficiente numerico che a volte può essere utile raccogliere, rappresenta il fattore comune da mettere in evidenza
- si scrive P come prodotto del fattore comune individuato per il polinomio che si ottiene dividendo ciascuno dei monomi di P per tale fattore.

Per esempio:

- $2ay^2-3by^2+5cy^2=y^2(2a-3b+5c)$
- $7ax^3-14axy+21a^2x^2=7ax(x^2-2y+3ax)$
- $\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ab\left(b-\frac{1}{2}ab-1\right)$

Un raccoglimento di questo genere si può fare anche quando il fattore comune, anziché essere un monomio, è un polinomio. Per esempio:

- $5x(x-3)+4(x-3)$
  si può raccogliere il binomio $(x-3)$ tenendo presente che dalla divisione di

ciascun addendo per $x-3$ otteniamo:

$5x(x-3):(x-3)=5x \qquad 4(x-3):(x-3)=4$

Quindi $\quad 5x(x-3)+4(x-3)=(x-3)(5x+4)$

- $(a-1)^2-3a(a-1)$

  si può raccogliere il binomio $(a-1)$ tenendo presente che dalla divisione di ciascun addendo per $a-1$ otteniamo:

  $(a-1)^2:(a-1)=(a-1) \qquad -3a(a-1):(a-1)=-3a$

  Quindi $\quad (a-1)^2-3a(a-1)=(a-1)(a-1-3a)=(a-1)(-2a-1)$

Dopo un raccoglimento totale a fattor comune il numero di termini che si trovano all'interno della parentesi deve essere uguale al numero dei termini del polinomio.

E' sbagliato scrivere: $\underbrace{2ax-3bx+x}_{\text{tre termini}}=x\left(\underbrace{2a-3b}_{\text{due termini}}\right)$

E' corretto scrivere: $\underbrace{2ax-3bx+x}_{\text{tre termini}}=x\left(\underbrace{2a-3b+1}_{\text{tre termini}}\right)$

Attenzione agli errori

2.2 Il raccoglimento parziale

In molti polinomi non esiste un fattore comune a tutti i termini da poter raccogliere; capita invece di frequente che ci siano dei fattori comuni solo a qualche termine, come nel seguente caso:

$2ay+2by+ax+bx$ i primi due termini hanno in comune il fattore $2y$, i secondi due hanno in comune il fattore x

Possiamo allora eseguire dei raccoglimenti parziali mettendo in evidenza questi fattori comuni parziali:

$$2y(a+b)+x(a+b)$$

Quella che abbiamo ottenuto **non è ancora una scomposizione** del polinomio di partenza perché abbiamo un'addizione, ma ci siamo messi nelle condizioni di poter effettuare un raccoglimento totale visto che $(a+b)$ può essere considerato un fattore comune ai due addendi; eseguendo il raccoglimento otteniamo:

$$(a+b)(2y+x)$$

che questa volta è una scomposizione del polinomio in quanto prodotto di due binomi.

Questo procedimento di **raccoglimento parziale a fattor comune** è quindi utile tutte le volte che rende possibile un successivo raccoglimento totale; non serve invece se non si riesce a mettere in evidenza un fattore comune. Per esempio:

- $3x-6y+x^2-2xy$

  Raccogliamo 3 fra i primi due monomi e x fra i secondi due:

  $3(x-2y)+x(x-2y)$

  Il raccoglimento è stato utile perché abbiamo trovato un fattore comune (è il binomio $(x-2y)$); la scomposizione del polinomio dato è quindi

  $(x-2y)(3+x)$

- $3x - 2xy + 3ax - 2a$

  Raccogliamo x fra i primi due termini e a fra i secondi due:

  $x(3 - 2y) + a(3x - 2)$

  Questa volta il raccoglimento, anche se eseguito correttamente, non è di nessuna utilità perché non ha messo in evidenza un fattore comune e per scomporre il polinomio, sempre che sia possibile, occorre procedere per altra via.

ESEMPI

1. $x(a + b) - 2a(a + b) + 3y(a + b)$

Il fattore comune è $(a + b)$, quindi: $x(a + b) - 2a(a + b) + 3y(a + b) = (a + b)(x - 2a + 3y)$

2. $6a^2(a - 1) - 3a(a - 1) + ax(1 - a)$

Tra i primi due addendi uno dei fattori comuni è $(a - 1)$, ma nel terzo troviamo $(1 - a)$; conviene allora raccogliere dapprima il segno "−" nell'ultima parentesi:

$6a^2(a - 1) - 3a(a - 1) - ax(a - 1)$

Il fattore comune è $a(a - 1)$, raccogliendo otteniamo: $a(a - 1)(6a - 3 - x)$

3. $bx + xy - 2ay - 2ab$

Il raccoglimento parziale può essere fatto in diversi modi; per evidenziare i termini fra i quali eseguiamo il raccoglimento, li sottolineiamo allo stesso modo:

Prima possibilità: $\underline{bx} + \underline{xy} - \underline{2ay} - \underline{2ab} = x(b + y) - 2a(y + b) = (b + y)(x - 2a)$

Seconda possibilità: $\underline{bx} + \underline{xy} - \underline{2ay} - \underline{2ab} = b(x - 2a) + y(x - 2a) = (x - 2a)(b + y)$

4. $2x^2 - 6ax + 2x + bx - 3ab + b$

Il polinomio ha sei termini, quindi, in vista di un successivo raccoglimento totale, possiamo raccogliere i suoi monomi in gruppi di due oppure in gruppi di tre.

In gruppi di due monomi: $\underline{2x^2} - \underline{6ax} + \underline{2x} + \underline{bx} - \underline{3ab} + \underline{b} = 2x(x - 3a) + x(b + 2) - b(3a - 1)$

Questo raccoglimento non porta però a nulla di utile.

In gruppi di tre monomi:

$\underline{2x^2} - \underline{6ax} + \underline{2x} + \underline{bx} - \underline{3ab} + \underline{b} = 2x(x - 3a + 1) + b(x - 3a + 1) = (x - 3a + 1)(2x + b)$

Questo esempio ci fa riflettere sul fatto che, a volte e non sempre, se raccogliere in un certo modo non porta a nulla di utile, un raccoglimento di tipo diverso può risolvere il problema.

5. In molti casi si deve usare una combinazione di queste due modalità di raccoglimento, osserva questo esempio:

$$2x^2y + 4xy^2 + 2mxy + 4my^2$$

Possiamo mettere in evidenza il fattore $2y$ per tutto il polinomio: $2y(x^2 + 2xy + mx + 2my)$

Raccogliamo adesso x fra i primi due termini all'interno della parentesi, e m fra i secondi due:

$$2y[x(x + 2y) + m(x + 2y)]$$

Raccogliamo ora di nuovo a fattor comune totale all'interno delle parentesi quadre: $2y[(x + 2y)(x + m)]$

In definitiva la scomposizione del polinomio è $2y(x + 2y)(x + m)$

in cui abbiamo eliminato le parentesi quadre perché superflue.

Gli esempi precedenti ci consentono di fare alcune considerazioni sulle modalità di raccoglimento a fattor comune totale o parziale.

- Innanzi tutto occorre verificare se esiste la possibilità di un raccoglimento totale.
- Se non vi è tale possibilità, o se il polinomio ottenuto dopo il raccoglimento lo permette, bisogna raccogliere parzialmente per gruppi di monomi di uguale numerosità: a due a due, a tre a tre e così via.
  In genere è sconsigliabile, salvo casi particolari che avremo modo di vedere in seguito, raccogliere un fattore fra gruppi di monomi di diversa numerosità, per esempio un gruppo di tre monomi e un gruppo di due, perché così facendo non è più possibile eseguire raccoglimenti totali successivi. Per esempio, se per scomporre il polinomio $ax^2 + 2ax + 2bx^2 + 4bx + 3a + 6b$ raccogliamo x fra i primi quattro monomi e 3 fra gli ultimi due otteniamo

  $$\underline{ax^2} + \underline{2ax} + \underline{2bx^2} + \underline{4bx} + \underline{3a} + \underline{6b} = x(ax + 2a + 2bx + 4b) + 3(a + 2b)$$

  che non consente di eseguire un raccoglimento totale. Invece raccogliendo a gruppi di tre nel modo indicato otteniamo

  $$\underline{ax^2} + \underline{2ax} + \underline{3a} + \underline{2bx^2} + \underline{4bx} + \underline{6b} = a(x^2 + 2x + 3) + 2b(x^2 + 2x + 3) = (x^2 + 2x + 3)(a + 2b)$$

- La scelta dei termini fra cui raccogliere a fattor comune parziale non segue regole precise se non quella di cercare di arrivare alla possibilità di un successivo raccoglimento totale; sarà l'esperienza man mano maturata a guidarti nelle scelte.
- Come abbiamo visto nell'esempio numero 4, può capitare che un raccoglimento parziale fatto in un certo modo non porti a poter concludere la scomposizione; prima di abbandonare questo metodo conviene tuttavia provare ad eseguire raccoglimenti in un altro modo.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Dato il polinomio $ax^3 + 3a^2x^2 - 4a^2x^4$ il più grande fattore che si può raccogliere è:

a. ax **b.** a^2x^2 **c.** ax^2 **d.** a^2x^4

2. Per eseguire la scomposizione del polinomio $2x^2 - xy - 2x + y$ conviene come prima cosa:

a. raccogliere a fattor comune x fra i primi tre termini;
b. eseguire un raccoglimento parziale del fattore x fra i primi due termini e del fattore -1 fra i secondi due;
c. eseguire un raccoglimento parziale del fattore $2x$ fra il primo e il terzo termine e del fattore y fra il secondo e il quarto;
d. eseguire un raccoglimento parziale del fattore $2x$ fra il primo e il terzo termine e del fattore $-y$ fra il secondo e il quarto.

Quali sono le procedure utili?

3. Scomponendo il polinomio $ax^2 - 2ay^2 - 3bx^2 + 6by^2$ mediante raccoglimento parziale e poi totale si ottiene:

a. $(x^2 - 2y^2)(a + 3b)$ **b.** $(x^2 + 2y^2)(a - 3b)$
c. $(x^2 - 2y^2)(a - 3b)$ **d.** $(x^2 + 2y^2)(a + 3b)$

3. IL RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 25

Tutte le regole che abbiamo imparato sui prodotti notevoli possono anche essere lette da destra verso sinistra per individuare i polinomi da cui provengono tali espressioni e rendere quindi possibile la loro scomposizione. Rivediamoli uno per uno.

Il quadrato di un binomio

Ricordiamo le regole:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2+2ab+b^2&=(a+b)^2\\ a^2-2ab+b^2&=(a-b)^2=(b-a)^2\end{aligned}}$$

Quindi se un polinomio è costituito da tre addendi, due dei quali sono quadrati di monomi o di altri polinomi, c'è la possibilità che tale trinomio provenga da un quadrato di un binomio; per stabilirlo occorre verificare che il terzo termine sia proprio il doppio prodotto delle basi considerate. Se il doppio prodotto è positivo, interporremo il segno + fra le basi, se è negativo il segno −.

$(a-b)^2$ o $(b-a)^2$ rappresentano la stessa espressione. Nell'individuare un quadrato il segno "−" può essere attribuito indifferentemente a uno o all'altro dei monomi del binomio.

ESEMPI

1. $a^2+8a+16$

$\downarrow$ $(a)^2$ $\qquad$ $\downarrow$ $(4)^2$ $\qquad$ inoltre $\quad 2\cdot a\cdot 4=8a \quad$ quindi: $\quad a^2+8a+16=(a+4)^2$

2. $9x^2-12xy+4y^2$

$\downarrow$ $(3x)^2$ $\qquad$ $\downarrow$ $(2y)^2$ $\qquad$ inoltre $\quad 2\cdot 3x\cdot 2y=12xy \quad$ quindi:

$9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)^2$ o anche $(2y-3x)^2$

3. $4a^2-6xy+9x^2$

$\downarrow$ $(2a)^2$ $\qquad$ $\downarrow$ $(3x)^2$ $\qquad$ ma $\quad 2\cdot 2a\cdot 3x=12ax \quad$ quindi il trinomio dato non è lo sviluppo di un quadrato

Il cubo di un binomio

Ricordiamo le regole:

$$\boxed{\begin{aligned} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3&=(a+b)^3\\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3&=(a-b)^3\end{aligned}}$$

Allora se un polinomio è costituito da quattro termini di cui due sono dei cubi, c'è la possibilità che questo sia lo sviluppo del cubo di un binomio. Per stabilirlo occorre verificare che gli altri due termini siano i tripli prodotti delle basi secondo la regola ricordata.

*Scrivere $(a-b)^3$ o $(b-a)^3$ **non è** la stessa cosa ed è quindi necessario individuare con precisione il monomio che è preceduto dal segno −.*

ESEMPI

1. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

$\downarrow$ $(x)^3$ $\qquad$ $\downarrow$ $(2y)^3$ $\qquad$ inoltre $\quad 3\cdot(x)^2\cdot(2y)=6x^2y \quad$ e $\quad 3\cdot(x)\cdot(2y)^2=12xy^2$,

quindi: $\quad x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$

2. $a^6 - 9a^4b + 27a^2b^2 - 27b^3$

$\downarrow (a^2)^3 \qquad \downarrow (-3b)^3$ inoltre $3 \cdot (a^2)^2 \cdot (-3b) = -9a^4b$ e $3 \cdot (a^2) \cdot (-3b)^2 = +27a^2b^2$,

quindi: $a^6 - 9a^4b + 27a^2b^2 - 27b^3 = (a^2 - 3b)^3$

Il quadrato di un trinomio

Ricordiamo la regola: $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2.}$
Allora se un polinomio è costituito da sei termini di cui tre sono dei quadrati, c'è la possibilità che esso sia lo sviluppo del quadrato di un trinomio. Per stabilirlo occorre verificare che gli altri tre termini siano i loro doppi prodotti.

ESEMPI

1. $a^2 + 2ab + b^2 + 4a + 4b + 4$

$\downarrow (a)^2 \qquad \downarrow (b)^2 \qquad \downarrow (2)^2$

inoltre $2 \cdot (a) \cdot (b) = 2ab \qquad 2 \cdot (a) \cdot (2) = 4a \qquad 2 \cdot (b) \cdot (2) = 4b$

quindi: $a^2 + 2ab + b^2 + 4a + 4b + 4 = (a + b + 2)^2$

2. $x^4 - 4x^2y^3 + 6x^2 + 4y^6 - 12y^3 + 9$

$\downarrow (x^2)^2 \qquad \downarrow (2y^3)^2 \qquad \downarrow (3)^2$

inoltre $2 \cdot (x^2) \cdot (2y^3) = 4x^2y^3$ e poiché nel polinomio compare $-4x^2y^3$, x^2 e $2y^3$ sono discordi

$2 \cdot (x^2) \cdot (3) = 6x^2$ e poiché nel polinomio compare $+6x^2$, x^2 e 3 sono concordi

$2 \cdot (2y^3) \cdot (3) = 12y^3$ e poiché nel polinomio compare $-12y^3$, $2y^3$ e 3 sono discordi

Possiamo dunque concludere che:

$x^4 - 4x^2y^3 + 6x^2 + 4y^6 - 12y^3 + 9 = (x^2 - 2y^3 + 3)^2$ oppure $(-x^2 + 2y^3 - 3)^2$

Differenze di quadrati

Ricordiamo la regola: $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).}$
Allora se un binomio è costituito dalla **differenza** di due monomi che sono dei quadrati, per scomporlo basta individuare le basi dei due quadrati ed indicare il prodotto della loro somma per la loro differenza.

ESEMPI

1. $9x^2 - y^2$

$\downarrow (3x)^2 \qquad \downarrow (y)^2$

quindi: $9x^2 - y^2 = (3x + y)(3x - y)$

2. $25y^2 - 1$

$\downarrow (5y)^2 \qquad \downarrow (1)^2$

quindi: $25y^2 - 1 = (5y + 1)(5y - 1)$

3. $(a-3)^2 - x^2$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$(a-3)^2 \quad (x)^2$

quindi: $[(a-3)+x][(a-3)-x] =$

$= (a-3+x)(a-3-x)$

4. $9z^2 - (z+5)^2$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$(3z)^2 \quad (z+5)^2$

quindi: $[3z+(z+5)][3z-(z+5)] =$

$= (3z+z+5)(3z-z-5) =$

$= (4z+5)(2z-5)$

x^2+4	**non è uguale a**	$(x+2)^2$	perché manca il doppio prodotto
x^3-27	**non è uguale a**	$(x-3)^3$	perché mancano i due tripli prodotti
$4x^2-y^2$	**non è uguale a**	$(2x-y)^2$	perché è una differenza di quadrati

Attenzione agli errori

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Il polinomio $x^2+49-14x$ è uguale a:

a. $(x+7)^2$ **b.** $(x+7)(x-7)$ **c.** $(x-7)^2$

2. Il polinomio $9x^2+y^2+1-6x+6xy-2y$ è uguale a:

a. $(3x+y-1)^2$ **b.** $(3x-y-1)^2$ **c.** $(3x-y+1)^2$

3. La scomposizione del polinomio y^2-4b^2 è:

a. $(y-2b)^2$ **b.** $(2b-y)(2b+y)$ **c.** $(y-2b)(y+2b)$

4. Il polinomio $8x^3-27-36x^2-54x$:

a. è il cubo di $2x-3$ **b.** è il cubo di $3-2x$ **c.** non proviene da un prodotto notevole

4. IL TRINOMIO CARATTERISTICO

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 32

Supponiamo di dover scomporre il polinomio a^2+3a+2. Non è possibile fare dei raccoglimenti a fattore comune significativi né riconoscere in esso il quadrato di un binomio. Possiamo però sostituire al posto di $3a$ la somma $a+2a$ e scrivere il polinomio in questo modo:

$$a^2+a+2a+2$$

Ora possiamo raccogliere a fattor comune prima parzialmente, poi totalmente:

$$\underbrace{a^2+a}+\underbrace{2a+2} = a(a+1)+2(a+1) = (a+1)(a+2)$$

Con questo artificio siamo riusciti a scomporre il polinomio dato. In sostanza abbiamo interpretato il coefficiente del termine di primo grado (cioè 3) come la somma di due numeri (2 e 1) che per prodotto danno proprio il termine noto, cioè 2 $(2\cdot 1 = 2 \quad \text{e} \quad 2+1=3)$.

