Approfondimento

Problemi sulle equazioni parametriche

Le soluzioni di un'equazione letterale sono funzioni dei parametri che in essa compaiono e ci si può chiedere per quali valori di tali parametri un'equazione ha delle soluzioni che soddisfano particolari condizioni.
Per esempio, data l'equazione

$$x^2 + (k-1)x - 2k = 0$$

ci interessa sapere per quali valori di k le soluzioni sono reali coincidenti.

Si potrebbero trovare le soluzioni in funzione del parametro k e poi imporre che siano uguali, ma è molto più semplice ragionare sul discriminante: un'equazione di secondo grado ammette soluzioni reali coincidenti se $\Delta = 0$. Calcoliamo allora il discriminante e poniamolo uguale a zero:

$$\Delta = (k-1)^2 + 8k = k^2 + 6k + 1 \quad \rightarrow \quad k^2 + 6k + 1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad k = -3 \pm \sqrt{9-1} = -3 \pm \sqrt{8} = \begin{cases} -3 - 2\sqrt{2} \\ -3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Otterremo quindi soluzioni coincidenti attribuendo a k i valori $-3 - 2\sqrt{2}$ oppure $-3 + 2\sqrt{2}$.

I problemi che coinvolgono le relazioni fra i parametri di un'equazione letterale e le sue soluzioni, che indicheremo sempre con x_1 e x_2, sono di diverso tipo; ce ne sono però alcuni che si possono risolvere facilmente applicando le relazioni fra i coefficienti dell'equazione e le sue soluzioni. Negli esempi che seguono ti presentiamo i casi più significativi.

I esempio

Data l'equazione parametrica $x^2 - (k-2)x + k + 1 = 0$ determiniamo i valori di k in modo che, essendo le soluzioni reali:

a. una radice sia l'opposto dell'altra

b. una radice sia uguale a 2

c. una radice sia inversa dell'altra

d. il prodotto delle radici sia uguale a -6.

La condizione che vale per tutti i casi è che le radici siano reali; imponiamo dunque che sia $\Delta \geq 0$ e risolviamo la disequazione ottenuta: $(k-2)^2 - 4(k+1) \geq 0 \quad \rightarrow \quad k^2 - 8k \geq 0 \quad \rightarrow \quad k(k-8) \geq 0$

Costruiamo la tabella dei segni di ciascun fattore della disequazione:

		0		8	
k	−	•	+		+
$k-8$	−		−	•	+
	+	•	−	•	+

Le soluzioni sono quindi reali se $k \leq 0 \ \vee \ k \geq 8$.

Analizziamo adesso le varie richieste tenendo presente che è $a = 1 \qquad b = 2 - k \qquad c = k + 1$.

a. Una radice è l'opposto dell'altra se $x_1 = -x_2$ cioè se $x_1 + x_2 = 0$.

Ma $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, basta quindi imporre che sia $k - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 2$

Per questo valore di k, tuttavia, le soluzioni non sono reali e quindi il problema non ha soluzioni.

b. Ricordiamo che *soluzione* di un'equazione è quel valore che sostituito all'incognita rende l'equazione una uguaglianza vera; basta allora sostituire 2 al posto di x e risolvere l'equazione in k così ottenuta:

$$4 - 2(k - 2) + k + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 9$$

Questa volta il valore trovato di k appartiene all'insieme definito dalla condizione di realtà delle radici ($9 > 8$) ed è quindi la soluzione del problema.

c. Una radice è inversa dell'altra se $\quad x_1 = \dfrac{1}{x_2} \quad$ cioè se $\quad x_1 \cdot x_2 = 1$

Ma $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$, basta quindi imporre che sia $\quad k + 1 = 1 \quad \rightarrow \quad k = 0$

Per questo valore di k le soluzioni sono reali e sono anche coincidenti; ne consegue che esse devono essere entrambe uguali a 1.

d. Deve essere $\dfrac{c}{a} = -6$ cioè $\quad k + 1 = -6 \quad \rightarrow \quad k = -7$

Anche questo valore di k è accettabile perché minore di 0.

