

Le disequazioni in due variabili

Risolviamo la disequazione: $y \geq -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Disegniamo dapprima la parabola: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Essa divide il piano in due regioni α e β ; i punti P che appartengono alla regione α hanno un'ordinata maggiore dei punti Q aventi la stessa ascissa che si trovano sulla parabola, quelli R della regione β hanno un'ordinata minore (figura 1). Questo significa che la disequazione è soddisfatta da tutti e soli i punti di α .

In generale, per risolvere una disequazione in due variabili nella forma

$$f(x, y) \geq 0$$

si procede in questo modo, analogo a quello visto per le disequazioni lineari:

- si costruisce il grafico della relazione $f(x, y) = 0$ e si individuano le regioni del piano da essa delimitate
- si considera un punto $P(x_0, y_0)$ in una qualsiasi di tali regioni e si valuta $f(x_0, y_0)$
- se si ottiene una disuguaglianza vera, la regione delle soluzioni è quella che contiene il punto P (figura 2).

Vediamo qualche altro esempio.

- Risolviamo la disequazione $x^2 + 4y^2 - 4 > 0$.

Riscriviamo la disequazione nella forma $\frac{x^2}{4} + y^2 > 1$ ed associamo ad

essa l'equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ che rappresenta un'ellisse di semiassi 2 e

1. Poiché vogliamo che $\frac{x^2}{4} + y^2$ sia maggiore di 1, la regione delle so-

luzioni è costituita dai punti che si trovano all'esterno dell'ellisse, esclusi i punti di tale curva (figura 3).

Puoi verificarlo in modo molto semplice considerando un punto qualunque di questa regione, ad esempio il punto $P(1, 2)$, e verificando che le sue coordinate soddisfano la disequazione:

$$1 + 16 - 4 > 0$$

- Risolviamo la disequazione $x \geq y^2 - 1$.

L'equazione $x = y^2 - 1$ ad essa associata rappresenta una parabola con asse coincidente con l'asse x avente vertice nel punto $(-1, 0)$ (figura 4). I punti che si trovano nella regione in colore hanno, a parità di ordinata, una ascissa maggiore di quelli che si trovano sulla parabola;

Figura 1

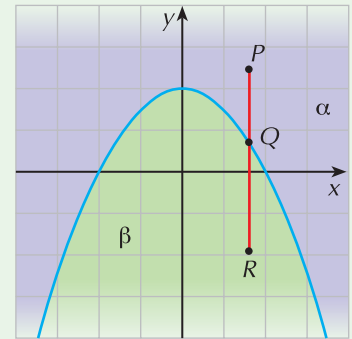


Figura 2

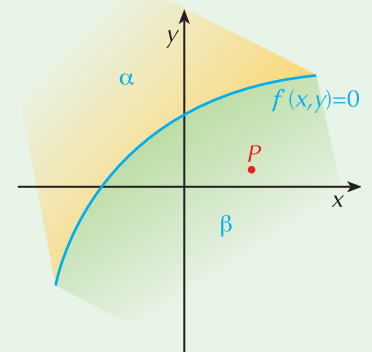


Figura 3

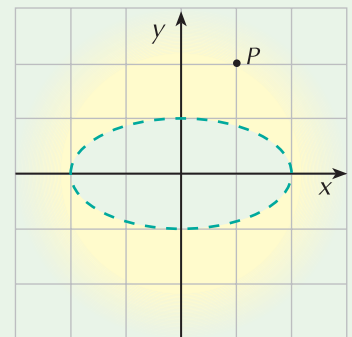
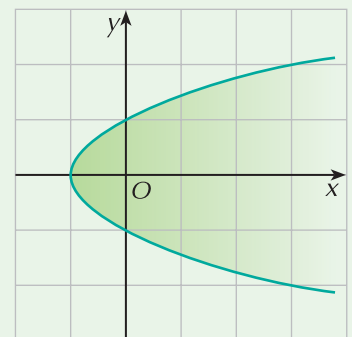


Figura 4



tale regione è dunque l'insieme dei punti che sono soluzione della disequazione data, compresi i punti della parabola stessa.

Puoi anche individuare l'insieme delle soluzioni considerando un punto di una delle due regioni, ad esempio l'origine: poiché le sue coordinate soddisfano la disequazione ($0 \geq -1$ è vero), questa è la regione cercata.

■ Risolviamo la disequazione $y \geq \sqrt{25 - x^2}$.

Rappresentiamo dapprima l'equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$.

Esistenza e concordanza di segno:

$$-5 \leq x \leq 5 \quad \wedge \quad y \geq 0$$

Eleviamo al quadrato:

$$y^2 = 25 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 25$$

La curva rappresenta la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 5 (**figura 5**).

La zona individuata dal dominio della funzione, cioè l'intervallo $[-5, 5]$, e dal semipiano delle y positive o nulle, rimane diviso in due parti.