$a^2 \; + \; 3\,a \; + \; 2$

somma $2+1$ prodotto $2\cdot 1$

Questa procedura può essere applicata a tutti i polinomi che hanno la forma

$$\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab}$$

cioè a tutti i trinomi di secondo grado che hanno:

- il coefficiente del termine di secondo grado uguale a 1
- il coefficiente del termine di primo grado che si può esprimere come somma di due numeri a e b
- il termine noto che è uguale al prodotto degli stessi due numeri a e b.

Un polinomio di questo tipo si dice **trinomio caratteristico** e per scomporlo si segue questa procedura:

LA PROCEDURA PER ESEGUIRE LA SCOMPOSIZIONE

- si scrive il polinomio per esteso eseguendo la moltiplicazione indicata: $x^2 + ax + bx + ab$
- si effettua un raccoglimento parziale fra i primi due e i secondi due monomi:
  $x(x + a) + b(x + a)$
- si esegue un raccoglimento totale: $(x + a)(x + b)$

In definitiva, individuati i due numeri a e b si può scrivere che:

$$\boldsymbol{x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)}$$

$x^2 + s\,x + p$

somma $a + b$ — prodotto ab

$(x + a)(x + b)$

Scomponiamo, per esempio, il seguente polinomio applicando direttamente questa formula:

- $x^2 + 5x + 6$
  i due numeri che hanno prodotto 6 e somma 5 sono 2 e 3, quindi
  $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = (x + 2)(x + 3)$

In pratica, per cercare i due numeri a e b conviene partire dal loro prodotto (il termine noto del trinomio), scrivere tutte le coppie di numeri interi che danno quel prodotto, cercare fra queste coppie quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

COME TROVARE LE COPPIE DI NUMERI IL CUI PRODOTTO È UN NUMERO DATO

Se il prodotto è un numero "semplice", come per esempio 12, non è difficile scoprire che, indipendentemente dal segno, esso si può vedere come prodotto in uno dei seguenti modi:

$$12 \cdot 1 \qquad 2 \cdot 6 \qquad 3 \cdot 4$$

Ma se il numero è più "complesso", per esempio 36 o un numero più grande come si può fare?
Esiste una regola molto semplice:

- si scrivono i suoi divisori in ordine crescente
- si formano le coppie abbinando il primo e l'ultimo, il secondo e il penultimo e così via fino alla coppia dei due termini centrali o il numero centrale con sè stesso se ne rimane uno solo.

Cerchiamo, per esempio, le coppie di numeri il cui prodotto è 36 e la cui somma è -15 :

- i divisori di 36 sono: $\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm9 \quad \pm12 \quad \pm18 \quad \pm36$
- prendiamoli a coppie: $\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm9 \quad \pm12 \quad \pm18 \quad \pm36$

Le coppie cercate, a meno del segno, sono dunque:

1 e 36   2 e 18   3 e 12   4 e 9   6 e 6

Poiché la somma deve essere -15 e il numero 36 è positivo, dobbiamo attribuire a entrambi i numeri delle coppie un segno negativo; non è difficile adesso scoprire che la coppia cercata è:

$$-3 \quad \text{e} \quad -12$$

ESEMPI

1. Scomponiamo $x^2 - 5x + 6$

In questo caso $a \cdot b = 6$ e $a + b = -5$.

Quindi, poiché 6 si ottiene dai prodotti $+6 \cdot (+1) \qquad -6 \cdot (-1) \qquad +3 \cdot (+2) \qquad -3 \cdot (-2)$

la coppia da scegliere è quella che dà per somma -5, cioè la coppia -3, -2 e la scomposizione è:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

2. Scomponiamo $x^2 + 3ax - 10a^2$

Il prodotto dei due numeri è $-10a^2$ e la loro somma è $+3a$.

Quindi, poiché $-10a^2$ si ottiene dai prodotti $-a \cdot 10a \qquad a \cdot (-10a) \qquad 2a \cdot (-5a) \qquad -2a \cdot 5a$

la coppia che dobbiamo scegliere è quella che ha per somma $+3a$, cioè $+5a$ e $-2a$.

Allora $x^2 + 3ax - 10a^2 = (x - 2a)(x + 5a)$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Si devono trovare due numeri la cui somma è -3 e il cui prodotto è -28; quali sono i due numeri?

-28 si può vedere come prodotto di ....

fra le coppie individuate quella che ha somma -3 è ....

2. Scomponendo il polinomio $x^2 + 2x - 35$ si ottiene:

a. $(x - 5)(x + 3)$ **b.** $(x + 5)(x - 3)$ **c.** $(x + 5)(x - 7)$ **d.** $(x - 5)(x + 7)$

5. La ricerca dei divisori di un polinomio

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 35

5.1 Il criterio di divisibilità

Consideriamo la seguente uguaglianza:

$$(x - 1)(x + 2)(2x - 1) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

Poiché l'espressione al primo membro è il prodotto di tre binomi di primo grado, possiamo ritenere che essa rappresenti la scomposizione del polinomio al secondo membro, cioè, leggendo la stessa uguaglianza da destra verso sinistra:

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(x + 2)(2x - 1)$$

Questa considerazione può essere sfruttata quando non si riesce a scomporre un polinomio applicando uno dei metodi visti nei precedenti paragrafi. Si tratta in sostanza di ricercare quali possono essere i binomi divisori di un dato polinomio.

Facciamo dapprima un esempio numerico. Possiamo dire che

- poiché $434 : 7 = 62$ con resto 0
  434 è divisibile per 7 e possiamo scrivere che $434 = 62 \cdot 7$
  Abbiamo in questo modo trovato una prima scomposizione del numero 434 anche se non è ancora in fattori primi.
- poiché $127 : 3 = 42$ con resto 1
  127 non è divisibile per 3; in ogni caso possiamo scrivere che $127 = 42 \cdot 3 + 1$ anche se questa non è una scomposizione del numero 127.

Possiamo procedere in modo analogo per eseguire la scomposizione di un polinomio $P(x)$ mediante la divisione per un binomio della forma $(x - a)$, dove a rappresenta un numero reale. Se indichiamo con $Q(x)$ il polinomio quoziente della divisione $P(x) : (x - a)$ e con R il resto, per le stesse considerazioni fatte sul caso numerico, possiamo scrivere che:

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R$$

Nella divisione tra due polinomi, il grado del quoziente è la differenza tra i gradi dei due polinomi.

dove, se $P(x)$ ha grado n, $Q(x)$ ha grado $n - 1$.
Se adesso calcoliamo $P(a)$, cioè sostituiamo alla variabile x il numero a, otteniamo che:

$$P(a) = Q(a)(a - a) + R \qquad \text{cioè, poiché } (a - a) = 0 \qquad P(a) = R$$

Questo significa che, se eseguiamo la divisione $P(x) : (x - a)$, il resto che otteniamo è proprio uguale a $P(a)$. Per esempio, se vogliamo sapere qual è il resto della divisione $(3x^2 - 4x + 1) : (x - 2)$, basta calcolare $P(2)$:

$P(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5 \qquad$ dunque $\qquad R = 5$

Tutto questo è riassunto nel seguente teorema.

Teorema (del resto). Dato un polinomio $P(x)$ e un binomio della forma $(x - a)$, il resto della divisione $P(x) : (x - a)$ è uguale a $P(a)$:

$$R = P(a)$$

Questo teorema rappresenta un utile criterio per stabilire quando un polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x - a)$:

$P(x)$ è divisibile per $(x - a)$ se e solo se $P(a) = 0$.

Se il binomio divisore ha la forma $(x + a)$, allora

$$R = P(-a)$$

ESEMPI

1. Vogliamo stabilire se il polinomio $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$ è divisibile per i binomi indicati.

a. $(x - 1)$
Dobbiamo calcolare $R = P(1)$: $\quad P(1) = 2 \cdot 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 6 = 0$
Avendo ottenuto resto zero, $P(x)$ è divisibile per $(x - 1)$.

b. $(x + 2)$
Dobbiamo calcolare $R = P(-2)$: $\quad P(-2) = 2 \cdot (-2)^4 - 7 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot (-2) - 6 = 84$
Avendo ottenuto un resto non nullo, $P(x)$ non è divisibile per $(x + 2)$.

c. $(x - 2)$
Dobbiamo calcolare $R = P(2)$: $\quad P(1) = 2 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 6 = 0$
Avendo ottenuto resto zero, $P(x)$ è divisibile per $(x - 2)$.

5.2 La regola di Ruffini per la divisione

Il quoziente tra il polinomio $P(x)$ è il binomio $(x - a)$ si può trovare applicando una regola che prende il nome di regola di Ruffini.
Vediamo come procedere con un esempio e calcoliamo il quoziente di

$$(3x^2 - 2x + 5) : (x - 2)$$

1° passo. Si scrivono i coefficienti di $P(x)$ su una stessa riga, ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile x, ricordando di scrivere 0 come coefficiente dei termini mancanti se il polinomio è incompleto. Costruiamo uno schema del tipo riportato a lato.

$$\begin{array}{c|cc|c} & +\mathbf{3} & -\mathbf{2} & +\mathbf{5} \\ * & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

2° passo. Dopo aver scritto nella posizione contrassegnata con l'asterisco il valore di a, nel nostro caso 2, si riscrive in basso il primo coefficiente $(+3)$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & +3 & -2 & +5 \\ +\mathbf{2} & & & \\ \hline & +\mathbf{3} & & \end{array}$$

3° passo. Si moltiplica il valore di a per il coefficiente del termine che abbiamo appena riportato nell'ultima riga e si scrive il risultato nella colonna successiva. Nel nostro caso si calcola $3 \cdot 2$ ed il risultato si incolonna a -2.

$$\begin{array}{c|cc|c} & +3 & -2 & +5 \\ +2 & & +\mathbf{6} & \\ \hline & +3 & & \end{array}$$

4° passo. Si sommano gli ultimi valori incolonnati e si scrive il risultato nell'ultima riga. Nel nostro caso si calcola $-2 + 6$ e si scrive il risultato incolonnato nell'ultima riga.

$$\begin{array}{c|cc|c} & +3 & -2 & +5 \\ +2 & & +6 & \\ \hline & +3 & +\mathbf{4} & \end{array}$$

5° passo. Si ripetono i passi 3 e 4 fino a che si esaurisce lo schema.
L'ultimo risultato scritto, in questo caso $+\mathbf{13}$, è il resto della divisione. È possibile verificare la correttezza del procedimento appena descritto andando a valutare il resto con la tecnica descritta nel paragrafo precedente:

$$\begin{array}{c|cc|c} & +3 & -2 & +5 \\ +2 & & +6 & +\mathbf{8} \\ \hline & +3 & +4 & +\mathbf{13} \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

coefficienti del polinomio quoziente

resto

$$R = P(2) = 3 \cdot (2)^2 - 2(2) + 5 = +13$$

I valori scritti nell'ultima riga, escluso il resto, nel nostro caso $+\mathbf{3}$ e $+\mathbf{4}$, rappresentano i coefficienti del polinomio quoziente, che, dovendo essere di un grado inferiore rispetto a quello di $P(x)$, sarà di primo grado:

$$Q(x) = 3x + 4.$$

Quindi: $3x^2 - 2x + 5 = (3x + 4) \cdot (x - 2) + 13.$

ESEMPI

1. Calcoliamo $(2x^2 - x - 3) : (x + 1)$.

Impostiamo lo schema della divisione:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & -1 & -3 \\ -1 & & -2 & +3 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

coeff. di x — termine noto — resto

$P(x)$ ha grado 2, $Q(x)$ ha grado 1 ed è $\quad Q(x) = 2x - 3 \quad R = 0$

Possiamo quindi concludere che $2x^2 - x - 3 = (2x - 3)(x + 1)$.

2. Calcoliamo $(a^3 - a^2 - 6a + 8) : (a - 2)$.

	1	-1	-6	8
2		2	2	-8
	1	1	-4	0
	coeff. di x^2	coeff. di x	termine noto	resto

$P(a)$ ha grado 3, $Q(a)$ ha grado 2ed è $\quad Q(a) = a^2 + a - 4$

Possiamo quindi concludere che $\quad a^3 - a^2 - 6a + 8 = (a + a^2 - 4)(a - 2)$

3. Calcoliamo $(2y^4 + 3y^3 - 2y - 1) : (y + 2)$.

	$+2$	$+3$	0	-2	-1
-2		-4	$+2$	-4	$+12$
	$+2$	-1	$+2$	-6	$+11$

$Q(y) = 2y^3 - y^2 + 2y - 6 \qquad R = +11$

quindi: $\quad 2y^4 + 3y^3 - 2y - 1 = \left(2y^3 - y^2 + 2y - 6\right) \cdot (y + 2) + 11$

5.3 La scomposizione con la regola di Ruffini

Il teorema del resto e la regola di Ruffini ci permettono di eseguire la scomposizione di un polinomio andando a ricercare i suoi divisori di primo grado.
Per esempio, se vogliamo scomporre il polinomio $P(x) = 3x^3 - x^2 - 8x - 4$, vediamo se tra i binomi del tipo $x - a$ troviamo qualche divisore:

$P(1) = 3 - 1 - 8 - 4 = -10 \quad \rightarrow \quad$ il polinomio non è divisibile per $x - 1$

$P(-1) = -3 - 1 + 8 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad$ il polinomio è divisibile per $x + 1$

Eseguiamo la divisione con la regola di Ruffini:

	3	-1	-8	-4
-1		-3	$+4$	$+4$
	3	-4	-4	0

$Q(x) = 3x^2 - 4x - 4$

Una prima scomposizione di $P(x)$ è data dunque dal prodotto $\quad (3x^2 - 4x - 4)(x + 1)$.
Proviamo a scomporre il quoziente ottenuto; poiché $P(x)$ non era divisibile per $x - 1$, anche $Q(x)$ non lo è; può darsi però che sia ancora divisibile per $x + 1$:

$Q(-1) = 3 + 4 - 4 = 3 \quad \rightarrow \quad$ il polinomio non è divisibile per $x + 1$

Proviamo per altri binomi:

$Q(2) = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad$ il polinomio è divisibile per $x - 2$

Eseguiamo la divisione:

	3	-4	-4
2		6	$+4$
	3	$+2$	0

$Q'(x) = 3x + 2 \qquad$ e quindi $\qquad Q(x) = (3x + 2)(x - 2)$

In definitiva, il polinomio $P(x)$ si scompone nel prodotto $\quad (x + 1)(x - 2)(3x + 2)$.

In questa ricerca del binomio $(x - a)$ eventuale divisore di $P(x)$, se il coefficiente del termine di grado massimo è uguale ad 1, ci aiuta una regola:

> i valori di a, se esistono, vanno ricercati fra i divisori del termine noto di $P(x)$.

LA REGOLA PER TROVARE I DIVISORI $x - a$

Nel polinomio

$$x^3 - 4x^2 + x - 6$$

i valori di a vanno ricercati tra i divisori di 6:

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

Questa regola può essere estesa al caso in cui il polinomio $P(x)$ ha il coefficiente del termine di grado massimo diverso da 1; essa si enuncia dicendo che:

> i valori di a, se esistono, vanno ricercati fra i divisori del termine noto di $P(x)$ e fra le frazioni che hanno al numeratore i divisori del termine noto e al denominatore i divisori del coefficiente del termine di grado massimo.

Per esempio, dato il polinomio $\mathbf{2}x^3 - 3x^2 - 11x + \mathbf{6}$, poiché i divisori di 6 sono ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 ed i divisori di 2 sono ± 1, ± 2, i valori di a sono da ricercare fra i seguenti

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm \frac{1}{2}, \quad \pm \frac{3}{2}.$$

ESEMPI

1. $3x^3 + 13x^2 + 2x - 8$

Cerchiamo i binomi $x - a$ possibili divisori del polinomio dato; i valori di a vanno ricercati fra i divisori di 8, cioè fra i numeri ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 e fra le frazioni $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$, $\pm \frac{4}{3}$, $\pm \frac{8}{3}$.

Conviene provare prima per i valori interi di a; calcoliamo allora i valori assunti dal polinomio in corrispondenza di tali numeri fino a quando ne troviamo uno per cui $P(a) = 0$:

$P(1) = 3 + 13 + 2 - 8 = 10 \neq 0 \qquad P(-1) = -3 + 13 - 2 - 8 = 0$

Dunque il polinomio $P(x)$ è divisibile per $x + 1$; eseguiamo la divisione con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & +3 & +13 & +2 & -8 \\ -1 & & -3 & -10 & +8 \\ \hline & +3 & +10 & -8 & 0 \end{array} \qquad Q(x) = 3x^2 + 10x - 8$$

Una prima scomposizione del polinomio dato è dunque la seguente: $(x + 1)(3x^2 + 10x - 8)$

Per scomporre il trinomio $3x^2 + 10x - 8$ possiamo continuare nella ricerca dei divisori. Tenendo presente che non vale la pena di valutare $Q(1)$ perchè se il polinomio $P(x)$ non era divisibile per $x - 1$, non lo è nemmeno il quoziente $Q(x)$, ma che potrebbe ancora essere divisibile per $x + 1$, cerchiamo gli altri divisori:

$Q(-1) = 3 - 10 - 8 = -15 \neq 0 \qquad Q(2) = 3 \cdot 4 + 10 \cdot 2 - 8 = 24 \neq 0$

$Q(-2) = 3 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - 8 = -16 \neq 0 \qquad Q(4) = 48 + 40 - 8 = 80 \neq 0$

$Q(-4) = 48 - 40 - 8 = 0$ il polinomio è divisibile per $x + 4$

Eseguiamo la divisione:

$$\begin{array}{r|rr|r} & +3 & +10 & -8 \\ -4 & & -12 & +8 \\ \hline & +3 & -2 & 0 \end{array} \qquad Q(x) = 3x - 2$$

In definitiva: $3x^3 + 13x^2 + 2x - 8 = (x + 1)(x + 4)(3x - 2)$.