II esempio

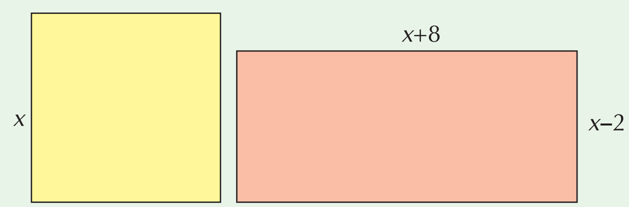
I lati di un rettangolo sono tali che la sua base supera di 8cm il lato di un quadrato e la sua altezza è uguale al lato dello stesso quadrato diminuito di 2cm. L'area del rettangolo è k volte l'area del quadrato. Quali valori può assumere il parametro k affinché il problema abbia soluzione?

Se indichiamo la misura del lato del quadrato con x, possiamo indicare la misura della base del rettangolo con $x + 8$ e quella della sua altezza con $x - 2$ (***figura 1***).

Esprimendo per mezzo di x la relazione fra le aree data dal problema, otteniamo

$$(x - 2)(x + 8) = kx^2$$

Figura 1



con la condizione $k > 0$, dovendo essere positiva l'espressione di un'area.

Svolgendo i calcoli otteniamo: $\quad kx^2 = x^2 - 2x + 8x - 16 \quad \longrightarrow \quad (k - 1)x^2 - 6x + 16 = 0$

Affinché il problema abbia soluzione occorre che sia $\triangle \geq 0$, quindi, usando la formula ridotta, abbiamo:

$$\frac{\triangle}{4} = 9 - 16(k - 1) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad 9 - 16k + 16 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad -16k + 25 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad k \leq \frac{25}{16}$$

In definitiva, tenendo conto della condizione iniziale, deve essere $0 < k \leq \dfrac{25}{16}$.

ESERCIZI

1 Data l'equazione $\dfrac{x(x - 1) - m - 1}{(x - 1)(m - 1)} = \dfrac{x}{m}$ determina il valore di m in modo che le sue soluzioni siano coincidenti. $\left[m = -\dfrac{1}{2}\right]$

2 Determina il valore del parametro k affinché l'equazione $x^2 + kx + 2k = 0$ abbia soluzioni reali. $[k \leq 0 \ \vee \ k \geq 8]$

3 Determina per quali valori di k l'equazione $(k+1)x^2 - (k-2)x + 1 = 0$ non ha soluzioni reali. $[0 < k < 8]$

4 Determina per quali valori di k l'equazione $kx^2 - (2k+1)x + k + 2 = 0$ ammette due soluzioni reali distinte. $\left[k < \frac{1}{4}\right]$

5 Determina per quali valori del parametro k le seguenti equazioni ammettono soluzioni reali:

a. $x^2 - 3x + k = 0$ $\left[k \leq \frac{9}{4}\right]$

b. $2x^2 - 5x - 2k = 0.$ $\left[k \geq -\frac{25}{16}\right]$

6 Determina per quali valori del parametro m le seguenti equazioni ammettono soluzioni non reali:

a. $2mx^2 - 3x + 1 = 0$ $\left[m > \frac{9}{8}\right]$

b. $x^2 - 2(m+1)x + 16 = 0.$ $[-5 < m < 3]$

Trova i valori dei parametri in modo che le soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni siano reali e soddisfino le condizioni indicate.

7 Data l'equazione $(a-2)x^2 + (a+1)x - a = 0$, determina per quali valori del parametro a essa ammette in R:

a. soluzioni coincidenti $\left[a = \frac{1}{5} \ \vee \ a = 1\right]$

b. una soluzione uguale a 2 $\left[a = \frac{6}{5}\right]$

c. due soluzioni opposte $[a = -1]$

d. una soluzione doppia dell'altra $\left[a = \frac{7 - 3\sqrt{3}}{11} \approx 0{,}16 \ \vee \ \frac{7 + 3\sqrt{3}}{11} \approx 1{,}11\right]$

8 Determina il valore del parametro b in modo che l'equazione $(b^2 - 4)x^2 - 2bx + 1 = 0$:

a. abbia il prodotto delle soluzioni uguale a $-\frac{9}{32}$ $\left[b = \pm\frac{2}{3}\right]$

b. abbia la somma dei reciproci delle soluzioni uguale a 4 $[\nexists b]$

c. abbia una soluzione uguale a 1 $[b = -1 \ \vee \ b = 3]$

d. sia di primo grado. $[b = 2 \vee \ b = -2]$

(Suggerimento: **b.** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ è la somma dei reciproci delle soluzioni che può anche essere scritta così $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$, quindi...)

