Applicazioni dell'integrale definito alla Fisica

Calcolo di una legge oraria

Quando del moto di un punto materiale è nota la funzione $a(t)$ dell'accelerazione, si può calcolare la variazione di velocità Δv in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ mediante la relazione

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

Sappiamo infatti che l'accelerazione è la derivata della funzione velocità, cioè $a(t) = v'(t)$; $v(t)$ è allora una primitiva di $a(t)$ e perciò, in base alla formula fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1) = \Delta v$$

Analogamente, se è nota la funzione $v(t)$ della velocità di un punto materiale, si può calcolare lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ mediante la relazione

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Per esempio, supponiamo di sapere che un punto materiale, partendo da fermo, si muove su una retta con un'accelerazione variabile nel tempo data, in m/s^2, dalla legge $a = \frac{1}{2}t + 1$. Ci chiediamo quale sia la velocità dopo 10 secondi dall'inizio del moto e quanto spazio sia stato percorso.

Fissando l'origine del sistema di riferimento all'istante $t = 0$, dopo 10 secondi la velocità del punto materiale è

$$v = \int_0^{10} \left(\frac{1}{2}t + 1\right)dt = \left[\frac{1}{4}t^2 + t\right]_0^{10} = 35\text{m/s}$$

Per trovare lo spazio percorso dobbiamo prima trovare la legge che esprime la velocità:

$$v(t) = \int \left(\frac{1}{2}t + 1\right)dt = \frac{1}{4}t^2 + t + c$$

e sapendo che all'istante $t = 0$ il corpo è fermo, cioè che $v(0) = 0$, troviamo che $c = 0$; la legge della velocità è quindi

$$v(t) = \frac{1}{4}t^2 + t$$

Lo spazio percorso in 10 secondi è quindi $s = \int_0^{10} \left(\frac{1}{4}t^2 + t\right)dt = \frac{400}{3} \approx 133\text{m}$

Potenza fornita da una corrente

La differenza di potenziale $V(t)$ applicata ad un circuito elettrico provoca in esso il passaggio di una corrente elettrica $i(t)$ capace di fornire al tempo t una potenza istantanea $P(t) = V(t) \cdot i(t)$.

Sappiamo poi che la potenza istantanea è il rapporto tra l'energia $W(t)$ sviluppata in un intervallo di tempo infinitesimo e l'intervallo stesso: $P(t) = \frac{dW(t)}{dt}$. Cioè $P(t) = W'(t)$.

Allora l'energia prodotta da tale corrente nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è data da:

$$W(t) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} V(t) \cdot i(t) dt$$

Quantità di carica

Sappiamo che in un determinato istante l'intensità di corrente elettrica $i(t)$ che attraversa un conduttore è data dal rapporto fra la quantità di carica infinitesima dq che transita attraverso una sua sezione S e l'intervallo di tempo infinitesimo dt nel quale la attraversa:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{cioè} \qquad i = q'(t)$$

Allora la carica elettrica q che attraversa la sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ vale:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$$

L'energia cinetica

Il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro fatto da una forza che agisce su un punto materiale è uguale alla variazione della sua energia cinetica (ricorda che l'energia cinetica di un corpo di massa m che ha velocità v è data da $\frac{1}{2} mv^2$). Dimostriamo questo teorema.

Nel caso di una forza $\boldsymbol{F}$ che vari in modulo ma non in direzione, il lavoro fatto da $\boldsymbol{F}$ per spostare il punto dalla posizione x_0 alla posizione x_1 è dato da

$$\int_{x_0}^{x_1} \boldsymbol{F}(x)\ dx$$

Dalla seconda legge della dinamica sappiamo che $\quad \boldsymbol{F} = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$

Allora, se v_0 e v_1 sono le velocità della particella nei punti x_0 e x_1:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \boldsymbol{F}(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_1} mv\frac{dv}{dx} dx = \int_{v_0}^{v_1} mv\ dv = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_0}^{v_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$