Dalla ricerca dei divisori di un polinomio possiamo dedurre altre regole di scomposizione che risultano particolarmente utili.

Somme e differenze di cubi

In base al teorema di Ruffini:

- un polinomio del tipo $x^3 + a^3$ è sempre divisibile per $x + a$; infatti:

  $P(-a) = (-a)^3 + a^3 = -a^3 + a^3 = 0$

  Eseguendo la divisione con la regola di Ruffini troviamo:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & +a^3 \\ -a & & -a & +a^2 & -a^3 \\ \hline & 1 & -a & +a^2 & 0 \end{array} \qquad \text{quindi} \qquad \boxed{x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)}$$

- un polinomio del tipo $x^3 - a^3$ è sempre divisibile per $x - a$; infatti:

  $P(a) = a^3 - a^3 = 0$

  Eseguendo la divisione con la regola di Ruffini troviamo:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ +a & & +a & +a^2 & +a^3 \\ \hline & 1 & +a & +a^2 & 0 \end{array} \qquad \text{quindi} \qquad \boxed{x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)}$$

Ricordare queste regole è facile se si tiene presente il seguente schema:

$$x^3 + a^3 = \underbrace{(x + a)}_{\text{somma delle basi}} \cdot (x^2 - ax + a^2)$$

quadrato della prima base

prodotto cambiato di segno delle due basi

quadrato della seconda base

$$x^3 - a^3 = \underbrace{(x - a)}_{\text{differenza delle basi}} \cdot (x^2 + ax + a^2)$$

Si verifica poi che i polinomi ottenuti dal quoziente, cioè $x^2 - ax + a^2$ e $x^2 + ax + a^2$ non si possono scomporre ulteriormente, sono cioè irriducibili. Per esempio:

- $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

  basi delle potenze x e 3

- $8y^3 + 1 = (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$

  basi delle potenze $2y$ e 1

Somme e differenze di potenze in genere

Qualunque differenza di potenze pari può essere interpretata come una differenza di quadrati ed essere scomposta con la stessa regola.
Non è invece possibile scomporre una somma di potenze pari considerandole come dei quadrati. Per esempio:

- $x^4 - 1$ si può considerare una differenza di quadrati:

  $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

Il fattore (x^2-1) si può ulteriormente scomporre come differenza di quadrati, mentre il fattore (x^2+1) è irriducibile; in definitiva:

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

- x^6+1 non si può scomporre come somma di quadrati; tuttavia, considerando che $x^6=(x^2)^3$, il binomio può essere scomposto come somma di cubi:

  $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

- x^6-1 si può inizialmente scomporre come una differenza di quadrati e poi applicare la regola sulla somma e differenza di cubi:

  $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

Attenzione agli errori

- Le somme di potenze pari non si possono scomporre:

  x^2+4 non è uguale a $(x+2)(x-2)$

  non è nemmeno uguale a $(x+2)^2$

  x^2+4 è **irriducibile**

- Nella scomposizione della somma e della differenza di cubi il polinomio di secondo grado che si ottiene assomiglia a un quadrato, **ma non è** un quadrato

  $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

  ed **è sbagliato** proseguire in questo modo:

  $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)(x+2)^2$

  Polinomi del tipo di x^2+2x+4 non rappresentano il quadrato di un binonio perché vi è il prodotto semplice delle due basi e non il doppio prodotto; essi si chiamano **falsi quadrati**.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Stabilisci se il polinomio $P(x)=3x^3-4x^2+x+8$ è divisibile per i binomi $(x-1)$, $(x+1)$, $(x-2)$.

Divisibilità per $(x-1)$: calcola $P(1)=$ .... divisibile: SI NO

Divisibilità per $(x+1)$: calcola $P(....)=$ .... divisibile: SI NO

Divisibilità per $(x-2)$: calcola $P(....)=$ .... divisibile: SI NO

2. Dato il polinomio $3x^3-x^2-10x+8$ e considerati i divisori della forma $(x-a)$:

a. elenca quali possono essere i valori di a: ....

b. scegli fra i seguenti quali sono suoi divisori:

① $(x-1)$ ② $(x+4)$ ③ $(x+2)$ ④ $(x+1)$ ⑤ $(x-2)$

c. la sua scomposizione è:

① $(x-1)(x+2)(3x-4)$ ② $(x+1)(x-2)(3x-2)$

③ $(x-1)(x-2)(3x-4)$ ④ $(x+1)(x+4)(3x-1)$

3. Il binomio $8a^3-1$ si scompone in:

a. $(2a-1)(4a^2-2a+1)$ **b.** $(2a+1)(4a^2+2a+1)$

c. $(2a-1)(4a^2+2a+1)$ **d.** $(2a-1)(2a+1)^2$

6. SINTESI SULLA SCOMPOSIZIONE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 39

Quando si deve scomporre un polinomio bisogna guardare bene la sua forma per capire quale, fra i metodi che abbiamo visto, è il più adatto. In generale, conviene seguire una procedura di questo tipo:

- verificare se è possibile eseguire un raccoglimento totale
- verificare se è possibile eseguire un raccoglimento parziale finalizzato a un raccoglimento totale
- verificare se il polinomio può essere lo sviluppo di un prodotto notevole o deriva da una regola particolare; importante in questo caso è contare il numero dei suoi termini; per esempio:
  - se ne ha due può essere una differenza di quadrati oppure una somma o una differenza di cubi,
  - se ne ha tre può essere il quadrato di un binomio o un trinomio caratteristico

  e così via
- trovare i suoi divisori della forma $x - a$ applicando il teorema di Ruffini ed eseguire le divisioni
- usare una combinazione dei metodi precedenti.

ESEMPI

1. $4ax + 6x^2 - 2ay - 3xy$

si può eseguire un raccoglimento parziale: $2x(2a + 3x) - y(2a + 3x)$

eseguiamo adesso un raccoglimento totale: $(2a + 3x)(2x - y)$

2. $ay^3 - 27ax^3$

si può eseguire un raccoglimento totale: $a(y^3 - 27x^3)$

il binomio nelle parentesi è una differenza di cubi: $a(y - 3x)(y^2 + 3xy + 9x^2)$

3. $18a - 12ax + 2ax^2$

si può eseguire un raccoglimento totale: $2a(9 - 6x + x^2)$

il polinomio fra parentesi è il quadrato di un binomio: $2a(x - 3)^2$

4. $9a^2 - (x - 2y)^2$

è una differenza di quadrati: $[3a - (x - 2y)][3a + (x - 2y)] = (3a - x + 2y)(3a + x - 2y)$

5. $3bx^2 + 3bx - 6b$

si può eseguire un raccoglimento totale: $3b(x^2 + x - 2)$

il trinomio nella parentesi è caratteristico: $3b(x - 1)(x + 2)$

7. M.C.D. e m.c.m. TRA POLINOMI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 43

Accade spesso che due o più polinomi abbiano uno stesso polinomio divisore, che in questo caso si chiama divisore comune. Quando è possibile determinare, fra tutti i divisori comuni a due o più polinomi, quello di grado più elevato, si dice che si è trovato il Massimo Comun Divisore.

Per determinare il *M.C.D.* fra due o più polinomi:
- si scompongono i polinomi in fattori;
- si scrive il prodotto dei soli fattori comuni con l'esponente più piccolo con cui compaiono.

Se un polinomio è divisibile per altri polinomi, si dice che esso è un multiplo comune a tali polinomi. Due o più polinomi possono avere infiniti multipli comuni, quello di grado meno elevato si chiama minimo comune multiplo.

Per determinare il *m.c.m.* fra due o più polinomi:
- si scompongono i polinomi in fattori;
- si scrive il prodotto dei fattori comuni e non comuni con l'esponente più grande con cui compaiono.

Il *M.C.D.* e il *m.c.m.* si possono sempre trovare quando siamo sicuri di aver scomposto i polinomi in fattori irriducibili. Quando non abbiamo questa certezza perché, per esempio, nella fattorizzazione troviamo dei polinomi di grado superiore al primo che, per qualche motivo, non riusciamo a scomporre con i metodi che abbiamo visto, possiamo solo parlare di divisori comuni e di multipli comuni.

ESEMPI

Calcoliamo *M.C.D.* e *m.c.m.* fra i seguenti polinomi.

1. $8x^2+16xy+8y^2$; $4x^4-4x^2y^2$; $12x^2+12xy$

Scomponiamo in fattori i tre polinomi:
- $8x^2+16xy+8y^2 = 8(x^2+2xy+y^2) = \mathbf{8(x+y)^2}$
- $4x^4-4x^2y^2 = 4x^2(x^2-y^2) = \mathbf{4x^2(x-y)(x+y)}$
- $12x^2+12xy = \mathbf{12x(x+y)}$

$M.C.D. = 4(x+y)$ $m.c.m. = 24x^2(x+y)^2(x-y)$

2. $x^4+5x^3-5x^2+5x-6$; x^3-x^2-x+1

- Scomponiamo inizialmente il primo polinomio con la regola di Ruffini:
  $P(1)=1+5-5+5-6=0$, quindi è divisibile per $(x-1)$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & +1 & +5 & -5 & +5 & -6 \\ +1 & & +1 & +6 & +1 & +6 \\ \hline & +1 & +6 & +1 & +6 & 0 \end{array}$$

$Q(x)=x^3+6x^2+x+6$

$x^4+5x^3-5x^2+5x-6 = (x-1)(x^3+6x^2+x+6)$
$= (x-1)[x^2(x+6)+1(x+6)]$ raccoglimento parziale nella seconda parentesi
$= \mathbf{(x-1)(x+6)(x^2+1)}$ raccoglimento totale

Osserviamo che x^2+1 è irriducibile e quindi non si può procedere oltre nella scomposizione.

- $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (\mathbf{x}-\mathbf{1})^2(\mathbf{x}+\mathbf{1})$

Allora: $M.C.D. = x - 1$ $\qquad m.c.m. = (x-1)^2(x+6)(x^2+1)(x+1)$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Scomponi i seguenti polinomi:

$2a^2x - 3abx =$ .... $\qquad 2a^2x^2 - 3abx^2 =$ .... $\qquad 4a^3x - 9ab^2x =$ ....

Il loro $M.C.D.$ è uguale a ....; $\qquad$ il loro $m.c.m.$ è uguale a ....

Determina adesso il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a. un divisore comune è a^2 V F

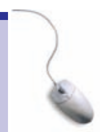
b. un divisore comune è x V F

c. un multiplo comune è $8a^2x^2(2a-3b)(2a+3b)$ V F

d. un multiplo comune è $a^2(2a-3b)^2$. V F

Sul sito www.edatlas.it *trovi...*

- il laboratorio di informatica
- gli esercizi dalle Gare di matematica
- i problemi di Matematica e Realtà
- le attività di recupero



Si tratta di calcolare il $m.c.m.$ fra i polinomi $\quad n \qquad n+1 \qquad n-1$.

Il $m.c.m.$ cercato è uguale a $\quad n(n-1)(n+1)$

Dunque, se il primo leone era sveglio n ore fa, il prossimo risveglio comune sarà fra un numero di ore pari a

$$R = n(n-1)(n+1) - n = n[(n-1)(n+1) - 1] = n(n^2-2)$$

Osserviamo che R è un numero positivo solo se $n \geq 2$ ed è:

$n = 2 \quad \rightarrow \quad R = 4$

$n = 3 \quad \rightarrow \quad R = 21$

$n = 4 \quad \rightarrow \quad R = 56$

$n = 5 \quad \rightarrow \quad R = 115$

Poiché non conosciamo il valore di n, ma sappiamo che non si deve aspettare più di tre giorni, il nostro eroe, se non vuole morire, dovrà essere davanti alla porta fra 4 ore, oppure fra 21 ore, oppure fra 56 ore.

La risposta al quesito iniziale

I concetti e le regole

La fattorizzazione

Scomporre un polinomio significa scriverlo come prodotto di due o più polinomi, possibilmente non ulteriormente scomponibili.
I metodi per eseguire la scomposizione si basano sui seguenti criteri:

- i raccoglimenti a fattor comune parziale o totale
- il riconoscimento di prodotti notevoli
- la regola del trinomio caratteristico
- l'individuazione dei divisori della forma $x - a$.

Come eseguire una fattorizzazione

Nella pratica, per scomporre un polinomio conviene tenere presenti, in successione, le seguenti considerazioni:

- controllare se è possibile eseguire un raccoglimento totale o parziale
- riferirsi a regole particolari guardando il numero dei termini del polinomio; se è un:

- binomio
  - differenza di quadrati $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$
  - somma di quadrati $x^2 + a^2$ irriducibile
  - somma di cubi $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$
  - differenza di cubi $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$
- trinomio
  - quadrato di un binomio $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
  - trinomio caratteristico $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
- quadrinomio
  - cubo di un binomio $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$
  - differenza di due quadrati $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 = (a+b)^2 - x^2 = (a+b+x)(a+b-x)$
- polinomio di sei termini
  - può essere il quadrato di un trinomio $a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b = (a + 2b - 3)^2$
  - può essere la differenza dei quadrati di due binomi

$$\begin{aligned} & a^2 + 2a + 1 - x^2 + 2xy - y^2 = \\ &= (a^2 + 2a + 1) - (x^2 - 2xy + y^2) = \\ &= (a+1)^2 - (x-y)^2 = \\ &= (a + 1 + x - y)(a + 1 - x + y) \end{aligned}$$

- cercare i divisori della forma $x - a$ con il teorema di Ruffini.

M.C.D. e m.c.m. fra polinomi

- Il *M.C.D.* fra due o più polinomi già fattorizzati è il prodotto dei soli fattori comuni con il minimo esponente.
- Il *m.c.m.* fra due o più polinomi già fattorizzati è il prodotto dei fattori comuni e non comuni con il massimo esponente.

La fattorizzazione dei polinomi

IL RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE

la teoria è a pag. 2

RICORDA

- Per poter eseguire un raccoglimento totale, il *M.C.D.* fra i monomi del polinomio deve essere diverso da 1; in questo caso si applica poi la proprietà di raccoglimento:

$$3x - 6x^2 = \underbrace{3x}_{\uparrow} \cdot 1 - \underbrace{3x}_{\uparrow} \cdot 2x = 3x\,(1 - 2x)$$

fattore comune $3x$

- Per eseguire un raccoglimento parziale, si raccoglie il *M.C.D.* fra gruppi di monomi in modo da ottenere polinomi uguali nelle parentesi e poter procedere successivamente ad un raccoglimento totale:

fattore comune $2a$

$$3by + 2ay - 2a - 3b = 3b\,(y - 1) + 2a\,(y - 1) = (y - 1)(3b + 2a)$$

fattore comune $3b$ — fattore comune $(y - 1)$

Comprensione

1 Le seguenti uguaglianze sono tutte vere; alcune di esse sono scomposizioni dei polinomi indicati al primo membro, altre non lo sono. Indica quali sono le scomposizioni.

a. $a^2x^2 - 4a^2 = (ax - 2a)(ax + 2a)$

b. $9y^3 + 6y^2 + y = y(3y + 1)^2$

c. $x^2 - 4x + ax - 4a = x(x - 4) + a(x - 4)$

d. $a^4 - 8ax^3 = a(a - 2x)(a^2 + 2ax + 4x^2)$

2 Per scomporre il polinomio $2ax^2 - 3ax + a^2x^2 - a$ mediante un raccoglimento a fattor comune totale si deve raccogliere:

a. ax **b.** a^2x^2 **c.** a **d.** x

3 Dato il polinomio $2x + 2xy - a - ay + 6bx - 3ab$, indica quali fra i seguenti raccoglimenti parziali a fattor comune sono utili per un successivo raccoglimento totale:

a. $\underline{2x} + \underline{2xy} - \underline{a} - \underline{ay} + \underline{6bx} - \underline{3ab} = 2x(1 + y) - a(1 + y) + 3b(2x - a)$

b. $\underline{2x} + \underline{2xy} - \underline{a} - \underline{ay} + \underline{6bx} - \underline{3ab} = (2x - a) + y(2x - a) + 3b(2x - a)$

c. $\underline{2x} + \underline{2xy} - \underline{a} - \underline{ay} + \underline{6bx} - \underline{3ab} = 2x(1 + y + 3b) - a(1 + y + 3b)$

d. $\underline{2x} + \underline{2xy} - \underline{a} - \underline{ay} + \underline{6bx} - \underline{3ab} = 2x(1 + 3b) + y(2x - a) - a(1 + 3b)$

4 Dato il polinomio $x - y + 2ax - 2ay + bx - by$, esegui i raccoglimenti fra i termini sottolineati con lo stesso colore e indica quali di essi sono utili per scomporre il polinomio:

a. $\underline{x} - \underline{y} + \underline{2ax} - \underline{2ay} + \underline{bx} - \underline{by} = (x - y) +$ ....

b. $\underline{x} - \underline{y} + \underline{2ax} - \underline{2ay} + \underline{bx} - \underline{by} =$ ....

c. $\underline{x} - \underline{y} + \underline{2ax} - \underline{2ay} + \underline{bx} - \underline{by} =$ ....

Applicazione

Scomponi i seguenti polinomi mediante raccoglimenti totali.

5 **ESERCIZIO GUIDA**

- $3ax^2y - 2x^2y^2 + 5ax^2y^2$

  Il *M.C.D.* fra tutti i monomi che compongono il polinomio è x^2y; eseguiamo le divisioni:

  $+3ax^2y : x^2y = +3a$ $\quad$ $-2x^2y^2 : x^2y = -2y$ $\quad$ $+5ax^2y^2 : x^2y = +5ay$

  Dunque: $3ax^2y - 2x^2y^2 + 5ax^2y^2 = x^2y(3a - 2y + 5ay)$

- $2b^2x - 2ab^2x - 4bx^2$

  Il *M.C.D.* fra tutti i monomi del polinomio è $2bx$: $2b^2x - 2ab^2x - 4bx^2 = 2bx(b - ab - 2x)$

- $3x^2 - 2y + 1$

  Poiché *M.C.D.* fra i monomi del polinomio è 1, non si può scomporre con un raccoglimento totale.