9 Nell'equazione $x^2 - 2x + 3k = 0$, trova il valore del parametro k affinché:

a. le radici siano reali $\left[k \leq \frac{1}{3}\right]$

b. l'equazione sia di primo grado $[\nexists k \in R]$

c. la somma dei cubi delle radici sia uguale a 2 $\left[k = \frac{1}{3}\right]$
(Suggerimento: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$)

10 Data l'equazione $8x^2 - (k-1)x + k - 7 = 0$ ed indicate con x_1 e x_2 le sue soluzioni, determina il valore di k in modo che sia:

a. $x_1 = x_2$ **b.** $x_1 = -\frac{1}{x_2}$ [**a**. $k = 25 \vee k = 9$; **b**. $k = -1$]

c. $x_1 = -3$ **d.** $x_1 = -x_2$ $\left[\textbf{c}.\ k = -\frac{31}{2};\ \textbf{d}.\ k = 1\right]$

11 Nell'equazione $4x^2 - 4mx + m^2 - 9 = 0$, determina il valore del parametro m in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

a. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2}$ **b.** $x_1 = \frac{3}{4x_2}$ [**a**. $m = -9 \vee m = 1$; **b**. $m = \pm 2\sqrt{3}$]

c. $x_1 = 0$ **d.** $x_2 = 3x_1$ [**c**. $m = \pm 3$; **d**. $m = \pm 6$]

12 Nell'equazione $x^2 - (k+1)x + k = 0$, determina il valore del parametro k in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

a. $x_1 = x_2$ **b.** $x_2 - x_1 = 4$ **c.** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$ $\left[\textbf{a}.\ k = 1;\ \textbf{b}.\ k = -3 \vee k = 5;\ \textbf{c}.\ k = \frac{1}{2}\right]$

13 Nell'equazione $x^2 + 2(k-2)x + 1 = 0$ determina il valore del parametro k in modo che:

a. $x_1 = \frac{1}{2}$ **b.** $x_1 = 9 - x_2$ $\left[\textbf{a}.\ k = \frac{3}{4};\ \textbf{b}.\ k = -\frac{5}{2}\right]$

c. $x_1^2 + x_2^2 = 14$ **d.** $\frac{1}{x_1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{x_2}$ [**c**. $k = 0 \vee k = 4$; **d**. $\nexists k$]

14 Determina il valore del parametro k affinché l'equazione $kx^2 - (k-2)x + k - 1 = 0$ abbia:

a. radici coincidenti $\left[k = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

b. la somma delle radici uguale a 2 [$\nexists k$]

c. soluzioni reciproche [$\nexists k$]

d. la somma dei reciproci delle radici uguale a 3 $\left[k = \frac{1}{2}\right]$

15 Nell'equazione $(3-m)x^2 + 2(m+1)x - m - 3 = 0$ determina il valore del parametro m affinchè siano verificate le seguenti condizioni:

a. $x_1 = 4$ **b.** $x_1 = -x_2$ **c.** $x_1 = \frac{4}{x_2}$ $\left[\textbf{a}.\ m = \frac{53}{9};\ \textbf{b}.\ m = -1;\ \textbf{c}.\ m = 5\right]$

16 Data l'equazione $2ax^2 + x + a = 0$, determina il valore di a in modo che si abbia:

a. $x_1 = x_2$ **b.** $x_1 = \frac{1}{3}$ $\left[\textbf{a}.\ a = \pm\frac{\sqrt{2}}{4};\ \textbf{b}.\ a = -\frac{3}{11}\right]$

c. $x_1^2 + x_2^2 = 5$ **d.** $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2}$ $\left[\textbf{c}.\ a = \pm\frac{\sqrt{6}}{12};\ \textbf{d}.\ \nexists a\right]$