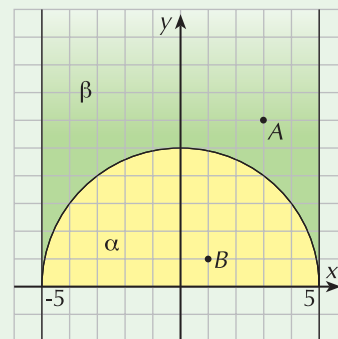
Prendiamo un punto in ciascuna zona, per esempio $A(3, 6)$ e $B(1, 1)$, e vediamo quale dei due soddisfa la disequazione:

$$A(3, 6): 6 \geq \sqrt{25 - 9} \quad \rightarrow \quad 6 \geq 4 \quad \text{vero}$$

$$B(1, 1): 1 \geq \sqrt{25 - 1} \quad \rightarrow \quad 1 \geq \sqrt{24} \quad \text{falso}$$

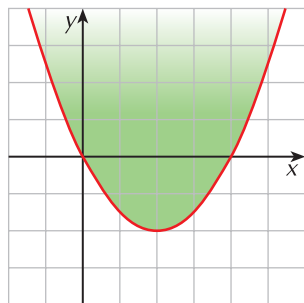
L'insieme delle soluzioni è quella rappresentata dalla regione β , compresi i punti della semicirconferenza.

Figura 5

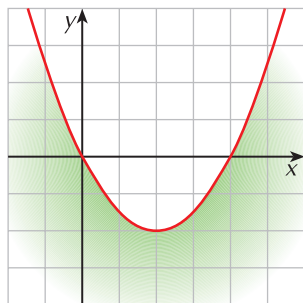


ESERCIZI

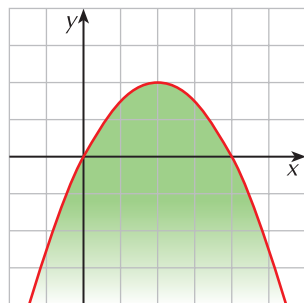
1 Individua fra i seguenti disegni quello che rappresenta correttamente la regione delle soluzioni della disequazione $x^2 - 4x - 2y > 0$.



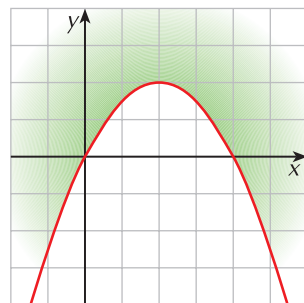
a.



b.



c.



d.

2 La disequazione $16 < x^2 + 4y^2$ è verificata dalla regione di piano che, rispetto all'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \text{ è formata dai punti:}$$

- a. che sono all'interno dell'ellisse esclusi i punti dell'ellisse
- b. che sono all'interno dell'ellisse compresi i punti dell'ellisse
- c. che sono all'esterno dell'ellisse compresi i punti dell'ellisse
- d. che sono all'esterno dell'ellisse esclusi i punti dell'ellisse.

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni non lineari in due variabili.

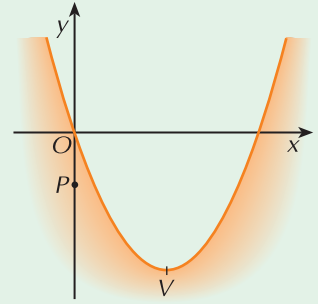
3 ESERCIZIO GUIDATO

$$x^2 - 3x - y \geq 0$$

Esplicitando rispetto a y riscriviamo la disequazione nella forma

$$y \leq x^2 - 3x$$

La parabola $y = x^2 - 3x$ ha vertice $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ e passa per l'origine degli assi. Scelto un punto in una delle due regioni, per esempio $P(0, -1)$, vediamo se le sue coordinate soddisfano la disequazione: $1 \geq 0$. La regione delle soluzioni è quindi quella che contiene P .



4 $y \geq 3 - x^2$

6 $6x - 4y^2 + 1 < 0$

8 $x^2 + 4y^2 \leq 1$

10 $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$

12 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 4 > 0$

14 $x^2 + y^2 - 2x + 4y \geq 0$

16 $y + 3x^2 - 12x > 0$

18 $y \leq \sqrt{x}$

20 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1$

22 $xy \leq 1$

24 $x^2 - y^2 \geq 4$

26 $x^2 + 49y^2 \leq 49$

28 $x^2 + y^2 + y - 1 \geq 0$

30 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 1 \geq 0$

32 $\frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1$

34 $x^2 + y^2 - 10y + 22 \geq 0$

36 $x^2 + y^2 - 2|x| - 4 \geq 0$

38 $|x^2 - y^2| > 1$

5 $x^2 + y^2 - 4x - 5 > 0$

7 $x^2 - y^2 > 3$

9 $y \geq \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

11 $y \leq \sqrt{1 - x^2} + 1$

13 $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 \leq 16$

15 $x^2 - y^2 \geq 9$

17 $x + 7y^2 - 14 \leq 0$

19 $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 \geq 0$

21 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{6} \geq 1$

23 $x^2 + y^2 - 3x - y \geq 3$

25 $y \geq \sqrt{x + 1}$

27 $9x^2 + y^2 \geq 9$

29 $y \leq 2\sqrt{3 - x^2}$

31 $x^2 - y - 5x + 6 \leq 0$

33 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} + 1 \geq 0$

35 $3x^2 - y^2 \leq 27$

37 $x^2 - y + |x - 1| < 0$

39 $|x^2 - 9y^2| < 4$