6 **ESERCIZIO GUIDA**

- $15x^3 - 20x^7 + 5x^2 = 5x^2($.......... $-$ .... $+$ ....$)$
- $3a^2b + 3ab^2 - 6ab = 3ab($.......... $+$ .... $-$ ....$)$
- $\frac{1}{3}a^2x^2 - \frac{1}{2}a^3x + 2a^2x = a^2x($.......... $-$ .... $+$ ....$)$

7	$3ab + 9a^2$;	$9x^4 - 6x^3$	$[3a(b + 3a),\ 3x^3(3x - 2)]$
8	$y^4 + \frac{1}{2}y$;	$5a^3 + 15a^2$	$\left[y\left(y^3 + \frac{1}{2}\right),\ 5a^2(a + 3)\right]$
9	$\frac{1}{5}x^3y^6 - 5xy^2$;	$3xy - 12y^2 + 18x^2y$	$\left[xy^2\left(\frac{1}{5}x^2y^4 - 5\right),\ 3y(x - 4y + 6x^2)\right]$
10	$4ab + 5a - 3a^2$;	$8a^3x + 2a^2 - 4a^6y$	$[a(4b + 5 - 3a),\ 2a^2(4ax + 1 - 2a^4y)]$
11	$13a^3b^2 - 26ab^3 + 39ab$;	$x^3 - ax^2 - 4a^2x$	$[13ab(a^2b - 2b^2 + 3),\ x(x^2 - ax - 4a^2)]$
12	$\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{2}{3}a$;	$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^6 + 3x^2$	$\left[\text{irriducibile},\ x^2\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^4 + 3\right)\right]$
13	$5x^3 - 2x^2 + x$;	$6a^3 - 12ab^3 + 24a^2b^2$	$[x(5x^2 - 2x + 1),\ 6a(a^2 - 2b^3 + 4ab^2)]$

14 $2z^2 - 2az - az^3$; $\quad 3by - 4b^2y + 5$ $\quad [z(2z - 2a - az^2)$, irriducibile$]$

15 $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}xy^2 - \frac{3}{2}xy$; $\quad 3a^2b^4 + 27a^2b^3 - 24a^3b^2$ $\quad \left[\frac{1}{2}xy\left(x + \frac{1}{2}y - 3\right), 3a^2b^2(b^2 + 9b - 8a)\right]$

16 $7abc - 21ab^2c^3 - 14ab^3c + 7a^2b^3c^2$ $\quad [7abc(1 - 3bc^2 - 2b^2 + ab^2c)]$

17 $5x^3y^2 - 10xy^3 + 20x^3y^3$ $\quad [5xy^2(x^2 - 2y + 4x^2y)]$

18 $3a^2b^4 + 27ab^3 - 24a^3b^2$ $\quad [3ab^2(ab^2 + 9b - 8a^2)]$

19 $32x^2y^2 - 20x^4y^2 + 16xy^4$ $\quad [4xy^2(8x - 5x^3 + 4y^2)]$

20 $6xy^2z - 12x^2yz^2 + 18xy^2z^2$ $\quad [6xyz(y - 2xz + 3yz)]$

21 $-8x^2y^3 - 10x^3y^2 + 6x^4y^3$ $\quad [2x^2y^2(-4y - 5x + 3x^2y)]$

22 $\frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{4}{3}x^4y^3 - \frac{7}{9}x^2y^3$ $\quad \left[\frac{1}{3}x^2y^2\left(2 - 4x^2y - \frac{7}{3}y\right)\right]$

23 $-3x^2y^4 - 6x^3y^4 + 12x^3y^5 - 18xy^6$ $\quad [3xy^4(-x - 2x^2 + 4x^2y - 6y^2)]$

24 $8xy^2z - 12x^2y^3z + 16x^3z + 6xz^3$ $\quad [2xz(4y^2 - 6xy^3 + 8x^2 + 3z^2)]$

25 $\frac{7}{3}a^2bx + \frac{1}{3}abx - \frac{5}{3}ab^2x - \frac{2}{3}abx^2$ $\quad \left[\frac{1}{3}abx(7a + 1 - 5b - 2x)\right]$

26 **ESERCIZIO GUIDA**

- $x(2y + 3) - y(2y + 3) + (2y + 3)$

  Il fattore comune è il binomio $(2y + 3)$; eseguiamo le divisioni:

  $x(2y + 3) : (2y + 3) = x \qquad -y(2y + 3) : (2y + 3) = -y \qquad (2y + 3) : (2y + 3) = 1$

  Dunque: $x(2y + 3) - y(2y + 3) + (2y + 3) = (2y + 3)(x - y + 1)$

- $5x(2x + y) - x^2(2x + y) + 3x(2x + y)^2$

  Il fattore comune è $x(2x + y)$; mettiamolo in evidenza:

  $5x(2x + y) - x \cdot x(2x + y) + 3(2x + y) \cdot x(2x + y)$

  Raccogliamo a fattor comune: $x(x + 2y)\ [5 - x + 3(2x + y)]$

  Svolgendo i calcoli all'interno della parentesi quadra otteniamo: $x(2x + y)(5 + 5x + 3y)$

27 $3(a + 1) + 2x(a + 1) - 5y(a + 1)$ $\quad [(a + 1)(3 + 2x - 5y)]$

28 $7(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2) - a(x^2 + y^2)$ $\quad [(x^2 + y^2)(10 - a)]$

29 $3x(a - b) + y(a - b) + a - b$ $\quad [(a - b)(3x + y + 1)]$

30 $-(y - 2x) + a(y - 2x) - 2b(y - 2x)$ $\quad [(y - 2x)(a - 2b - 1)]$

31 $15x(a - b) - 5y(a - b) + (a - b)$ $\quad [(a - b)(15x - 5y + 1)]$

32 $a(x^2 + 2y + z^3) + 2b(x^2 + 2y + z^3) - c(x^2 + 2y + z^3)$ $\quad [(x^2 + 2y + z^3)(a + 2b - c)]$

33 $(a + b)^3 - 2(a + b)^5$ $\quad [(a + b)^3[1 - 2(a + b)^2]]$

34 $3a(x + y)^2 - 2b(x + y)^4 + 5(x + y)^3$ $\quad [(x + y)^2[3a - 2b(x + y)^2 + 5(x + y)]]$

35 $(a - 2b)^2 - 2(a - 2b) + 3(a - 2b)^3$ $\quad [(a - 2b)[a - 2b - 2 + 3(a - 2b)^2]]$

36 $5(3x-y)^3-3(3x-y)^2+4a(y-3x)$ $[(3x-y)[5(3x-y)^2-3(3x-y)-4a]]$

37 $(a+b)(a-2b)-(a+b)(2a-b)+(5a-3b)(a+b)$ $[4(a+b)(a-b)]$

38 $-3a(a+5b)^2+4b(a+5b)(a-b)+3a(a+5b)(a+b)$ $[-4b(2a+b)(a+5b)]$

39 $42x^2y^3(a-1)-2ax^3y^2(a-1)+12xy(a-1)$ $[2xy(a-1)(21xy^2-ax^2y+6)]$

40 $(x-y)^2(x+y)-(x-y)(x+y)^2+(x-y)^2(x+y)$ $[(x+y)(x-y)(x-3y)]$

41 $2a(3x-y)-3a^2(3x-y)^2+6a(y-3x)$ $[a(y-3x)(9ax-3ay+4)]$

42 $5xy(a-2b)+15xy(2b-a)^2-20xy^2(a-2b)$ $[5xy(2b-a)(6b-3a+4y-1)]$

Scomponi i seguenti polinomi in fattori mediante raccoglimenti parziali e totali.

43 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\underbrace{2x-2}_{2}\ \underbrace{-\,ax+a}_{-a}=2(x-1)-a(x-1)=(x-1)(2-a)$$

44 **ESERCIZIO GUIDA**

- $\underbrace{x^3y^2-x^2y^3}_{x^2y^2}\ \underbrace{-\,5x+5y}_{-5}=x^2y^2(\dots\dots\dots)-5(\dots\dots\dots)=\dots\dots\dots\dots\dots$

$3a$

- $6a^2-4ab+3a-2b\quad=3a(\dots\dots\dots)-2b(\dots\dots\dots)=\dots\dots\dots$

$-2b$

- $\underbrace{x^2-4xy}_{x}\ \underbrace{+\,2x-8y}_{2}\ =x(\dots\dots\dots)+2(\dots\dots\dots)=\dots\dots\dots\dots$

45 $2ax+3b-2a-3bx$ $[(x-1)(2a-3b)]$

46 $6x^3-6x^2+5x-5$ $[(x-1)(6x^2+5)]$

47 $ay-2by+3a^2-6ab$ $[(a-2b)(y+3a)]$

48 $ax+bx-3ay-3by$ $[(a+b)(x-3y)]$

49 $-3a^3+2a^2b-3ab^2+2b^3$ $[(a^2+b^2)(2b-3a)]$

50 $x+\frac{3}{2}xy-1-\frac{3}{2}y$ $\left[(x-1)\left(1+\frac{3}{2}y\right)\right]$

51 $\frac{1}{4}ax+3by-\frac{1}{4}ay-3bx$ $\left[\left(\frac{1}{4}a-3b\right)(x-y)\right]$

52 $3-4x^3+2x-6x^2$ $[(2x+3)(1-2x^2)]$

53 $abx^2+acx-b^2x-bc$ $[(ax-b)(bx+c)]$

54 $6ax-3ay-2x^2+xy$ $[(2x-y)(3a-x)]$

55 $14x^3-7x^2y-6xy+3y^2$ $[(7x^2-3y)(2x-y)]$

56 $2ax + 2az - bx - by + 2ay - bz$ $[(2a - b)(x + y + z)]$

57 $x^2 - xy + xz - xy^2z^2 + y^3z^2 - y^2z^3$ $[(x - y^2z^2)(x - y + z)]$

58 $\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x + ab - bx - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}cx$ $\left[(a - x)\left(\frac{1}{3} + b - \frac{1}{2}c\right)\right]$

59 $2ax - ay - a^2 - 4bx + 2by + 2ab$ $[(a - 2b)(2x - y - a)]$

60 $\frac{2}{3}ax + by - \frac{1}{3}ay - \frac{1}{3}az + bz - 2bx$ $\left[\left(\frac{1}{3}a - b\right)(2x - y - z)\right]$

61 $2a - 2b - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}by + (b - a)^2$ $\left[(a - b)\left(2 - \frac{1}{2}y + a - b\right)\right]$

62 $5\left(\frac{1}{2}x - y\right)^2 - 5y + \frac{5}{2}x$ $\left[5\left(\frac{1}{2}x - y\right)\left(\frac{1}{2}x - y + 1\right)\right]$

63 $-5a(x - y)^2 + 3(x - y)^3 - 3ax + 3ay$ $[(x - y)[3(x - y)^2 - 5a(x - y) - 3a]]$

64 $3ay^2 + 3xy^2 - 3a^2y^2 - 3axy^2$ $[3y^2(a + x)(1 - a)]$

65 $7a^2 + 7ab - 4a(a + b)^2 - 3a(a + b)$ $[4a(a + b)(1 - a - b)]$

66 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{2}{9}(x - y)^2 - \frac{5}{9}x^2 + \frac{5}{9}xy$ $\left[-\frac{2}{9}y(x - y)\right]$

67 $x^3 + 4x^2y + 3xy(x + 4y) + xy^2 + 4y^3$ $[(x + 4y)(3xy + x^2 + y^2)]$

68 $2ab^2 - 2b^3 - 4b(a - b)^2 + (a - b)^3$ $[(a - b)(a^2 - 6ab + 7b^2)]$

69 $4ab(x - 3y) - 2a^2b(3y - x) + 2ab^2x - 6ab^2y$ $[2ab(x - 3y)(2 + a + b)]$

70 $2xy(2b - x)^3 + 4xy(x - 2b)^2 - x^2y^2(2b - x)^2$ $[xy(x - 2b)^2(4b - 2x - xy + 4)]$

CORREGGI GLI ERRORI

71 $2ax - 3bx + x = x(2a - 3b)$

72 $3x^2 - ax + x + 3bx - ab = x(3x - a + 1) - b(3x - a) = (x - b)(3x - a)$

73 $by - 2b + y - 2 = b(y - 2) + (y - 2) = (y - 2) \cdot b$

74 $x - 1 + ax - a - 2bx + 2b = x - 1 + a(x - 1) - 2b(x - 1) = (x - 1)(a - 2b)$

75 $a^5 + a^2 + b^5 - b^2 = a^2(a^3 + 1) - b^2(b^3 + 1) = (b^3 + 1)(a^3 + 1)(a^2 - b^2)$

IL RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

la teoria è a pag. 6

RICORDA

Per la scomposizione di un polinomio è importante saper riconoscere prodotti notevoli; in particolare:

- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ricorda poi che $(a - b)^2 = (b - a)^2$
- $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ ricorda poi che $(a - b)^3 = -(b - a)^3$

Comprensione

76 Indica quali fra i seguenti polinomi rappresentano dei quadrati di binomi o trinomi:

a. $y^4 - y^2 + \frac{1}{4}$

b. $4x^2 - 8xy + 16y^2$

c. $4b^4 + a^4 - 4a^2b^2$

d. $\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{9}a^4 - \frac{1}{3}a^2b$

e. $4ab - ac - 2bc + a^2 + 4b^2 - \frac{1}{4}c^2$

f. $30a - 20b - 12ab + 9a^2 + 4b^2 + 25$

g. $16y - 2x - 2xy + \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 + 16$

77 Solo una fra le seguenti è la scomposizione corretta del polinomio $9x^2 - 25y^2$; individuala:

a. $(9x - 5y)(9x + 5y)$ **b.** $(3x - 5y)^2$ **c.** $(3x - 5y)(3x + 5y)$ **d.** $(3x + 5y)^2$

78 Associa ai polinomi *A*, *B*, *C* la propria scomposizione scegliendola fra quelle indicate:

A. $4ax^2 + 4ax + a$ *B.* $8x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{3}{2}xy^2 + 6x^2y$ *C.* $x^4 + xy^3 + 3x^3y + 3x^2y^2$

① $x(x+y)^3$ ② $\left(-2x - \frac{1}{2}y\right)^3$ ③ $4a(x+1)^2$ ④ $4ax(x+1) + a$

⑤ $a(2x+1)^2$ ⑥ $x\left(x^3 + y^3\right) + 3x^2y\left(x^2 + y^2\right)$ ⑦ $\left(2x + \frac{1}{2}y\right)^3$ ⑧ $x^4 + xy\left(y^2 + 3x^2 + 3xy\right)$

Applicazione

Riscrivi in forma di quadrato di un binomio.

79 **ESERCIZIO GUIDA**

- $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + (3b)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b = (2a - 3b)^2$ oppure anche $(3b - 2a)^2$
- $y^4 + 10y^2 + 25 = (y^2)^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot y^2 =$ ....
- $81a^2 - 9ab + \frac{1}{4}b^2 = (9a)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2 \cdot 9a \cdot \frac{1}{2}b =$ ....

80 $4a^2 + 1 + 4a$; $a^2 - 4ab + 4b^2$; $25a^2 + 10ax + x^2$ $\left[(2a+1)^2;\ (a-2b)^2;\ (5a+x)^2\right]$

81 $x^4 + 1 + 2x^2$; $9x^2 + y^2 - 6xy$; $16a^2 + b^4 - 8ab^2$ $\left[(x^2+1)^2;\ (3x-y)^2;\ (4a-b^2)^2\right]$

82 $4y^6 + 1 - 4y^3$; $1 + 4x^2 + 4x$; $12xy + 9x^2 + 4y^2$ $\left[(2y^3-1)^2;\ (2x+1)^2;\ (3x+2y)^2\right]$

83 $6ab + 9b^2 + a^2$; $4x^2 - 20x + 25$; $9b^2 + 16a^4 - 24a^2b$ $\left[(a+3b)^2;\ (2x-5)^2;\ (3b-4a^2)^2\right]$

84 $0{,}25a^2 + ab + b^2$; $0{,}36x^2 - 1{,}2xy^2 + y^4$; $x^4 - x^2y + 0{,}25y^2$ $\left[(0{,}5a+b)^2;\ (0{,}6x-y^2)^2;\ (x^2-0{,}5y)^2\right]$

85 $\frac{4}{25}x^4 - \frac{4}{15}x^2y + \frac{1}{9}y^2$; $\frac{1}{16}b^4 + ab^2 + 4a^2$; $\frac{1}{16}x^6 + 1 + \frac{1}{2}x^3$ $\left[\left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}y\right)^2;\ \left(\frac{1}{4}b^2 + 2a\right)^2;\ \left(\frac{1}{4}x^3 + 1\right)^2\right]$

Scomponi in fattori.