17 Data l'equazione $x^2 - (m-1)x - \frac{1}{4}(2m-1) = 0$ determina il valore di m in modo che:

a. $x_1 = 2x_2$ **b.** $x_1 = -x_2$ $\left[\textbf{a}.\ m = -\frac{1}{2} \vee m = \frac{1}{4};\ \textbf{b}.\ m = 1\right]$

c. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3}$ **d.** $|x_1 + x_2| = 6$ $\left[\textbf{c}.\ m = \frac{11}{10};\ \textbf{d}.\ m = -5 \vee m = 7\right]$

18 Data l'equazione $3kx^2 + (1-5k)x - 2(k+1) = 0$ determina il valore di k in modo che sia:

a. $x_1 = 0$ **b.** $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = -\frac{1}{2}$ **c.** $x_1 = 4 - x_2$ $\left[\text{a. } k=-1; \text{ b. } k=\frac{1}{3}; \text{ c. } k=-\frac{1}{7}\right]$

d. $x_2 = 1 + x_1$ **e.** $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{2}$ $\left[\text{d. } k=-\frac{1}{10} \vee k=-\frac{1}{4}; \text{ e. } k=-\frac{1}{7} \vee k=\frac{1}{5}\right]$

19 Data l'equazione $kx^2 - kx + k + 2 = 0$, determina il valore di k in modo che:

a. le soluzioni siano coincidenti $\left[k=-\frac{8}{3}\right]$

b. le soluzioni siano una doppia dell'altra $\left[k=-\frac{18}{7}\right]$

c. il prodotto delle soluzioni sia uguale alla metà della loro somma $[\nexists k]$

d. la somma delle soluzioni sia uguale a 1. $[\forall k \in R - \{0\}]$

20 Nell'equazione $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$, determina il valore del parametro k affinchè siano verificate le seguenti condizioni:

a. $3x_1x_2 = x_1 + x_2$ **b.** $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = \frac{2}{5}$ **c.** $x_1^2 + x_2^2 = 2$ $\left[\text{a. } k=1; \text{ b. } \nexists K \in R; \text{ c. } k=-\frac{1}{4}\right]$

21 Determina il valore del parametro k, affinchè l'equazione $(k-2)x^2 + (2k-3)x + 1 + k = 0$ abbia:

a. la somma degli inversi delle radici uguale a 1 $\left[k=\frac{2}{3}\right]$

b. la somma dei quadrati delle radici uguale a 2 $[\nexists k \in R]$

c. una soluzione sia l'opposto del doppio dell'altra. $\left[k=1 \vee k=\frac{16}{9}\right]$

22 Trova il valore di m in modo che l'equazione $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$:

a. abbia radici reali distinte $[\forall m \in R]$

b. abbia radici reali coincidenti $[\nexists m \in R]$

c. $x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 3x_2 = 0$ $\left[\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}\right]$

23 Trova i valori del parametro a per i quali l'equazione $(1-2a)x^2 + (2a+1)x - (2a-1) = 0$ soddisfa le seguenti condizioni:

a. $x_1 = -2$ **b.** $x_1x_2(x_1 + x_2) = 6$ **c.** $x_1 = 0 \wedge x_2 = 1$ $\left[\text{a. } a=\frac{3}{14}; \text{ b. } a=\frac{7}{10}; \text{ c. } \nexists a \in R\right]$

24 Nell'equazione $x^2 - (k+3)x + 3k = 0$ determina il valore del parametro k in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

a. $x_1 = \sqrt{2} - 1$ **b.** $x_1 + x_2 = \frac{x_1x_2}{5}$ **c.** $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2} = 7$

$\left[\text{a. } k=\sqrt{2}-1; \text{ b. } k=-\frac{15}{2}; \text{ c. } k=1 \vee k=2\right]$

25 Considerata l'equazione $(2-k)x^2 - 2(k+1)x - k = 0$, determina il valore del parametro reale k in modo che:

a. la somma delle radici sia maggiore di -3 $\left[-\frac{1}{4} \leq k < 2 \vee k > 8\right]$

b. il prodotto delle radici sia minore di 1 $\left[-\frac{1}{4} \leq k < 2\right]$

c. la somma dei reciproci delle radici sia maggiore di $\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{1}{4} \leq k < 0\right]$