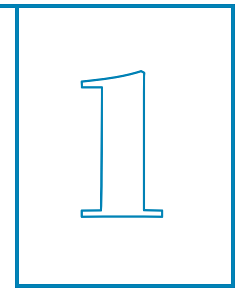
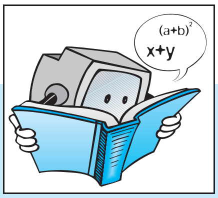


Gli insiemi



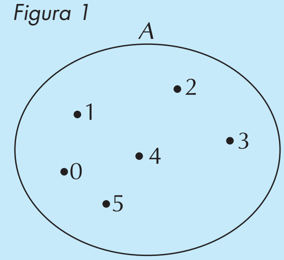
Per ricordare

★ Un **insieme** è un raggruppamento di oggetti, detti **elementi**, da considerarsi in modo collettivo; tali oggetti sono individuati mediante una proprietà che li accomuna, detta proprietà caratteristica.
Un insieme si indica con una lettera maiuscola dell'alfabeto, mentre i suoi elementi, quando intesi in senso generale, con una lettera minuscola.
Esso si può rappresentare:

- per elencazione, mediante l'elenco dei suoi elementi racchiusi in una parentesi graffa: $A = \{0,1,2,3,4,5\}$
- graficamente mediante i diagrammi di Eulero-Venn (***figura 1***)
- mediante la proprietà caratteristica dei suoi elementi: $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$

Un insieme che non contiene elementi si dice **insieme vuoto** e si indica con il simbolo $\varnothing$.

Figura 1

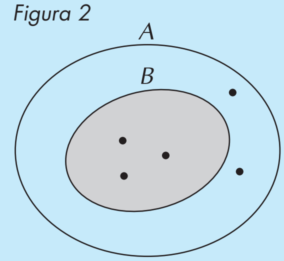


★ Se un insieme B ha come elementi alcuni (o tutti) gli elementi di un insieme A, si dice che B è **sottoinsieme** di A e si scrive:

- $B \subset A$ se c'è qualche elemento di A che non appartiene a B (***figura 2***)
- $B \subseteq A$ se non si può escludere a priori che B coincida con A.

Se $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{2,3,4\}$, allora $B \subset A$;
se $A = \{x \mid x \text{ è uno studente della 1A}\}$ e $B = \{y \mid y \text{ è uno studente maschio della 1A}\}$, allora $B \subseteq A$ perchè non si può escludere che nella 1A ci siano solo studenti maschi.
Quando B coincide con A oppure B è l'insieme vuoto, si dice che B è un **sottoinsieme improprio** di A; in tutti gli altri casi si parla di **sottoinsieme proprio**.
L'insieme che ha per elementi tutti i sottoinsiemi propri e impropri di un insieme A si chiama **insieme delle parti** di A e si indica con il simbolo $\mathscr{P}(A)$.

Figura 2



★ Fra due insiemi A e B si possono eseguire le seguenti operazioni:

- **intersezione** $A \cap B$: è l'insieme i cui elementi appartengono contemporaneamente ad A e a B (***figura 3***)
  Se $A \cap B = \varnothing$, si dice che A e B sono insiemi **disgiunti.**
- **unione** $A \cup B$: è l'insieme i cui elementi appartengono ad A, a B o ad entrambi (***figura 4***)

Figura 3

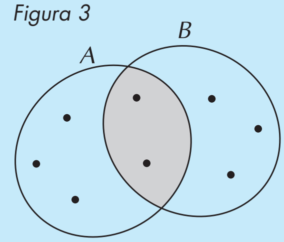
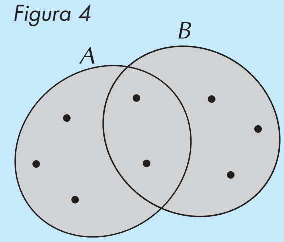


Figura 4



- **differenza** $A - B$: è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B (***figura 5***)

  Se B è sottoinsieme di A, l'insieme $A - B$ prende il nome di **insieme complementare** di B rispetto ad A e si indica con il simbolo $\overline{B}_A$ oppure semplicemente $\overline{B}$ quando è noto quale sia l'insieme A.
- **prodotto cartesiano** $A \times B$: è l'insieme delle coppie (x,y) che hanno come primo elemento un elemento di A e come secondo elemento un elemento di B : $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$

  Esso si rappresenta mediante una tabella a doppia entrata o graficamente nel piano cartesiano come in ***figura 6***.