86 **ESERCIZIO GUIDA**

$3x^3 - 12x^2y + 12xy^2$

Raccogliamo $3x$ a fattor comune totale: $3x(x^2 - 4xy + 4y^2)$

Il polinomio nella parentesi tonda è un quadrato: $3x(x - 2y)^2$

87 **ESERCIZIO GUIDA**

- $18ax^2 + 32a - 48ax = 2a(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $a^3b + 2a^2b + ab = ab(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

88 $2ax^2 + 8ay^2 + 8axy;$ $5a^2xy - 20abxy + 20b^2xy$ $[2a(x+2y)^2;\ 5xy(a-2b)^2]$

89 $7a^2 + 28a + 28;$ $20a^3 + 45ab^2 - 60a^2b$ $[7(a+2)^2;\ 5a(2a-3b)^2]$

90 $-5x^2 - 20y^2 + 20xy;$ $14mn^2 - 7n^4 - 7m^2$ $\left[-5(x-2y)^2;\ -7(m-n^2)^2\right]$

91 $-2a^5b + 4a^3b^4 - 2ab^7;$ $2x^6 - 8x^4y + 8x^2y^2$ $\left[-2ab(a^2-b^3)^2;\ 2x^2(x^2-2y)^2\right]$

92 $8x - 24abx + 18a^2b^2x;$ $20x^3 - 20x^2y + 5xy^2$ $[2x(3ab-2)^2;\ 5x(2x-y)^2]$

93 $9a^2x^2y^2 + 4b^2x^2y^2 - 12abx^2y^2;$ $-12a^7 - 3a + 12a^4$ $\left[x^2y^2(3a-2b)^2;\ -3a(2a^3-1)^2\right]$

94 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\underbrace{(a-2y)^2}_{\substack{\text{quadrato}\\ \text{di } a-2y}} + \underbrace{6(a-2y)}_{\substack{\text{doppio prodotto}\\ 2\cdot 3\cdot(a-2y)}} + \underbrace{9}_{\substack{\text{quadrato}\\ \text{di } 3}} = [(a-2y)+3]^2 = (a-2y+3)^2$$

95 $(x-y)^2 + 2(x-y) + 1;$ $(2a+b)^2 - 4(2a+b) + 4$ $[(x-y+1)^2;\ (2a+b-2)^2]$

96 $(2x-y)^2 + y^2 + 2y(2x-y);$ $(x+y)^2 + 4x^2 + 4x(x+y)$ $[4x^2;\ (3x+y)^2]$

97 $25a^6 + (2a+b)^2 - 10a^3(2a+b);$ $(a-2)^2 + x^2 - 2x(a-2)$ $\left[(5a^3-2a-b)^2;\ (a-2-x)^2\right]$

98 $(a-1)^2 + 2(a-1)(a+b) + (a+b)^2$ $[(2a+b-1)^2]$

99 $x(a+b)^2 - 2xy(a+b) + xy^2$ $[x(a+b-y)^2]$

100 $(x+1)(y-2)^2 + 2(x+1)(y-2)(y+3) + (x+1)(y+3)^2$ $[(x+1)(2y+1)^2]$

Riconosci nei seguenti polinomi il quadrato di un trinomio e indicalo.

101 **ESERCIZIO GUIDA**

$a^2 + 4b^2 + 1 + 4ab - 2a - 4b$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$(a)^2 \quad (2b)^2 \quad (1)^2$

Inoltre poiché $2 \cdot a \cdot 2b = 4ab \qquad 2 \cdot a \cdot 1 = 2a \qquad 2 \cdot 2b \cdot 1 = 4b$

si ha che $a^2 + 4b^2 + 1 + 4ab - 2a - 4b = (a + 2b - 1)^2$

102 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$ $\quad [(a + b - c)^2]$

103 $x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy - 2x - 4y$ $\quad [(x + 2y - 1)^2]$

104 $x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6x + 6y$ $\quad [(x - y - 3)^2]$

105 $a^2 + 4b^2 - 4ab + 10a - 20b + 25$ $\quad [(a - 2b + 5)^2]$

106 $4x^2 + 16y^2 + z^2 + 16xy - 4xz - 8yz$ $\quad [(2x + 4y - z)^2]$

107 $24xz - 12xy - 16yz + 9x^2 + 4y^2 + 16z^2$ $\quad [(3x - 2y + 4z)^2]$

108 $-6abc + a^2 - 12abc^3 + 4a^2c^2 + 9b^2c^2 + 4a^2c^4$ $\quad [(3bc - a - 2ac^2)^2]$

109 $\frac{1}{4}ac - ab - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}a^2 + b^2 + \frac{1}{16}c^2$ $\quad \left[\left(\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{4}c\right)^2\right]$

110 $\frac{5}{3}yz - \frac{4}{3}xz - 10xy + 4x^2 + \frac{25}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2$ $\quad \left[\left(2x - \frac{5}{2}y - \frac{1}{3}z\right)^2\right]$

111 $\frac{1}{4}x^2 + y^4 + \frac{1}{9}y^2 - xy^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{2}{3}y^3$ $\quad \left[\left(\frac{1}{2}x - y^2 + \frac{1}{3}y\right)^2\right]$

112 $\frac{1}{9}a^4 + \frac{9}{4}b^4 + \frac{16}{9} - a^2b^2 - \frac{8}{9}a^2 + 4b^2$ $\quad \left[\left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{3}{2}b^2 - \frac{4}{3}\right)^2\right]$

113 $\frac{9}{16}a^8 + \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{4}{9}b^4 + \frac{3}{4}a^5b - a^4b^2 - \frac{2}{3}ab^3$ $\quad \left[\left(\frac{3}{4}a^4 + \frac{1}{2}ab - \frac{2}{3}b^2\right)^2\right]$

114 **ESERCIZIO GUIDA**

$3x - 6xy + 12x^2 + 12x^3 + 3xy^2 - 12x^2y$

Raccogli dapprima $3x$ a fattor comune: $3x(1 - 2y + 4x + 4x^2 + y^2 - 4xy) = 3x(...............)^2$

115 $2x^3 - 24abx - 8ax^2 + 8a^2x + 12bx^2 + 18b^2x$ $\quad [2x(2a - 3b - x)^2]$

116 $a - 8ax + 20ax^2 - 16ax^3 + 4ax^4$ $\quad [a(2x^2 - 4x + 1)^2]$

117 $x^6y^2 - x^5y^3 - \frac{1}{2}x^4y^4 + \frac{1}{4}x^3y^5 + \frac{1}{4}x^4y^4 + \frac{1}{16}x^2y^6$ $\quad \left[x^2y^2\left(x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2\right)^2\right]$

Scomponi in fattori le seguenti differenze di quadrati.

118 **ESERCIZIO GUIDA**

$$x^4 - y^2 = (x^2 - y)(x^2 + y)$$

$$\underset{(x^2)^2}{\downarrow} \qquad \underset{(y)^2}{\downarrow}$$

119 **ESERCIZIO GUIDA**

- $a^2 - \frac{1}{4} = (a - .....)(a + ...)$
  $\downarrow \quad \downarrow$
  $(a)^2 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- $y^2 - 81 = ...$
  $\downarrow \quad \downarrow$
  $(y)^2 \quad (9)^2$
- $\frac{1}{4}x^4 - 9 = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right)(................)$
- $x^2 - 49 = (x - .....)(x + ...)$
- $16x^4 - 81y^4 = (4x^2 - 9y^2)(4x^2 + 9y^2)$
  $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
  $(2x)^2 \quad (3y)^2$ non è ulteriormente scomponibile
  $= (2x - 3y)(2x + 3y)(4x^2 + 9y^2)$

120 $a^2 - x^2$; $\quad 9 - y^2$; $\quad 25a^2 - b^2$ $\quad [(a - x)(a + x);\ (3 - y)(3 + y);\ (5a - b)(5a + b)]$

121 $16 - x^2y^2$; $\quad x^6 - z^4$; $\quad 1 - y^4$ $\quad [(4 - xy)(4 + xy);\ (x^3 - z^2)(x^3 + z^2);\ (1 - y)(1 + y)(1 + y^2)]$

122 $a^4b^2 - \frac{1}{16}$; $\quad \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{25}y^6$; $\quad 25a^2b^2 - x^4$
$\left[\left(a^2b - \frac{1}{4}\right)\left(a^2b + \frac{1}{4}\right);\ \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y^3\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y^3\right);\ (5ab - x^2)(5ab + x^2)\right]$

123 $b^2 - 49$; $\quad 16x^6 - 25y^4$; $\quad a^{10} - b^2$ $\quad [(b - 7)(b + 7);\ (4x^3 - 5y^2)(4x^3 + 5y^2);\ (a^5 - b)(a^5 + b)]$

124 $\frac{1}{25}a^4b^2 - 4$; $\quad \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{81}y^2$; $\quad 1 - \frac{1}{4}x^8$
$\left[\left(\frac{1}{5}a^2b - 2\right)\left(\frac{1}{5}a^2b + 2\right);\ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{9}y\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{9}y\right);\ \left(1 - \frac{1}{2}x^4\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^4\right)\right]$

125 $81a^4 - 16c^4$; $\quad x^6 - 4y^6$; $\quad a^4b^4 - 16$
$[(3a - 2c)(3a + 2c)(9a^2 + 4c^2);\ (x^3 - 2y^3)(x^3 + 2y^3);\ (ab - 2)(ab + 2)(a^2b^2 + 4)]$

126 **ESERCIZIO GUIDA**

- $b^3 - 9b$
  raccogliamo b a fattor comune: $\quad b(b^2 - 9)$
  $\qquad b(b - 3)(b + 3)$
- $100a^2x^2 - 25a^2$
  raccogliamo $25a^2$: $\quad 25a^2(.................)$
  scomponiamo: $\quad 25a^2(......... - ....)(......... + ...)$

127 $125x^6 - 5x^2y^4$; $\quad 27a^6 - 75a^2$ $\quad [5x^2(5x^2 + y^2)(5x^2 - y^2);\ 3a^2(3a^2 + 5)(3a^2 - 5)]$

128 $0{,}04b^3 - 0{,}01a^2b$; $\quad 6ax^2 - 24a$ $\quad [b(0{,}2b - 0{,}1a)(0{,}2b + 0{,}1a);\ 6a(x - 2)(x + 2)]$

129 $4ax^3 - 9ax$; $\quad 1{,}44a^2x^2 - a^2b^2$ $\quad [ax(2x - 3)(2x + 3);\ a^2(1{,}2x - b)(1{,}2x + b)]$

130 $\frac{1}{2}b^3 - 2b$; $\quad \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{12}xy^2$ $\quad \left[\frac{1}{2}b(b - 2)(b + 2);\ \frac{3}{4}x\left(x + \frac{1}{3}y\right)\left(x - \frac{1}{3}y\right)\right]$

131 $x^3 - 4x$; $2a^2y - 18y$ $[x(x-2)(x+2);\ 2y(a-3)(a+3)]$

132 $12a^3 - 3ab^2$; $9x^3y^2 - x$ $[3a(2a-b)(2a+b);\ x(3xy-1)(3xy+1)]$

133 **ESERCIZIO GUIDA**

$(a-2x)^2 - x^2 = [(a-2x)-x][(a-2x)+x] = (a-3x)(a-x)$

134 $(a+3b)^2 - 1$; $(x+y)^2 - a^2$ $[(a+3b-1)(a+3b+1);\ (x+y-a)(x+y+a)]$

135 $x^2 - (1+y)^2$; $9a^2 - (a-b)^2$ $[(x-1-y)(x+1+y);\ (2a+b)(4a-b)]$

136 $1 - (2a-b)^2$; $(x-3y)^2 - 9y^2$ $[(1-2a+b)(1+2a-b);\ x(x-6y)]$

137 $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^2 - 9$; $(2+b)^2 - a^2$ $\left[\left(\frac{1}{2}x+2y-3\right)\left(\frac{1}{2}x+2y+3\right);\ (2+b-a)(2+b+a)\right]$

138 $4a^2 - (2a-3b)^2$; $(x+y)^2 - (2x-y)^2$ $[3b(4a-3b);\ 3x(2y-x)]$

139 $(a+3b)^2 - (2a+b)^2$; $(2x+y)^2 - (y-3x)^2$ $[(2b-a)(3a+4b);\ 5x(2y-x)]$

140 $81a^4 - b^4$; $x^5y - xy^5$ $[(3a-b)(3a+b)(9a^2+b^2);\ xy(x-y)(x+y)(x^2+y^2)]$

141 $(x+y)^2 - z^4$; $16a^8 - (a-b)^4$

$\left[(x+y-z^2)(x+y+z^2);\ (2a^2-a+b)(2a^2+a-b)\left[4a^4+(a-b)^2\right]\right]$

142 $(2x^2-y)^2 - 9$; $\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)^2 - x^4$

$\left[(2x^2-y-3)(2x^2-y+3);\ \left(1-\frac{1}{2}x\right)\left(1+\frac{1}{2}x\right)\left(1+\frac{7}{4}x^2\right)\right]$

143 $25 - (2a+b-1)^2$; $\frac{1}{9}x^4 - \left(\frac{1}{3}x^2+y\right)^2$ $\left[(6-2a-b)(4+2a+b);\ -\frac{1}{3}y(2x^2+3y)\right]$

Dopo averli ridotti a differenze di due quadrati, scomponi in fattori i seguenti polinomi.

144 **ESERCIZIO GUIDA**

$a^2 + 4a + 4 - 16x^2 = (a^2+4a+4) - 16x^2 = (a+2)^2 - (4x)^2 = (a+2-4x)(a+2+4x)$

145 **ESERCIZIO GUIDA**

- $x^2 - x^4 - 25 + 10x^2 = x^2 - (x^4 + 25 - 10x^2) =$ ....
- $9 - a^2 + ab - \frac{1}{4}b^2 \quad = 9 - \left(a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2\right) =$ ....

146 $x^2 + 4x + 4 - 9y^2$; $a^4 + 9 - 6a^2 - 25b^2$ $[(x+2+3y)(x+2-3y);\ (a^2-3+5b)(a^2-3-5b)]$

147 $4a^2 + 9 - 16b^2 - 12a$; $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 1$ $[(2a-3+4b)(2a-3-4b);\ (3x+2y-1)(3x+2y+1)]$

148 $b^2 + 49 - 14b - 9a^2$; $\frac{4}{9}a^2 + 1 - \frac{4}{3}a - 25b^2$ $\left[(b-7-3a)(b-7+3a);\ \left(1-\frac{2}{3}a-5b\right)\left(1-\frac{2}{3}a+5b\right)\right]$

149 $1-4x^2-\frac{1}{4}y^2+2xy$ $\left[\left(1-2x+\frac{1}{2}y\right)\left(1+2x-\frac{1}{2}y\right)\right]$

150 $16b^2-a-1-\frac{1}{4}a^2$ $\left[\left(4b-1-\frac{1}{2}a\right)\left(4b+1+\frac{1}{2}a\right)\right]$

151 $36y^2-14x-49-x^2$ $[(6y-x-7)(6y+x+7)]$

152 $25x^6-40x^3y+16y^2-9$ $[(5x^3-4y+3)(5x^3-4y-3)]$

153 $25a^2b^2-10ab+1-b^2$ $[(5ab-1-b)(5ab-1+b)]$

154 $x^2-y^2-2yz-z^2$ $[(x-y-z)(x+y+z)]$

155 $81x^4-a^2-2ab-b^2$ $[(9x^2-a-b)(9x^2+a+b)]$

156 $49x^2y^4-9a^2+6ab-b^2$ $[(7xy^2-3a+b)(7xy^2+3a-b)]$

157 $4a^2-6a+\frac{9}{4}-a^2b^2$ $\left[\left(2a-\frac{3}{2}-ab\right)\left(2a-\frac{3}{2}+ab\right)\right]$

158 $\frac{1}{9}x^2-4y^2+2y-\frac{1}{4}$ $\left[\left(\frac{1}{3}x-2y+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x+2y-\frac{1}{2}\right)\right]$

159 $9a^2-b^2-\frac{1}{9}c^2+\frac{2}{3}bc$ $\left[\left(3a-b+\frac{1}{3}c\right)\left(3a+b-\frac{1}{3}c\right)\right]$

160 $\frac{25}{4}x^2+\frac{1}{16}-\frac{5}{4}x-\frac{4}{9}y^2$ $\left[\left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}y\right)\right]$

161 $0{,}01x^2-0{,}2x+1-\frac{1}{25}y^2$ $\left[\left(\frac{1}{10}x-1-\frac{1}{5}y\right)\left(\frac{1}{10}x-1+\frac{1}{5}y\right)\right]$

162 $(a+1)^2-9-b^2-6b$ $[(a+4+b)(a-2-b)]$

163 $4x^2+1-4x-(3y-1)^2$ $[(2x+3y-2)(2x-3y)]$

164 $x^2+25+10x-9a^2-4+12a$ $[(x+3a+3)(x-3a+7)]$

165 $4a^2+9b^2+12ab-4b^4-a^4+4a^2b^2$ $[(2a+3b+2b^2-a^2)(2a+3b-2b^2+a^2)]$

166 $a^2-6ab+\frac{1}{4}x^2+ax-9a^2-b^2$ $\left[\left(4a+\frac{1}{2}x+b\right)\left(\frac{1}{2}x-2a-b\right)\right]$

Riconosci nei seguenti polinomi i cubi di un binomio e indicali.