Figura 5

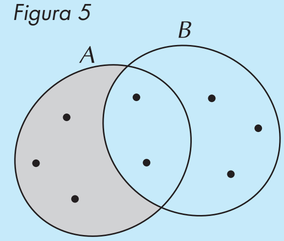
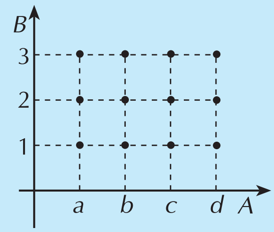


Figura 6



★ Se gli elementi di un insieme A possono essere ripartiti in n sottoinsiemi B_i in modo che:

- nessun sottoinsieme sia vuoto
- tutti i B_i siano a due a due disgiunti
- l'unione dei B_i sia l'insieme A

si dice che i B_i costituiscono una **partizione** dell'insieme A.

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

1 Rappresenta per elencazione e mediante la loro proprietà caratteristica i seguenti insiemi:

a. numeri interi compresi fra -2 e 5 o ad essi uguali
b. lettere della parola *insieme*
c. divisori di 30

2 Siano dati due insiemi qualsiasi A e B; se $A \cup B = A$ quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a. $A = \varnothing$ **b.** $B = \varnothing$ **c.** $A \cap B = B$ **d.** $B \subseteq A$ [**c.**, **d.**]

3 Siano dati due insiemi qualsiasi A e B; se $A \cap B = A$ quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a. $A \subseteq B$ **b.** $B \subseteq A$ **c.** $A \cup B = B$ **d.** $A = \varnothing$ [**a.**, **c.**]

4 Dati i generici insiemi A e B, se $A - B = \varnothing$ quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a. $A \subseteq B$ **b.** $B \subseteq A$ **c.** $A \cap B = A$ **d.** $A \cup B = B$ [**a.**, **c.**, **d.**]

5 Sia N l'insieme dei numeri naturali e Z l'insieme dei numeri interi relativi. Definisci

a. $Z \cap N$ **b.** $Z - N$ [**a.** numeri interi positivi o nulli; **b.** numeri interi negativi]

6 Dati i seguenti insiemi $A = \{x \in N \mid x > 3\}$, $B = \{x \in N \mid x < 22\}$, $C = \{x \in N \mid x \text{ è multiplo di } 5\}$, calcola:

a. $A \cup B$ **b.** $A \cap B$ **c.** $(A \cap B) \cap C$

[**a.** N; **b.** $\{x \in N \mid 3 < x < 22\}$; **c.** $\{5, 10, 15, 20\}$]

7 Dati gli insiemi $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 10, 15\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ calcola:

a. $A \cap B \cap C$ **b.** $(A \cap B) \cup C$ **c.** $(B - A) \cap C$ [**a.** $\varnothing$; **b.** $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$; **c.** $\{10\}$]

8 Dati gli insiemi $A = \{x \in N \mid x < 11 \text{ e } x \text{ è pari}\}$, $B = \{x \in N \mid 7 < x < 13\}$, $C = \{x \in N \mid x \text{ è divisore di } 12\}$ calcola:

a. $(A \cup B)$ **b.** $A \cap B$ **c.** $(A \cap C) \cap B$ **d.** $(B \cap C) \cup A$

[**a.** $\{0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$; **b.** $\{8, 10\}$; **c.** $\emptyset$; **d.** $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$]

9 L'insieme A ha 7 elementi mentre B ne ha 9. Se $A \cap B$ ha 3 elementi quanti elementi ha $A \cup B$? [13]

10 Sia N l'insieme dei numeri naturali, D l'insieme dei multipli di 2 e T l'insieme dei multipli di 3. Definisci:

a. $N - T - D$ **b.** $T \cap D$ [**a.** i naturali che non sono multipli nè di due nè di tre; **b.** i multipli di sei]

11 Considera l'insieme $A = \{x \in N \mid 4 \le x \le 20\}$ e i suoi sottoinsiemi B e C formati rispettivamente dai multipli di 3 e di 4, calcola:

a. $B \cap C$ **b.** $(A - B) - C$ **c.** $(A - C) \cap B$ **d.** $(A - B) \cap C$

[**a.** $\{12\}$; **b.** $\{5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19\}$; **c.** $\{6, 9, 15, 18\}$; **d.** $\{4, 8, 16, 20\}$]

12 Dati gli insiemi $A = \{x \in N \mid x \text{ è divisore di } 6\}$, $B = \{x \in Z \mid -1 \le x \le 1\}$, $C = \{1, 3, 7\}$, calcola:

a. $A \cup B$ **b.** $A \cap B \cap C$ **c.** $A - B$ **d.** $B - (A \cap C)$

[**a.** $\{-1, 0, 1, 2, 3, 6\}$; **b.** $\{1\}$; **c.** $\{2, 3, 6\}$; **d.** $\{-1, 0\}$]

13 Dati gli insiemi $A = \{x \in Z \mid -4 < x < 4\}$, $B = \{x \in N \mid x < 5\}$, $C = \{x \in Z \mid x \text{ è divisore di } 15\}$, calcola:

a. $(A \cup B) - C$ **b.** $A \cap B$ **c.** $C - A$ **d.** $(A - C) \cap B$

[**a.** $\{-2, 0, 2, 4\}$; **b.** $\{0, 1, 2, 3\}$; **c.** $\{-15, -5, 5, 15\}$; **d.** $\{0, 2\}$]

14 Dati gli insiemi $A = \{x \in N \mid x \text{ è divisore di } 9\}$, $B = \{x \in N \mid x \text{ è multiplo di } 5\}$, $C = \{x \in N \mid 5 \le x \le 10\}$, calcola:

a. $(A - C) \cap B$ **b.** $(A \cup B) \cap C$ **c.** $A \cap B$ **d.** $C - A$

[**a.** $\emptyset$; **b.** $\{5, 9, 10\}$; **c.** $\emptyset$; **d.** $\{5, 6, 7, 8, 10\}$]

15 Considera l'insieme $A = \{x \in N \mid 1 \le x \le 20\}$ e i suoi sottoinsiemi B e C formati rispettivamente dai multipli di 3 e di 5, calcola:

a. $B \cap C$ **b.** $(A - B) - C$ **c.** $(A - C) \cap B$ **d.** $(A - B) \cap C$

[**a.** $\{15\}$; **b.** $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19\}$; **c.** $\{3, 6, 9, 12, 18\}$; **d.** $\{5, 10, 20\}$]

16 Dati gli insiemi $A = \{x \in Z \mid -3 < x < 3\}$, $B = \{x \in N \mid x < 5\}$, $C = \{x \in Z \mid x \text{ è divisore di } 4\}$, calcola:

a. $A \cap B$ **b.** $C - A$ **c.** $(A - C) \cap B$ **d.** $(A \cup B) - C$

[**a.** $\{0, 1, 2\}$; **b.** $\{-4, 4\}$; **c.** $\{0\}$; **d.** $\{0, 3\}$]

17 Dati gli insiemi $A = \{x \in N \mid x \text{ è divisore di } 30\}$, $B = \{x \in N \mid x \text{ è multiplo di } 10\}$, $C = \{x \in N \mid 10 \le x \le 20\}$, calcola:

a. $A \cap B$ **b.** $(A \cup B) \cap C$ **c.** $A - B$ **d.** $(B \cap C) - A$

[**a.** $\{10, 30\}$; **b.** $\{10, 15, 20\}$; **c.** $\{1, 2, 3, 5, 6, 15\}$; **d.** $\{20\}$]