167 **ESERCIZIO GUIDA**

$x^3+6x^2+12x+8$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$(x)^3 \qquad\qquad (2)^3$ Inoltre $3\cdot(x)^2\cdot 2=6x^2$ $3\cdot x\cdot(2)^2=12x$

quindi $x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$

168 a^3-3a^2+3a-1 $8x^3-12x^2+6x-1$ $[(a-1)^3;\ (2x-1)^3]$

169 $y^3+8a^3+6ay^2+12a^2y$ $8x^3-36x^2+54x-27$ $[(y+2a)^3;\ (2x-3)^3]$

170 $a^3+6a^2b^2+8b^6+12ab^4$ $\frac{1}{27}t^3+t-1-\frac{1}{3}t^2$ $\left[(a+2b^2)^3;\ \left(\frac{1}{3}t-1\right)^3\right]$

171 $-x^3 - \frac{1}{8} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x$ $\qquad -8a^6 + 27b^3 - 54a^2b^2 + 36a^4b$ $\qquad \left[\left(-x - \frac{1}{2}\right)^3; (3b - 2a^2)^3\right]$

172 $0{,}001x^9 - y^3 - 0{,}03x^6y + 0{,}3x^3y^2$ $\qquad \frac{1}{8}a^3 - 27b^3 - \frac{9}{4}a^2b + \frac{27}{2}ab^2$ $\qquad \left[(0{,}1x^3 - y)^3; \left(\frac{1}{2}a - 3b\right)^3\right]$

173 $\frac{1}{27}a^3 + b^3 + \frac{1}{3}a^2b + ab^2$ $\qquad 8x^3 - 6x^2y + \frac{3}{2}xy^2 - \frac{1}{8}y^3$ $\qquad \left[\left(\frac{1}{3}a + b\right)^3; \left(2x - \frac{1}{2}y\right)^3\right]$

174 $\frac{8}{27}y^3 - 27x^3 - 4xy^2 + 18x^2y$ $\qquad \frac{3}{4}a^2b^2 + \frac{3}{2}ab^4 + \frac{1}{8}a^3 + b^6$ $\qquad \left[\left(\frac{2}{3}y - 3x\right)^3; \left(\frac{1}{2}a + b^2\right)^3\right]$

CORREGGI GLI ERRORI

175 $3ab + a^2 + 9b^2 = (a + 3b)^2$

176 $4x^2 - 20ax - 25a^2 = (2x - 5a)^2$

177 $9x^2 + 16y^2 = (3x + 4y)(3x - 4y)$

178 $25a^2 - 64 = (5a - 8)^2$

179 $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 9y^3 = (x + 3y)^3$

180 $x^2 - (a + b)^2 = (x + a + b)(x - a + b)$

181 $3x^2 + 12 = 3(x^2 + 4) = 3(x + 2)^2$

182 $b^2 + 4a^2 - 2ab = (b - 2a)^2$

183 $5x^2 + 10xy - 5y^2 = 5(x - y)^2$

184 $x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$

IL TRINOMIO CARATTERISTICO

la teoria è a pag. 8

RICORDA

- Trinomio caratteristico è un trinomio che si può scrivere nella forma $x^2 + sx + p$ dove s rappresenta la somma di due numeri e p il loro prodotto.
  Trovati dunque due numeri a e b tali che $a + b = s$ e $ab = p$ il trinomio $x^2 + sx + p$ si scompone nel prodotto $(x + a)(x + b)$;

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$-5 = -2 - 3 \qquad 6 = (-2)(-3)$$

Comprensione

185 Completa:
a. due numeri che hanno come prodotto -14 e come somma -5 sono ....
b. due numeri che hanno come prodotto $+3$ e come somma -4 sono ....
c. due numeri che hanno come prodotto -8 e come somma $+2$ sono ....

186 Il polinomio $x^2 - 4x - 21$ si scompone mediante la regola del trinomio caratteristico in:
a. $(x + 3)(x - 7)$ **b.** $(x + 7)(x - 3)$
c. $(x - 7)(x - 3)$ **d.** non si può scomporre con questa regola

187 Associa a ciascuno dei seguenti trinomi la corrispondente scomposizione in fattori:
a. $x^2 + 3x - 4$ **b.** $x^2 - 2x - 24$ **c.** $x^2 - 3x - 4$ **d.** $x^2 + 3x - 18$
① $(x + 1)(x - 4)$ ② $(x - 3)(x + 6)$ ③ $(x - 1)(x + 4)$ ④ $(x + 4)(x - 6)$

Applicazione

Trinomi del tipo $x^2 + sx + p$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi caratteristici.

188 **ESERCIZIO GUIDA**

$x^2 + x - 12$

Il prodotto deve essere -12 e la somma $+1$; analizziamo in quanti modi si ottiene -12 valutando contemporaneamente anche la somma:

$-12 \quad \rightarrow \quad -12 \cdot 1 \quad$ oppure $\quad 12 \cdot (-1) \quad$ ma la somma non è $+1$

$-12 \quad \rightarrow \quad -3 \cdot 4 \quad$ oppure $\quad 3 \cdot (-4) \quad$ la somma è $+1$ se i due numeri sono -3 e 4

Si ha quindi che: $\quad x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$

189 **ESERCIZIO GUIDA**

- $x^2 + 5x - 6 \quad$ il prodotto deve essere -6 e la somma $+5$: $\quad (x+6)(x - ...)$
- $y^2 - 9y + 8 \quad$ il prodotto deve essere $+8$ e la somma -9 : $\quad (y-1)(y - ...)$
- $b^2 + 4b - 5 \quad$ il prodotto deve essere -5 e la somma $+4$: $\quad (b-1)(b + ...)$

190 $a^2 + 3a + 2; \quad t^2 - t - 2; \quad x^2 - 2x - 35 \quad [(a+2)(a+1);\ (t+1)(t-2);\ (x+5)(x-7)]$

191 $a^2 + 9a + 8; \quad a^2 + 7a + 12; \quad x^2 - 15x + 36 \quad [(a+8)(a+1);\ (a+4)(a+3);\ (x-3)(x-12)]$

192 $b^2 - 7b + 10; \quad y^2 + 6y - 16; \quad a^2 + 4a - 32 \quad [(b-2)(b-5);\ (y+8)(y-2);\ (a+8)(a-4)]$

193 $a^2 - 5a + 6; \quad x^2 - 7x + 12; \quad a^2 - 13a + 42 \quad [(a-2)(a-3);\ (x-3)(x-4);\ (a-6)(a-7)]$

194 $x^2 - 11x + 10; \quad a^2 - 7a - 8; \quad y^2 - 11y - 12 \quad [(x-1)(x-10);\ (a+1)(a-8);\ (y+1)(y-12)]$

195 $y^2 - 9y - 36; \quad a^2 + 7a - 8; \quad y^2 - y - 20 \quad [(y+3)(y-12);\ (a+8)(a-1);\ (y+4)(y-5)]$

196 $t^2 + 7t + 10; \quad x^2 - 8x + 15; \quad a^2 - 3a - 10 \quad [(t+5)(t+2);\ (x-3)(x-5);\ (a+2)(a-5)]$

197 $a^2 + 5a + 6; \quad t^2 - 2t - 35; \quad b^2 + b - 6 \quad [(a+3)(a+2);\ (t+5)(t-7);\ (b+3)(b-2)]$

198 $x^2 + 5x - 24; \quad t^2 - 11t + 30; \quad x^2 + 10x + 21 \quad [(x+8)(x-3);\ (t-5)(t-6);\ (x+7)(x+3)]$

199 $x^2 - 8x + 12; \quad x^2 - 3x - 18; \quad b^2 - 7b - 60 \quad [(x-2)(x-6);\ (x+3)(x-6);\ (b+5)(b-12)]$

200 $x^2 - 2x - 63; \quad y^2 + y - 56; \quad b^2 + 17b + 60 \quad [(x+7)(x-9);\ (y+8)(y-7);\ (b+12)(b+5)]$

201 $a^2 + 3a - 40; \quad z^2 + 12z - 45; \quad y^2 - 11y + 24 \quad [(a+8)(a-5);\ (z+15)(z-3);\ (y-3)(y-8)]$

202 **ESERCIZIO GUIDA**

$x^2 - 9ax - 36a^2$

Il prodotto deve essere $-36a^2$, la somma $-9a$; i due numeri sono $-12a$ e $+3a$.

Quindi $\quad x^2 - 9ax - 36a^2 = (x - 12a)(x + 3a)$

203 $t^2 + 6bt - 16b^2; \quad a^2 + 5ab + 6b^2 \quad [(t+8b)(t-2b);\ (a+3b)(a+2b)]$

204 $x^2 + 10ax - 24a^2; \quad t^2 - 8at + 15a^2 \quad [(x+12a)(x-2a);\ (t-3a)(t-5a)]$

205 $x^2 - xy - 30y^2; \quad x^2 - xy - 42y^2 \quad [(x-6y)(x+5y);\ (x+6y)(x-7y)]$

206 $x^2 - 4bx - 45b^2$; $a^2 - 4ab - 60b^2$ $[(x-9b)(x+5b);\ (a+6b)(a-10b)]$

207 $y^2 + 2ay - 24a^2$; $b^2 + 10by - 24b^2$ $[(y-4a)(y+6a);\ (b+12y)(b-2y)]$

208 **ESERCIZIO GUIDA**

$x^4 - 2x^2 - 24$

Possiamo considerare x^2 come variabile e applicare la stessa regola: due numeri il cui prodotto è -24 e la cui somma è -2 sono -6 e $+4$, quindi:

$$x^4 - 2x^2 - 24 = (x^2 - 6)(x^2 + 4)$$

209 $a^4 + 9a^2 - 36$; $x^4 - 8x^2 - 9$ $[(a^2-3)(a^2+12);\ (x^2+1)(x-3)(x+3)]$

210 $y^4 + 6y^2 - 16$; $x^4 - 17x^2 + 16$ $[(y^2-2)(y^2+8);\ (x-1)(x+1)(x-4)(x+4)]$

211 $y^4 + 2y^2 - 24$; $y^4 - 6y^2 - 16$ $[(y+2)(y-2)(y^2+6);\ (y^2+2)(y^2-8)]$

Trinomi della forma $mx^2 + nx + q$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi caratteristici.

212 **ESERCIZIO GUIDA**

$6x^2 - x - 2$

Se il coefficiente del termine di secondo grado non è uguale a 1 la regola del trinomio caratteristico deve essere modificata.
La forma generale di questo trinomio è $mx^2 + nx + q$ e si devono trovare due numeri il cui prodotto è mq e la cui somma è n; detti a e b tali numeri, si riscrive il trinomio in questo modo:

$$mx^2 + (a+b)x + q$$

(in pratica si scrive n come somma dei due numeri trovati) e si procede ad un raccoglimento parziale e poi totale.

$6x^2 \quad - \quad x \quad - 2$

$mq = -12 \qquad n = -1 \qquad a = -4 \quad b = +3$

$6x^2 - 4x \quad + \quad 3x - 2$

$2x(3x-2) + (3x-2) = (3x-2)(2x+1)$

213 **ESERCIZIO GUIDA**

$2y^2 + 5y + 3$

Troviamo due numeri il cui prodotto è $2 \cdot 3 = 6$ e la cui somma è 5. Tali numeri sono proprio 2 e 3, quindi possiamo scrivere il polinomio in questo modo

$$2y^2 + 2y + 3y + 3$$

e procedere mediante raccoglimento: $2y(y+1) + 3(y+1) = (y+1)(2y+3)$

214 $3y^2 - 4y - 4$; $2t^2 - 3t - 2$ $[(3y+2)(y-2);\ (t-2)(2t+1)]$

215 $2x^2 - 7x + 6$; $7y + 4y^2 - 2$ $[(x-2)(2x-3);\ (4y-1)(y+2)]$

216 $12 + 13a + 3a^2$; $3y^2 - 5y - 8$ $[(3a+4)(a+3);\ (y+1)(3y-8)]$

217 $6t^2 - 7t + 1$; $\quad 3a^2 - 14a - 5$ $\quad [(t-1)(6t-1);\ (3a+1)(a-5)]$

218 $6y^2 + 11y - 2$; $\quad 2y^2 - 3y - 5$ $\quad [(y+2)(6y-1);\ (y+1)(2y-5)]$

219 $3a^2 - 5a + 2$; $\quad 4x^2 + 11x + 7$ $\quad (a-1)(3a-2);\ (x+1)(4x+7)$

220 $5x^2 + 7x + 2$; $\quad 3x^2 + 8x - 3$ $\quad [(x+1)(5x+2);\ (x+3)(3x-1)]$

221 $4x^2 + 7x + 3$; $\quad 4y^2 + 3y - 10$ $\quad [(x+1)(4x+3);\ (y+2)(4y-5)]$

222 $3x^2 + 5x - 2$; $\quad 6a^2 - 5a - 1$ $\quad [(x+2)(3x-1);\ (a-1)(6a+1)]$

223 $7x^2 - 9xy + 2y^2$; $\quad 5t^2 + 7ty - 6y^2$ $\quad [(x-y)(7x-2y);\ (t+2y)(5t-3y)]$

Scomponi i seguenti polinomi.

224 $15ax - 42a + 3ax^2$ $\quad 4bx^2 - 4abx - 8a^2b$ $\quad [3a(x+7)(x-2);\ 4b(x-2a)(x+a)]$

225 $5x^3 + 5x^2 - 60x$ $\quad 2x^3 - 5x^2y - 3xy^2$ $\quad [5x(x-3)(x+4);\ x(x-3y)(2x+y)]$

226 $10ay^2 - 11ay + ay^3$ $\quad a^2b^3 + ab^2 - 2b$ $\quad [ay(y-1)(y+11);\ b(ab-1)(ab+2)]$

227 $2x^2y - 24x^2 + x^2y^2$ $\quad 4x^3 - 18ax^2 - 10a^2x$ $\quad [x^2(y-4)(y+6);\ 2x(x-5a)(2x+a)]$

228 $a^4xy^2 + 7a^2xy^2 + 6xy^2$ $\quad 3x^3y - 5x^2y^2 + 2xy^3$ $\quad [xy^2(a^2+1)(a^2+6);\ xy(x-y)(3x-2y)]$

229 $12a^2b + 7a^2bx^2 + a^2bx^4$ $\quad 6a^3b + 5a^2b - 4ab$ $\quad [a^2b(x^2+4)(x^2+3);\ ab(2a-1)(3a+4)]$

230 $abx^2 - 20ab + abx^4$ $\quad x^4 - 5x^3y - 6x^2y^2$ $\quad [ab(x-2)(x+2)(x^2+5);\ x^2(x+y)(x-6y)]$

231 $ax^2 - 2ax - 8a + bx^2 - 2bx - 8b$ $\quad [(a+b)(x-4)(x+2)]$

232 $10y - 15a - 18ax + 12xy - 3ax^2 + 2x^2y$ $\quad [(2y-3a)(x+5)(x+1)]$

233 $2y - ay - 2a^2 + a^3 + a^4 - a^2y$ $\quad [(a+2)(a-1)(a^2-y)]$

234 $30a + 24x - 16ax - 3x^2 + 2ax^2 - 45$ $\quad [(2a-3)(x-5)(x-3)]$

235 $2a^2x - 4y - 3ax - 6ay - 2x + 4a^2y$ $\quad [(a-2)(2a+1)(x+2y)]$

LA RICERCA DEI DIVISORI DI UN POLINOMIO

la teoria è a pag. 10

RICORDA

I divisori di primo grado di un polinomio $P(x)$ vanno ricercati fra i binomi della forma $(x-a)$ dove a è un divisore del termine noto oppure è una delle frazioni che hanno al numeratore un divisore del termine noto e al denominatore un divisore del coefficiente del termine di grado massimo.
Per il teorema di Ruffini, se $P(a) = 0$, allora:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x)$$

dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione di $P(x)$ per $x - a$.

In particolare:

- le differenze e le somme di cubi si scompongono con le seguenti regole:
  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- le somme di quadrati sono irriducibili.

Comprensione

236 Dato il polinomio $P(x)$ e il binomio $(x-a)$, indicato con R il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-a)$, si può dire che:

a. $R = P(a)$ V F

b. $R = P(-a)$ V F

c. se $P(a) = 0$ allora $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$ V F

d. se $P(a) \neq 0$ allora $R \neq 0$. V F

237 Il resto della divisione del polinomio $P(y) = y^3 - 2y^2 + 4$ per il binomio $(y+1)$ è:

a. 3 **b.** -1 **c.** 1 **d.** 7

238 Il polinomio $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ è divisibile per:

a. $x-3$ **b.** $x-1$ **c.** $x+1$ **d.** $x+3$

239 Barra vero o falso.

a. Una differenza di cubi è sempre divisibile per la differenza delle basi. V F

b. Una somma di cubi non è mai divisibile per la differenza delle basi. V F

c. Una somma di potenze pari è sempre irriducibile. V F

d. Il polinomio $x^6 + y^6$ è irriducibile. V F

240 La scomposizione del binomio $a^3 - 27$ è:

a. $(a-3)(a^2 - 3a + 9)$ **b.** $(a-3)(a^2 + 3a + 9)$

c. $(a-3)(a^2 + 6a + 9)$ **d.** $(a+3)(a^2 + 3a + 9)$

241 Associa ai polinomi A e B la loro scomposizione scegliendola fra le seguenti:

$A.\ 8x^3 - y^3$ $B.\ 8x^3 + y^3$

① $(2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$ ② $(2x+y)(4x^2 + 2xy + y^2)$ ③ $(2x-y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

④ $(2x-y)(4x^2 + 8xy + y^2)$ ⑤ $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)$ ⑥ $(2x+y)(4x^2 - 8xy + y^2)$

242 Il polinomio $x^3 - 13x + 12$:

a. è divisibile per: ① $x+1$ ② $x-3$ ③ $x+6$ ④ $x-1$

b. si scompone in: ① $(x-1)(x+4)(x+3)$ ② $(x-1)(x+4)(x-3)$

③ $(x+1)(x+4)(x-3)$ ④ $(x-1)(x-4)(x-3)$

243 Il polinomio $x^6 - 64$ è divisibile per:

a. $x-2$ **b.** $x+2$ **c.** $x-4$ **d.** $x+4$

244 Scrivi un polinomio $P(x)$ di quarto grado che abbia come divisori tutti i seguenti binomi:
$x-2,\quad 2x-5,\quad x+4.$

Applicazione

Calcola il resto delle seguenti divisioni senza eseguirle.

245 ESERCIZIO GUIDA

- $(x^3 - 3x - 8) : (x-2)$ $R = P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 8 = ...$
- $(2y^3 + 5y^2 - y + 1) : (y+3)$ $R = P(-3) = ...$

246 $(2x^2 - 9) : (x - 1)$; $(z^2 + 2z - 16) : (z + 5)$ $[-7;\ -1]$

247 $(y^2 + 4y - 8) : (y - 2)$; $(3x^3 + 7x^2 + 4x + 4) : (x + 2)$ $[4;\ 0]$

248 $(3y^2 - 2y - 5) : (y - 2)$; $(3x^3 - 2x^2 - 4x - 1) : (x + 1)$ $[3;\ -2]$

249 $(2x + 9x^2 + 2x^3 - 11) : (x + 1)$; $(4y^3 - 5y + 6) : (y + 1)$ $[-6;\ 7]$

Utilizzando la regola di Ruffini, determina quoziente e resto delle seguenti divisioni.