18 Dato l'insieme $A = \{3, 5, 8, 11, 14\}$ e il suo sottoinsieme $B = \{x \in A \mid x \text{ è pari}\}$, trova il complementare di B rispetto ad A. [$\{3, 5, 11\}$]

19 Dato l'insieme $A = \{2, 6, 7, 10, 13\}$ e il suo sottoinsieme $B = \{x \in A \mid x \text{ è primo}\}$, trova il complementare di B rispetto ad A. [$\{6, 10\}$]

20 Dato l'insieme $A = \{3, 5, 6, 8, 9\}$ e il suo sottoinsieme $B = \{x \in A \mid x \text{ è multiplo di } 3\}$, trova il complementare di B rispetto ad A. [$\{5, 8\}$]

21 Dato l'insieme $I = \{2, 3, 4, 9, 10\}$ stabilisci se si crea una partizione di I considerando i seguenti sottoinsiemi:

a. $A = \{x \in I \mid x \text{ è pari}\}$, $B = \{x \in I \mid x \text{ è dispari}\}$

b. $A = \{x \in I \mid x \text{ è multiplo di } 2\}$, $B = \{x \in I \mid x \text{ è primo}\}$

c. $A = \{x \in I \mid x \text{ è multiplo di } 2\}$, $B = \{x \in I \mid x \text{ è multiplo di } 3\}$

d. $A = \{x \in I \mid x \leq 3\}$, $B = \{x \in I \mid x \geq 3\}$ [si, no, si, no]

22 Dati i due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ costruisci $A \times B$ e rappresenta i suoi elementi in tutti i modi che conosci. $[\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}]$

23 Sia $A \times B = \{(2,1), (2,4), (3,1), (3,4)\}$, risali ad A e B. $[A = \{2,3\}, B = \{1,4\}]$

24 A e B sono due insiemi composti da sei uomini e quattro donne rispettivamente; in quanti modi si possono formare quattro coppie? [24]

25 Due gruppi di 4 tennisti ciascuno vogliono sfidarsi. Se ogni tennista di un gruppo deve incontrare tutti i tennisti dell'altro gruppo una sola volta, quante sfide ci saranno? Come si possono rappresentare tali sfide e che operazione insiemistica ti può aiutare? [16]

26 Dato $A = \{1, 2, 3\}$ scrivi l'insieme delle parti di A. $[\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}]$

27 Scrivi l'insieme A che ha come insieme delle parti $\{\emptyset, \{4\}, A, \{7\}\}$. $[\{4,7\}]$

28 Scrivi l'insieme A che ha come insieme delle parti $\{\{5\}, \{6\}, A, \{5,2\}, \emptyset, \{2\}, \{6,5\}, \{2,6\}\}$. $[\{2,5,6\}]$

Esercizi di Approfondimento

1 Rappresenta per elencazione i seguenti insiemi:

a. $A = \{x \in N \mid x = 2n - 5, 1 \leq n \leq 10, n \in N\}$

b. $B = \left\{x \in Z \mid x = n^2 - 2n + 3, n \leq 8, n \in N\right\}$

c. $C = \left\{x \in Q \mid x = \dfrac{a+1}{a-8}, -4 \leq a < 5, a \in Z\right\}$

2 Stabilisci se sono vere o false le seguenti relazioni:

a. $\{1, 0\} = \{0, 1\}$ V F

b. $\{(2,3)\} = \{2\} \times \{3\}$ V F

c. $\{(2,3), (3,2)\} = \{2\} \times \{3\}$ V F

d. $\{1, 7\} = (1, 7)$ V F

e. $0 \in \emptyset$ V F

[V, V, F, F, F]