250 **ESERCIZIO GUIDA**

$(x^3 + 4x^2 + 2) : (x + 1)$

Prepariamo lo schema della divisione ricordando che, poiché manca il termine di primo grado, dobbiamo mettere uno zero come suo coefficiente.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & & -1 & -3 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & -3 & 5 \end{array}$$

Il polinomio quoziente è di secondo grado ed è: $Q(x) = x^2 + 3x - 3$. Il resto è $R = 5$

251 $(y^2 + y - 1) : (y + 3)$ $[Q(y) = y - 2;\ R = +5]$

252 $(x^3 - 2x^2 + x + 1) : (x - 2)$ $[Q(x) = x^2 + 1;\ R = +3]$

253 $(z^3 - 9) : (z - 1)$ $[Q(z) = z^2 + z + 1;\ R = -8]$

254 $(2x^3 + 7x^2 + 5x - 6) : (x + 2)$ $[Q(x) = 2x^2 + 3x - 1;\ R = -4]$

255 $(x^3 - 4x^2 + 2x - 6) : (x + 1)$ $[Q(x) = x^2 - 5x + 7;\ R = -13]$

Scomponi i seguenti polinomi ricercando i loro divisori.

256 **ESERCIZIO GUIDA**

$3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$

I possibili binomi divisori della forma $x - a$ sono quelli in cui a vale $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{2}{3}$

$P(1) = 3 - 2 - 7 - 2 \neq 0$

$P(-1) = -3 - 2 + 7 - 2 = 0$ il polinomio è divisibile per $x + 1$

Eseguiamo la divisione con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ -1 & & -3 & +5 & +2 \\ \hline & 3 & -5 & -2 & 0 \end{array} \qquad P(x) = (x + 1)(3x^2 - 5x - 2)$$

Scomponiamo $3x^2 - 5x - 2$; i valori di a sono gli stessi ad esclusione di 1 per il quale abbiamo già visto che $P(1) \neq 0$.

$P(-1) = 3 + 5 - 2 \neq 0$

$P(2) = 12 - 10 - 2 = 0$ il polinomio è divisibile per $x - 2$, applichiamo ancora la regola di Ruffini:

	3	−5	−2
2		6	2
	3	1	0

$P(x) = (x+1)(x-2)(3x+1)$

In alternativa, per scomporre $3x^2 - 5x - 2$ si può usare la regola del trinomio caratteristico.

257 $y^3 + 2y^2 - 5y - 6$; $\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $\quad [(y+1)(y-2)(y+3); (x-1)(x+2)(x-3)]$

258 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$; $\quad 2a^3 - 3a^2 - 7a + 8$ $\quad [(x-1)(x-2)(x-5); (a-1)(2a^2 - a - 8)]$

259 $14x + 7x^2 + x^3 + 8$; $\quad 3t^3 - 4t^2 - 5t + 2$ $\quad [(x+1)(x+2)(x+4); (t-2)(t+1)(3t-1)]$

260 $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$; $\quad y^3 - 5y^2 - 4y + 20$ $\quad [(x+1)(x-2)(x+4); (y-2)(y+2)(y-5)]$

261 $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$; $\quad a^3 + 4a^2 + a - 6$ $\quad [(x-1)(x+1)(x-3)(2x-1); (a-1)(a+2)(a+3)]$

262 $4a^4 - 7a^3 - 13a^2 + 28a - 12$; $\quad x^4 + 5x^2 - 9x - 3x^3 + 6$
$[(a-1)(a-2)(a+2)(4a-3); (x-1)(x-2)(x^2+3)]$

263 $6x^4 - 17x^3 + 2x^2 + 19x - 6$; $\quad y^4 - y^3 - 2y - 4$ $\quad [(x+1)(x-2)(2x-3)(3x-1); (y-2)(y+1)(y^2+2)]$

264 $x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 2 - 3x$; $\quad t^5 + 5t^2 - 45 - 9t^3$ $\quad \left[(x+2)(x-1)^2(x^2+1); (t-3)(t+3)(t^3+5)\right]$

265 $b^4 + 2b^3 + b^2 + 8b - 12$; $\quad 2y^4 + 3y^3 + 3y - 2$ $\quad [(b-1)(b+3)(b^2+4); (y+2)(2y-1)(y^2+1)]$

266 $a^4 + a^3 + 2a - 4$; $\quad x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 10$
$[(a-1)(a+2)(a^2+2); (x+1)(x-2)(x^3+5)]$

267 $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8$; $\quad b^5 - 8b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 9b + 18$
$\left[(x+1)(x-2)(x+2)^2; (b+1)(b-3)(b-6)(b^2+1)\right]$

268 $6a^4 + a^3 - 25a^2 - 4a + 4$; $\quad b^4 + 2b^3 - b^2 + 3b + 10$
$[(a-2)(a+2)(2a+1)(3a-1); (b+2)(b^3 - b + 5)]$

269 $4x^4 - 12x^3 - x^2 + 27x - 18$; $\quad 4y^5 - 8y^4 - 5y^3 + 10y^2 + y - 2$
$[(x-1)(x-2)(2x+3)(2x-3); (y-1)(y+1)(y-2)(2y-1)(2y+1)]$

Scomponi le seguenti somme e differenze di potenze.

270 **ESERCIZIO GUIDA**

- $x^3 + 1$ è una somma di cubi aventi per basi x e 1: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
- $a^3 - 27$ è una differenza di cubi aventi per basi a e 3: $a^3 - 27 = (a-3)(a^2 + 3a + 9)$

271 $x^3 - 1$; $\quad 8y^3 + 1$

272 $y^3 - 1$; $\quad y^3 + 8$

273 $8a^3 - b^3$; $\quad 1 - a^3$

274 $64x^3 + y^3$; $\quad a^3 - 27b^3$

275 $x^3 + 8y^3$; $\quad 27x^3 + 8y^3$

276 $\frac{1}{64}a^3 + b^3$; $\quad 125a^3 - 1$

277 $\frac{1}{8}x^3 + a^6$; $\quad \frac{1}{125}x^3y^3 - 27$

278 $8b^3 - \frac{1}{27}y^6$; $\quad 64x^3 - a^9$

279 $x^6 + y^3$; $\quad a^6 - b^6$ $\quad [(x^2+y)(x^4-x^2y+y^2);\ (a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)]$

280 $64a^6 - 8$; $\quad a^3b^9 - \frac{1}{64}$ $\quad \left[8(2a^2-1)(4a^4+2a^2+1);\ \frac{1}{64}(4ab^3-1)(16a^2b^6+4ab^3+1)\right]$

281 $x^2 + 9$; $\quad 81 - b^4$ $\quad [x^2+9;\ (9+b^2)(3-b)(3+b)]$

282 $a^6 - 64$; $\quad y^4 + 1$ $\quad [(a-2)(a+2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4);\ y^4+1]$

283 $x^8 - 1$; $\quad 1 - y^6$ $\quad [(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1);\ (1-y)(1+y)(1+y+y^2)(1-y+y^2)]$

284 $a^2 - (b+c)^2$; $\quad a^3 - (b+c)^3$ $\quad [(a-b-c)(a+b+c);\ (a-b-c)[a^2+a(b+c)+(b+c)^2]]$

285 $(x+1)^3 + (x-2)^3$; $\quad (a^2+1)^4 - (a^2+2)^4$ $\quad [(2x-1)(x^2-x+7);\ -(2a^2+3)(2a^4+6a^2+5)]$

286 $\frac{1}{64}a^3 - \left(\frac{1}{4}a - b\right)^3$; $\quad (2x+y)^3 - (x-2y)^3$ $\quad \left[\frac{1}{16}b(3a^2-12ab+16b^2);\ (x+3y)(7x^2-3xy+3y^2)\right]$

287 $(a+b)^3 - b^3$; $\quad 16 - (x-2y)^4$ $\quad [a(a^2+3ab+3b^2);\ (2-x+2y)(2+x-2y)[4+(x-2y)^2]]$

288 $48a^4x^3 - 6a$; $\quad 32a^5 - 2ab^4$ $\quad [6a(2ax-1)(4a^2x^2+1+2ax);\ 2a(2a-b)(2a+b)(4a^2+b^2)]$

289 $32x^4 - 2y^6$; $\quad \frac{1}{8}a^5b^5 - a^2b^2$ $\quad \left[2(4x^2+y^3)(4x^2-y^3);\ a^2b^2\left(\frac{1}{2}ab-1\right)\left(\frac{1}{4}a^2b^2+1+\frac{1}{2}ab\right)\right]$

CORREGGI GLI ERRORI

290 $8a^3 - 1 = (2a-1)^3$

291 $y^3 + 27 = (y+3)(y^2-3y+9) = (y+3)(y-3)^2$

292 $x^3 - y^3 = (x^2-y^2)(x+y)$

293 $9a^3 - 1 = (3a-1)(9a^2+3a+1)$

294 $x^3 - 8 = (x-2)(x^2-2x+4)$

295 $27a^3 + b^3 = (3a+b)(9a^2+3ab+b^2)$

ESERCIZI DI SINTESI SULLA SCOMPOSIZIONE

la teoria è a pag. 17

Scomponi i seguenti polinomi.

296 $2ax - 3x - 8ay + 12y$ $\quad [(2a-3)(x-4y)]$

297 $13a^2 + 13a + 2ab + 2b$ $\quad [(13a+2b)(a+1)]$

298 $4a^5 - 4a - 8a^4 + 8$ $\quad [4(a-2)(a^2+1)(a-1)(a+1)]$

299 $a^3 - a^2 - a^4 + a^5$ $\quad [a^2(a-1)(a^2+1)]$

300 $6ax^3 + 4a^2x^2 - 2a^3x$ $\quad [2ax(x+a)(3x-a)]$

301 $8a^4 + 8a^3 - a - 1$ $\quad [(a+1)(2a-1)(4a^2+2a+1)]$

302 $a^2 - 9b^2 + a^2b^2 - 9$ $\quad [(1+b^2)(a-3)(a+3)]$

303 $6 + 3y + 10ab + 5aby$ $\quad [(2+y)(3+5ab)]$

304 $(a+3b)^2-3(a+3b)-4$ $[(a+3b+1)(a+3b-4)]$

305 $x^2-3x+2-2y+xy$ $[(x-2)(x+y-1)]$

306 $(x-3)^2+(2x-6)(x+1)-x^2+9$ $[2(x-3)(x-2)]$

307 $3ax+3bx+3cx-3a^2-3ab-3ac$ $[3(x-a)(a+b+c)]$

308 $x^2-ax-2xy+2ay$ $[(x-a)(x-2y)]$

309 $5y^5-7y^4-80y+112$ $[(5y-7)(y^2+4)(y-2)(y+2)]$

310 $x^3-6x^2y+x^2+9xy^2-6xy+9y^2$ $[(x-3y)^2(x+1)]$

311 a^3+3a^2-10a $[a(a-2)(a+5)]$

312 $4a^3+8a^2b-4a^2-8ab+a+2b$ $\left[(2a-1)^2(a+2b)\right]$

313 $2a^2x+2ax-12x$ $[2x(a+3)(a-2)]$

314 $a^2-4ab+4b^2+9-6a+12b$ $[(a-2b-3)^2]$

315 $\frac{1}{4}x^2y^2z+\frac{25}{4}x^2z-\frac{5}{2}x^2yz$ $\left[\frac{1}{4}x^2z(y-5)^2\right]$

316 $6a^4+a^3+5a^2+a-1$ $[(3a-1)(2a+1)(a^2+1)]$

317 $27b^4-54ab^3+36a^2b^2-8a^3b$ $[b(3b-2a)^3]$

318 $a^8b^3+25a^2b^7-10a^5b^5$ $[a^2b^3(a^3-5b^2)^2]$

319 $\frac{1}{4}x^2+2xy^2+4y^4-\frac{3}{2}xz^3+\frac{9}{4}z^6-6y^2z^3$ $\left[\left(\frac{1}{2}x+2y^2-\frac{3}{2}z^3\right)^2\right]$

320 $\frac{1}{8}a^3b^3x^2-27x^2$ $\left[x^2\left(\frac{1}{2}ab-3\right)\left(\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{3}{2}ab+9\right)\right]$

321 $27x^2y^2+3x^3y^3+81xy+81$ $[3(3+xy)^3]$

322 y^3-2y^2-15y $[y(y-5)(y+3)]$

323 $12xy+6x^2+x^3+24y^2-8y^3$ $[(x-2y+6)(2xy+x^2+4y^2)]$

324 $243x-54xy^2+3xy^4$ $[3x(y-3)^2(y+3)^2]$

325 $9b-9a+ax^4-bx^4$ $[(x^2+3)(x^2-3)(a-b)]$

326 $\frac{3}{16}a^4b^4+3a^2c^6+\frac{3}{2}a^3b^2c^3$ $\left[3a^2\left(\frac{1}{4}ab^2+c^3\right)^2\right]$

327 $0{,}09x^3y^2-\frac{36}{25}x^3y^4$ $\left[x^3y^2\left(\frac{3}{10}-\frac{6}{5}y\right)\left(\frac{3}{10}+\frac{6}{5}y\right)\right]$

328 $\frac{81}{4}a^3y-\frac{3}{4}b^3y$ $\left[\frac{3}{4}y(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)\right]$

329 $x^2yz^2+15yx^2+8x^2yz$ $[x^2y(z+3)(z+5)]$

330 $(x^2+a)^2+1+2(x^2+a)$ $[(x^2+a+1)^2]$

331 $5y^4-35y^2+50$ $[5(y^2-2)(y^2-5)]$

332 $x^6-6x^5+12x^4-8x^3$ $[x^3(x-2)^3]$

333 $5ax^2y^2 - 45axy^2 + 40ay^2$ $[5ay^2(x-1)(x-8)]$

334 $1 + (x-y)^3$ $[(1+x-y)[1-x+y+(x-y)^2]]$

335 $3a^4b + 21a^3b + 18a^2b$ $[3a^2b(a+1)(a+6)]$

336 $ay^2 - 3aby + 2ab^2$ $[a(y-b)(y-2b)]$

337 $x^8 - x^4 - 12$ $[(x^2-2)(x^2+2)(x^4+3)]$

338 $by^8 - by^4 - 2b$ $[b(y^4-2)(y^4+1)]$

339 $2x + ax^2 - 3abx + 2ab^2 - 4b$ $[(x-2b)(ax-ab+2)]$

340 $27a^3b^3 + b^3 + 3ab^2 + b^2$ $[b^2(3a+1)(9a^2b-3ab+b+1)]$

341 $\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{81}a^3b^3$ $\left[\frac{1}{3}a^3\left(1+\frac{1}{3}b\right)\left(1-\frac{1}{3}b+\frac{1}{9}b^2\right)\right]$

342 $x^5 - 4x^3 + 2x^4 - 6 - 4x^2 - 5x$ $[(x+1)(x-2)(x+3)(x^2+1)]$

343 $5x^3 + 3x^2 - 5x - 3$ $[(x-1)(x+1)(5x+3)]$

344 $x^4 - 6 - x^3 - 3x + x^2$ $[(x-2)(x^2+3)(x+1)]$

345 $x^5 + 9x^4 + 27x^3 + 27x^2$ $[x^2(x+3)^3]$

346 $a^4 - a^2 + 24a$ $[a(a+3)(a^2-3a+8)]$

347 $3y^7 - 2y^2 - 3y^6 + 2y - 6y^5 + 4$ $[(3y^5-2)(y+1)(y-2)]$

348 $x^3 - x^2 - 9a^2x + 9a^2$ $[(x-3a)(x+3a)(x-1)]$

349 $x^2z^3 - y^2z^3 - 8x^2y^3 + 8y^5$ $[(x-y)(x+y)(z-2y)(z^2+2yz+4y^2)]$

350 $3y^7 - 2y^2 - 3y^6 + 2y - 6y^5 + 4$ $[(3y^5-2)(y+1)(y-2)]$

351 $x^3 - x^2 - 9a^2x + 9a^2$ $[(x-3a)(x+3a)(x-1)]$

352 $y^3 + 3ay^2 - 2a^2y - 6a^3$ $[(y+3a)(y^2-2a^2)]$

353 $x^4 - 5x^3 + 21x - 18 + x^2$ $[(x-3)^2(x-1)(x+2)]$

354 $y^4 - y^3 - 11y^2 - y - 12$ $[(y^2+1)(y-4)(y+3)]$

355 $7a^4 - 28 + 14a^3 + 28a$ $[7(a^2+2)(a^2-2+2a)]$

356 $1 + 12ab - 4a^2 - 9b^2$ $[(1-2a+3b)(1+2a-3b)]$

357 $a^5 + a^3 - 3a^2 - 2a + 3$ $[(a-1)^2(a+1)(a^2+a+3)]$

358 $9a^2y^2 - y^2 - 144a^2 + 16$ $[(y-4)(y+4)(3a-1)(3a+1)]$

359 $x^2 - t^2 + 4y^2 - 4xy$ $[(x-2y-t)(x-2y+t)]$

360 $a^2b^2 + 2ab - 3 - 3a - a^2b$ $[(ab-a-1)(ab+3)]$

361 $3by - 10b^2 + y^2 + (y-2b)^2$ $[(y-2b)(3b+2y)]$

362 $a^2y - 3ay - 12x^2 - 9ax^2 - 4y + 3a^2x^2$ $[(a-4)(a+1)(y+3x^2)]$

363 $a^2x^3 - a^2 - b^2x^3 + b^2$ $[(a+b)(a-b)(x-1)(x^2+x+1)]$

364 $(2x-1)^2 + (a+1)(2x-1) - 4x^2 + 1$ $[(a-1)(2x-1)]$

365 $a^2x - a^2 - 4a - 3ax + 21$ $[(a-3)(ax-a-7)]$

366 $x^2 - xy - 6y^2 + ax + 2ay$ $[(x+2y)(x-3y+a)]$

367 $1 - 9x^2 - z^2 + 6xz$ $[(1-3x+z)(1+3x-z)]$

368 $y^2 + y(3b-2a) - 6ab$ $[(y-2a)(y+3b)]$

369 $a^2 + 9b^2 - c^2 - 6ab$ $[(a-3b-c)(a-3b+c)]$

370 $x^2 + 9 + 6x - y^2 + y - \frac{1}{4}$ $\left[\left(x-y+\frac{7}{2}\right)\left(x+y+\frac{5}{2}\right)\right]$