3 Dato l'insieme $A = \{x \in Z \mid x = 15 - 3n, n \in N\}$, stabilisci quali fra le seguenti relazioni sono vere:

a. $-12 \in A$ **b.** $\{6\} \in A$ **c.** $\emptyset \subset A$

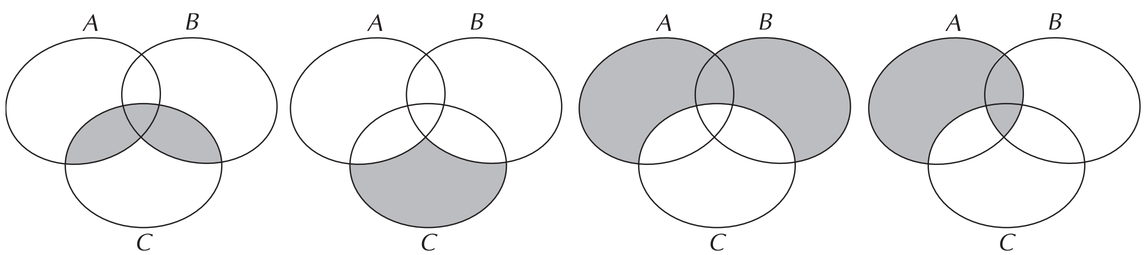
d. $\{0, 6\} \subset A$ **e.** $A \subset \{\text{multipli di 3 positivi e negativi}\}$ [**a.**, **d.**, **e.**]

4 Con riferimento ad una certa scuola primaria, definiamo A l'insieme degli alunni di tutte le prime, B l'insieme di tutti gli alunni maschi, C l'insieme degli alunni della prima A. Indica quali sono gli elementi dei seguenti insiemi:

a. $A \cap B$ **b.** $A \cup C$ **c.** $A - C$ **d.** $\overline{A} \cap B$
e. $C \cap \overline{B}$ **f.** $\overline{A \cup B}$ **g.** $A \cap B \cap C$ **h.** $B \cup C$

[**a**. gli alunni maschi di tutte le prime; **b**. gli alunni di tutte le prime;
c. gli alunni di tutte le prime tranne la prima A; **d**. gli alunni maschi che non sono in prima;
e. le alunne femmine della prima A; **f**. le alunne femmine che non sono in prima;
g. gli alunni maschi della prima A; **h**. gli alunni che sono maschi, sono in prima A o entrambi]

5 Dati tre insiemi A, B, C esprimi in termini insiemistici le parti indicate nelle seguenti figure:



$[(A \cap C) \cup (B \cap C); C - (A \cup B); (A \cup B) - C; (A - C) \cup (A \cap B)]$

6 Dati i generici insiemi A e B, sappiamo che $A \subset B$ e che $A \cap B = \varnothing$. Indica quali fra le seguenti affermazioni sono vere.

a. $A = B$ **b.** $A = \varnothing$ **c.** $B = \varnothing$ **d.** $(B - A) = B$ [**b**., **d**.]

7 E' dato un insieme A di palline; definiamo i seguenti sottoinsiemi di A: B è l'insieme delle palline rosse, C l'insieme delle palline nere, D l'insieme delle palline di vetro.

1. Esprimi in termini insiemistici:
a. l'insieme delle palline di vetro rosse
b. l'insieme delle palline nere non di vetro
c. l'insieme delle palline nè rosse nè di vetro
d. l'insieme delle palline di vetro nè rosse nè nere. $[B \cap D,\ C - D,\ A - (B \cup D),\ D - (B \cup C)]$

2. Esprimi tramite relazioni insiemistiche i seguenti fatti relativi all'insieme A di palline:
a. esistono solo palline rosse o nere
b. non esistono palline nere di vetro
c. tutte le palline di vetro sono nere. $[B \cup C = A,\ C \cap D = \varnothing,\ D \subseteq C]$

3. Esprimi tramite relazioni insiemistiche i seguenti fatti relativi all'insieme A di palline:
a. esiste almeno una pallina di un colore diverso dal rosso e dal nero
b. tutte le palline rosse sono di vetro
c. esistono solo palline di vetro. $[(B \cup C) \subset A,\ B \subseteq D,\ A = D]$