371 $4a^3c + 36ab^2c + 24a^2bc - 4ac^5$ $[4ac(a+3b-c^2)(a+3b+c^2)]$

372 $a^8 - 2a^4b^4 + b^8 - c^4$ $[(a^4-b^4-c^2)(a^4-b^4+c^2)]$

373 $a^2 - (x+y)a + xy$ $[(a-x)(a-y)]$

374 $8a^2x^3 - a^2 - 8x^3 + 1$ $[(a+1)(a-1)(2x-1)(4x^2+2x+1)]$

375 $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ $[(2x-1)^2(2x+1)]$

376 $x^3y^3 - 1 - x^2y + x$ $[(xy-1)(x^2y^2+xy+1-x)]$

377 $y^2 + 2ay + a^2 - x^2 + 2bx - b^2$ $[(y+a-x+b)(y+a+x-b)]$

378 $y^2 - (5a+3b)y + 15ab$ $[(y-5a)(y-3b)]$

379 $a^5x^2 - 32x^2b^5$ $[x^2(a-2b)(a^4+2a^3b+4a^2b^2+8ab^3+16b^4)]$

380 $3(x^2-1)^3 + 7(x^2-1)^2 + 4x^2 - 4$ $[x^2(3x^2+1)(x+1)(x-1)]$

381 $xy^4 - 13xy^2 + 36x$ $[x(y-3)(y+3)(y-2)(y+2)]$

382 $a^2x^3 - \frac{1}{8}a^2(1+x)^3$ $\left[\frac{1}{8}a^2(x-1)(7x^2+4x+1)\right]$

383 $y^4 - (a+2b)y^2 + 2ab$ $[(y^2-2b)(y^2-a)]$

384 $(2-x)^2 + 8 - x^3$ $[(2-x)(x^2+x+6)]$

385 $a^6 - 8a^3 + 7$ $[(a^3-7)(a-1)(a^2+a+1)]$

386 $3a^3 + 9a^2b + 9ab^2 + 3b^3$ $[3(a+b)^3]$

387 $(x-2)(x-3)^2 - 25xy^4 + 50y^4$ $[(x-2)(x-3-5y^2)(x-3+5y^2)]$

388 $2(x+y)a^2 - 3ab(x+y) - 5b^2x - 5b^2y$ $[(x+y)(2a-5b)(a+b)]$

389 $4a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^2xy + a^2z^2 + 4a^2xz - 2a^2yz$ $[a^2(2x-y+z)^2]$

390 $a^6 + 2a^5b - 5a^4b^2 - 6a^3b^3$ $[a^3(a+b)(a+3b)(a-2b)]$

391 $9a^2x^2 + a^2 - 6a^2x - y^2 - 9 + 6y$ $[[a(3x-1)+y-3][a(3x-1)-y+3]]$

392 $3ab - 3b - a^2 + 11a - 10$ $[(a-1)(3b-a+10)]$

393 $(2x-y)^2 - 5(2x-y) + 6$ $[(2x-y-3)(2x-y-2)]$

394 $8x^2 + 2y^2 + 18 + 8xy - 24x - 12y$ $[2(2x+y-3)^2]$

395 $a^2 - 4b^2 + a^2x + 4b^2x + 4abx$ $[(a+2b)(a-2b+ax+2bx)]$

CORREGGI GLI ERRORI

396 $\frac{1}{3}a^2y + 3 = 3(a^2y + 1)$

397 $a(x+1) + b(x-1) = (a+b)(x-1)$

398 $5(a+b)^2 - 3x(a+b)^3 = (a+b)^2(5-3x)$

399 $6x^4 + 9x^2 + 3 = 3x(2x^3 + 3x + 1)$

400 $3 + 3x + 6y = 3(x + 2y)$

401 $x(a-b) - y(b-a) = (a-b)(x-y)$

402 $4x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}y^2 = \left(2x + \frac{1}{3}y\right)^2$

403 $x^2 + y^2 = (x+y)(x+y)$

404 $2a^2 - 3a - 2 = a(2a-3) - 2 = (a-2)(2a-3)$

405 $\frac{1}{4}x^2 + 2xy + y^2 = \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2$

406 $y^2 + 2y^2t^2 + t^2 = (y+t)^2$

407 $a^2 + b^2 = (a+b)^2$

408 $a^3 - b^3 = (a-b)^3$

409 $9 - (x+y)^2 = (3 - x + y)(3 + x + y)$

410 $4x^2 - 2xy + y^2 = (2x-y)^2$

411 $\frac{9}{4}x^2 + 25y^2 + \frac{15}{2}xy = \left(\frac{3}{2}x + 5y\right)^2$

412 $y^3 - 3y^2x - 3yx^2 + x^3 = (y-x)^3$

413 $8x^3 - y^3 - 8x^2y + 4xy^2 = (2x-y)^3$

414 $a^3b^3 + 3a^2b^2 + 3ab - 1 = (ab-1)^3$

415 $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+1)$

416 $(x-y)(x^2 - 2xy + y^2) = (x-y)^3$

417 $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = (x-y)^3$

418 $x^2 - 8x + 12 = (x-4)(x-3)$

419 $x^2 - 9xy + 8y^2 = (x-4y)(x-2y)$

420 $x^3 - 8y^3 = (x-2y)(x^2 - 2y + 4y^2)$

421 $b^2 - 7b + 10 = (b-5)(b+2)$

422 $3(a+b)^3 + x(a+b)^2 + (a+b) = (a+b)[3(a+b)^2 + x(a+b)]$

423 $2(x-y)^5 - ab(x-y)^4 + (x-y) = (x-y)\left[2(x-y)^4 - ab(x-y)^3\right]$

424 $abx^2 - aby^2 + 3ab - b^2 = ab(x^2 - y^2 + 3 - b)$

425 $a(x+y) - (b+2)(x+y) = (x+y)(a-b+2)$

M.C.D. E m.c.m. TRA POLINOMI

la teoria è a pag. 17

Comprensione

426 Dati i polinomi $2ax \quad ax(x-a)^2 \quad x(x-a)(x+a)$:

a. il loro *M.C.D.* è: ① ax ② x ③ $x(x-a)$ ④ $(x-a)^2$

b. il loro *m.c.m.* è: ① $2ax(x-a)^2$ ② $ax(x+a)$ ③ $2ax(x-a)^2(x+a)$ ④ $(x-a)^2(x+a)$

427 Il *M.C.D.* fra due polinomi è $x(2x+y)$ ed il loro *m.c.m.* è $x(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)$; quali fra i seguenti possono essere i due polinomi?

a. $4x^2 - y^2$ e $8x^3 + y^3$ **b.** $8x^4 + xy^3$ e $2x^2 + xy$ **c.** $4x^2 + y^2 - 4xy$ e $2x^2 + xy$

Applicazione

Calcola il m.c.m. ed il M.C.D. fra i seguenti polinomi.

428 $x + 1$; $x^2 - 1$ [*m.c.m.* $(x-1)(x+1)$; *M.C.D.* $x+1$]

429 $2x-2y$; $x^2-2xy+y^2$ $[m.c.m.\ 2(x-y)^2;\ M.C.D.\ x-y]$

430 $9-a^2$; $3a^2+27-18a$ $[m.c.m.\ 3(a-3)^2(a+3);\ M.C.D.\ 3-a]$

431 $2a^3-2b^3+3a-3b$; $5a^2-5b^2$ $[m.c.m.\ 5(a-b)(a+b)(2a^2+2ab+2b^2+3);\ M.C.D.\ a-b]$

432 $\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}ay^2$; $3x^4-3y^4$ $[m.c.m.\ a(x^2+y^2)(x-y)(x+y);\ M.C.D.\ x^2+y^2]$

433 $3x+3y$; $5x^2-5y^2$; $ax+ay$ $[m.c.m.\ 15a(x-y)(x+y);\ M.C.D.\ x+y]$

434 x^2-25; $ax-5a$; $3x-15$ $[m.c.m.\ 3a(x-5)(x+5);\ M.C.D.\ x-5]$

435 $\frac{1}{9}-x^2$; $\frac{1}{12}-\frac{1}{4}x$; $x^2+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}x$ $\left[m.c.m.\ \left(\frac{1}{3}-x\right)^2\left(\frac{1}{3}+x\right);\ M.C.D.\ \frac{1}{3}-x\right]$

436 $3x+6a$; x^2-4a^2; $4x-8a$ $[m.c.m.\ 12(x+2a)(x-2a);\ M.C.D.\ 1]$

437 $2x^3+18xy^2+12x^2y$; x^3+27y^3; $4x+12y$ $[m.c.m.\ 4x(x+3y)^2(x^2-3xy+9y^2);\ M.C.D.\ x+3y]$

438 $4a^2b^2-a^2+4b^2-1$; $\frac{1}{25}a^2+\frac{1}{25}$; $2a^2b+2b-a^2-1$ $[m.c.m.\ (2b-1)(2b+1)(a^2+1);\ M.C.D.\ a^2+1]$

439 $b^3-9ab^2+27ba^2-27a^3$; $5b^2-45a^2$; $2b^2-12ab+18a^2$
$[m.c.m.\ 10(b-3a)^3(b+3a);\ M.C.D.\ b-3a]$

440 $54x^2+150y^2-180xy$; $9x^2-25y^2$; $6ax-10ay+6bx-10by$
$[m.c.m.\ 6(3x-5y)^2(3x+5y)(a+b);\ M.C.D.\ 3x-5y]$

441 $0{,}5x^2+\frac{1}{2}y^2+xy$; $0{,}\overline{3}x^2-\frac{1}{3}y^2$; $x^2+xy-x-y$
$[m.c.m.\ (x+y)^2(x-y)(x-1);\ M.C.D.\ x+y]$

442 a^2-4a-5; $4a^2+8a+4$; $a^2-7a+10$
$[m.c.m.\ 4(a-5)(a-2)(a+1)^2;\ M.C.D.\ 1]$

443 $2x-2x^3$; $\frac{1}{3}-0{,}\overline{3}x^4$; x^3-2x^2+x
$[m.c.m.\ x(1+x)(1+x^2)(1-x)^2;\ M.C.D.\ 1-x]$

444 $2x^3-2y^3+y^2(x-y)$; $2x^2-2xy$; $2xy-2y^2$
$[m.c.m.\ 2xy(x-y)(2x^2+2xy+3y^2);\ M.C.D.\ x-y]$

445 $10+10a^4b^4-20a^2b^2$; $5ab-5a^4b^4$; $1-a^3b^3-3ab+3a^2b^2$
$[m.c.m.\ 10ab(1-ab)^3(1+ab)^2(1+ab+a^2b^2);\ M.C.D.\ 1-ab]$

446 x^2-x-6; $2x^2-5x-3$; $8x^3-8x^2+12x+9$
$[m.c.m.\ (x-3)(x+2)(2x+1)(4x^2-6x+9);\ M.C.D.\ 1]$

447 $a^2+2ab-3b^2$; $a^2-9ab-36b^2$; $a^2+6ab+9b^2$
$[m.c.m.\ (a-b)(a-12b)(a+3b)^2;\ M.C.D.\ a+3b]$

448 $3ax+by+3ay+bx$; $27a^3+b^3$; $9a^2+b^2+6ab$
$[m.c.m.\ (3a+b)^2(x+y)(9a^2-3ab+b^2);\ M.C.D.\ 3a+b]$

449 $z^2 - 2z - 35;$ $\quad -2z^2 - 50 - 20z;$ $\quad z^3 + 3z^2 - 7z + 15$

$[m.c.m.\ 2(z-7)(z+5)^2(z^2-2z+3);\ M.C.D.\ z+5]$

450 $4ay^2 + 4ay + 4a;$ $\quad 4y^3 - 4;$ $\quad y^4 + y^2 + 1 + 2y^3 + 2y^2 + 2y$

$[m.c.m.\ 4a(y^2+y+1)^2(y-1);\ M.C.D.\ y^2+y+1]$

451 $a^4 + b^2 + 2a^2b - 9;$ $\quad 2a^3 + 2ab + 6a;$ $\quad a^4 + b^2 + 9 + 2a^2b - 6a^2 - 6b$

$[m.c.m.\ 2a(a^2+b+3)(a^2+b-3)^2;\ M.C.D.\ 1]$

ESERCIZI DI SINTESI E APPROFONDIMENTO

452 Per quale valore del parametro a i seguenti trinomi si possono scomporre nel prodotto di fattori di primo grado?

a. $x^2 + ax - 3$ $\quad[\pm 2]$

b. $x^2 + ax + 8$ $\quad[\pm 6,\ \pm 9]$

c. $x^2 + (a-1)x - 6$ $\quad[-4,\ 0,\ 2,\ 6]$

453 Dopo aver scomposto il polinomio $x^3 - kx^2 - 4x + 4k$, determina il valore di k per il quale la scomposizione contiene il quadrato di un binomio. $[k = \pm 2]$

454 La scomposizione di un polinomio è $(x - 2a + 1)(3a + x - 1)(x - a)$; rispondi alle seguenti domande:

a. esiste un valore del parametro a per il quale la scomposizione risulta $x(x-1)(x+1)$? $\quad[0]$

b. esiste un valore di a per il quale la scomposizione contiene il quadrato di un binomio? $\quad\left[1,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{5}\right]$

c. esiste un valore di a per il quale il polinomio rappresenta il cubo di un binomio? $\quad[\nexists a]$

455 Sono dati due numeri pari consecutivi; che relazione esiste fra la differenza dei loro quadrati e il numero dispari fra essi compreso? [è il quadruplo]

456 Trova il valore del parametro k per il quale i due polinomi $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$ e $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + k$ hanno un divisore della forma $(x - a)$ in comune. $[k = 4]$

457 Verifica che la differenza fra i cubi di due numeri pari consecutivi è sempre multipla di 8.

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **a.**, **b.**, **d.**	**2** **c.**	**3** **b.**, **c.**	**4** **a.**, **c.**	**76** **a.**, **c.**, **d.**, **f.**
77 **c.**	**78** *A.* ⑤, *B.* ⑦, *C.* ①	**185** **a.** −7, 2, **b.** −3, −1, **c.** +4, −2		**186** **a.**
187 **a.** ③, **b.** ④, **c.** ①, **d.** ②		**236** **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** V	**237** **c.**	
238 **a.**, **c.**	**239** **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** F	**240** **b.**	**241** *A.* ①, *B.* ⑤	
242 **a.** ②, ④, **b.** ②	**243** **a.**, **b.**	**426** **a.** ②, **b.** ③	**427** **b.**	

Sul sito www.edatlas.it *trovi...*

- esercizi tratti dalle gare di matematica
- i problemi di Matematica e realtà

Test finale

1 Scomponi i seguenti polinomi mediante raccoglimenti a fattor comune:

a. $9a^2b + 18ab^2 + 6ab$

b. $-8a^4y + 6a^3x - 12aby + 9bx$

c. $2ab + 2ac - 3bx - 3cx - by - cy$

0,25 punti per ogni esercizio

2 Scomponi i seguenti polinomi riconoscendo anche prodotti notevoli:

a. $2a^2 - 8ab + 8b^2$

b. $x^2 + 9y^2 + 4 - 6xy + 4x - 12y$

c. $a^5 - 81a$

d. $8a^3 - \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3}ax^2 - 4a^2x$

e. $16x^4 - 1$

0,25 punti per ogni esercizio

3 Scomponi ricordando le regole sul trinomio caratteristico e sulla divisibilità:

a. $x^2 - 8x - 20$

b. $6a^2 + a - 2$

c. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d. $8x^3 + \frac{1}{8}b^3$

0,25 punti per ogni esercizio

4 Scomponi i seguenti polinomi:

a. $xy^2 - 4xy - 21x$

b. $x^4 + 8xy^3$

c. $3a^3 - 2a^2 - 5a$

d. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

e. $y^3 - 6y^2 + 11y - 6$

f. $24x^3 + 36x^2y + 18xy^2 + 3y^3$

g. $3x^4 - 2x^2 - 1$

h. $2abx^2 - 4abx - 8ab - abx^3 + abx^4$

i. $a^4b - 6a^2b - 27b$

l. $x^5 + 2bx^4 - 8b^3x^2 - 16b^4x$

m. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

n. $8a^4 - 4a^3 - 6a^2 + 5a - 1$

0,5 punti per ogni esercizio

5 Calcola *M.C.D.* e *m.c.m.* fra i polinomi: $x^4 + 8x$ $\quad x^2 + 4 + 4x$ $\quad 3x^3 + 6x^2 - x - 2$

1 punto

Soluzioni

1 **a.** $3ab(3a+6b+2)$; **b.** $(2a^3+3b)(3x-4ay)$; **c.** $(b+c)(2a-3x-y)$

2 **a.** $2(a-2b)^2$; **b.** $(x-3y+2)^2$; **c.** $a(a-3)(a+3)(a^2+9)$; **d.** $\left(2a-\frac{1}{3}x\right)^3$;
e. $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$

3 **a.** $(x+2)(x-10)$; **b.** $(2a-1)(3a+2)$; **c.** $(x-1)(x+2)(x-3)$; **d.** $\left(2x+\frac{1}{2}b\right)\left(4x^2-xb+\frac{1}{4}b^2\right)$

4 **a.** $x(y+3)(y-7)$; **b.** $x(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$;
c. $a(a+1)(3a-5)$; **d.** $(x-1)(x+2)(2x+1)$;
e. $(y-1)(y-2)(y-3)$; **f.** $3(2x+y)^3$;
g. $(x-1)(x+1)(3x^2+1)$; **h.** $ab(x-2)(x+1)(x^2+4)$;
i. $b(a-3)(a+3)(a^2+3)$; **l.** $x(x+2b)(x-2b)(x^2+2bx+4b^2)$;
m. $(x-1)^2(x-2)(x+2)$; **n.** $(2a-1)^3(a+1)$.

5 *m.c.m.* $x(x+2)^2(x^2-2x+4)(3x^2-1)$; *M.C.D.* $x+2$

Esercizio	1	2	3	4	5	
Punteggio						

Valutazione in decimi