8 Uno studio effettuato su un campione di 100 abitanti ha rivelato che in una grande città gli spostamenti avvengono nel modo seguente: 10 si spostano solo a piedi, 30 usano solo la macchina, 10 usano i mezzi pubblici o si spostano a piedi, 5 si spostano indifferentemente nelle tre modalità (piedi, mezzi o macchina), 15 usano solo i mezzi, 50 usano solo i mezzi o i mezzi combinati con un'altra modalità di spostamento. Rappresenta la situazione mediante opportuni insiemi e calcola:

a. quanti usano macchina e mezzi pubblici [20]
b. quanti si spostano in macchina e a piedi. [10]

9 Un magazzino di bottiglie d'acqua è così composto (esiste solo acqua frizzante o naturale, in bottiglie di plastica o di vetro): 500 bottiglie di acqua naturale, 600 bottiglie di vetro, 1000 bottiglie totali, 200 bottiglie in plastica di acqua frizzante.
Rappresenta la situazione mediante opportuni insiemi e calcola:

a. quante bottiglie in vetro di acqua naturale ci sono [300]

b. quante bottiglie in vetro di acqua frizzante ci sono [300]

c. quante bottiglie in plastica di acqua naturale ci sono [200]

d. quante bottiglie in plastica ci sono. [400]

10 In un grande albergo, a pranzo, i 110 clienti si comportano nel modo seguente: 40 prendono solo il secondo, 10 prendono primo, secondo e dolce, nessuno prende solo il dolce, il dolce lo prendono in 28, secondo e dolce lo prendono in 25, il secondo lo prendono in 95. Calcola:

a. quanti prendono solo il primo [12]

b. quanti primi bisogna preparare [55]

c. quanti prendono solo primo e dolce. [3]

11 Di un gruppo di 81 ragazzi si sa che: 10 femmine praticano nuoto, 20 fra maschi e femmine praticano solo tennis, 2 femmine praticano sia tennis che nuoto, 5 maschi praticano sia tennis che nuoto, 15 maschi praticano solo tennis, 30 maschi praticano tennis, nuoto o entrambi. Il numero di maschi che non praticano nè tennis nè nuoto è lo stesso di quello delle femmine. Calcola:

a. quanti maschi praticano solo nuoto [10]

b. quante femmine praticano solo nuoto [8]

c. quanti maschi non praticano nè tennis nè nuoto [18]

d. quante femmine ci sono nel gruppo considerato. [33]

12 Siano A l'insieme dei libri di Mario, B l'insieme dei libri che Mario ha letto (anche senza possederli) e C l'insieme dei libri di Mario che Mario ha prestato a Luca. Dopo aver rappresentato la situazione con un diagramma di Eulero-Venn, individua mediante notazione insiemistica:

a. i libri di Mario che Mario ha letto

b. i libri non suoi che Mario ha letto

c. i libri che Mario ha prestato a Luca senza averli letti

d. i libri di Mario che Mario non ha nè letto nè prestato a Luca.

[$A \cap B, B - A, C - B, A - B - C$]

13 Se A è l'insieme degli abitanti della Toscana, B quello degli abitanti della Lombardia e C quello degli italiani con meno di quarant'anni, rappresenta con la notazione insiemistica:

a. toscani o lombardi

b. toscani con meno di quarant'anni

c. toscani con più di quarant'anni

d. toscani o lombardi con più di quarant'anni. [$A \cup B, A \cap C, A - C, (A \cup B) - C$]

14 Stabilisci quali fra le seguenti relazioni sono vere:

a. $\{x \in Z \mid x = 4 - 2n, n > 1, n \in N\} \subset \left\{y \in Q \mid y < \dfrac{1}{2}\right\}$

b. $\{0, 1\} \times \{x \in N \mid x = 2n - 1, n = 1, 2\} = \{(0, 1), (0, 3), (1, 3)\}$

c. $\{0, 8\} \in \mathscr{P}(A)$ essendo $A = \{x \in N \mid x = n^2 - 2n, n \leq 4, n \in N\}$

d. $\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}\right\} \subseteq \mathscr{P}(A)$ essendo $A = \left\{x \in Q \mid x = \dfrac{1}{n-1}, 3 < n \leq 8, n \in N\right\}$ [**a.**, **c.**]