Concetti chiave e regole

Le equazioni polinomiali di grado superiore al secondo

Ogni equazione polinomiale del tipo $E(x) = 0$ di grado $n > 2$ si può risolvere solo se il polinomio $E(x)$ è scomponibile in fattori al più di secondo grado; in tal caso, per trovare le soluzioni, si applica la legge di annullamento del prodotto.

Equazioni particolari

Fra le equazioni di grado superiore al secondo ve ne sono alcune che si risolvono con metodi particolari.

- Le equazioni **binomie** sono riconducibili alla forma $x^n = k$ e per risolverle si applica la definizione di radicale algebrico:

  se n è pari e $k \geq 0$ $\quad |x| = \sqrt[n]{k} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt[n]{k}$

  se n è pari e $k < 0$ $\quad$ l'equazione è impossibile

  se n è dispari $\quad x = \sqrt[n]{k}$

- Le equazioni **trinomie** sono riconducibili alla forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ e per risolverle si opera la sostituzione $x^n = t$.
  Nel caso in cui $n = 2$ l'equazione si dice **biquadratica**.

- Le equazioni **reciproche** hanno la caratteristica di avere i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi che sono uguali oppure opposti; di esse si può dire che, se ammettono la soluzione k, ammettono anche la soluzione $\frac{1}{k}$.
  Le equazioni di grado dispari e quelle di grado pari in cui manca il termine centrale ammettono sempre la soluzione 1 oppure -1.
  Le equazioni di quarto grado complete della forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ si risolvono in questo modo:

  - si dividono entrambi i membri per x^2: $\quad ax^2 + bx + c + \dfrac{b}{x} + \dfrac{a}{x^2} = 0$
  - si raccoglie a fattor comune fra i termini di uguale coefficiente: $\quad a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + c = 0$
  - si operano le sostituzioni: $\quad x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2 \quad$ e $\quad x + \dfrac{1}{x} = t$
  - dopo aver risolto l'equazione in t si torna alla variabile x operando la sostituzione inversa.

Disequazioni binomie e trinomie

Sono disequazioni della forma $x^n > a$ e $x^n < a$; per risolverle distinguiamo due casi:

- se n è pari e $a > 0$: $\quad x^n > a$ è equivalente a $|x| > \sqrt[n]{a} \quad \rightarrow \quad x < -\sqrt[n]{a} \vee x > \sqrt[n]{a}$

  $x^n < a$ è equivalente a $|x| < \sqrt[n]{a} \quad \rightarrow \quad -\sqrt[n]{a} < x < \sqrt[n]{a}$

- se n è dispari: $\quad x^n > a$ è equivalente a $x > \sqrt[n]{a}$

  $x^n < a$ è equivalente a $x < \sqrt[n]{a}$.

La disequazione trinomia $ax^{2n} + bx^n + c \gtrless 0$ si risolve ponendo $x^n = t$. Trovate le soluzioni in t, si opera la sostituzione inversa e si risolvono le disequazioni ottenute.

Le equazioni irrazionali

Un'equazione è **irrazionale** se l'incognita fa parte dell'argomento di un radicale.

- Le equazioni della forma $\sqrt{A(x)} = B(x)$ si possono risolvere in due modi:
  - risolvendo l'equazione $A(x) = [B(x)]^2$ e procedendo alla verifica delle soluzioni
  - risolvendo l'equazione $A(x) = [B(x)]^2$ con la condizione $B(x) \geq 0$.
- Le equazioni della forma $\sqrt[3]{A(x)} = B(x)$ sono sempre equivalenti all'equazione $A(x) = [B(x)]^3$.

Disequazioni irrazionali

- La disequazione $\sqrt[3]{A(x)} \gtreqless B(x)$ è equivalente a $A(x) \gtreqless [B(x)]^3$
- La disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$ è equivalente al sistema $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$
- La disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è equivalente ai due sistemi $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$

Sistemi non lineari

Un sistema è non lineare se almeno una delle sue equazioni è di grado superiore al primo. In particolare:

- in un **sistema di secondo grado** tutte le equazioni sono di primo grado tranne una che è di secondo.

Per risolvere un sistema non lineare si applicano i due principi di sostituzione e/o di riduzione; se il sistema è di secondo grado conviene ricavare l'espressione di una variabile da una delle equazioni di primo grado e sostituire in tutte le altre.

Sistemi simmetrici

Un sistema si dice **simmetrico** se, scambiando fra loro le incognite, si ottiene ancora il sistema dato; la sua caratteristica è che, se ammette come soluzione la coppia (a, b), allora ammette anche la coppia (b, a).

Un sistema simmetrico di secondo grado si può sempre ricondurre alla forma

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

e per trovare le sue soluzioni si può risolvere l'equazione di secondo grado $t^2 - st + p = 0$; in questo caso le soluzioni del sistema sono le coppie $(t_1, t_2) \vee (t_2, t_1)$ dove t_1 e t_2 sono le soluzioni dell'equazione in t.
Per sistemi simmetrici che si presentano in forme diverse è utile ricordare le seguenti relazioni:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \qquad \text{e} \qquad x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

Sistemi omogenei

Un sistema si dice **omogeneo** se si può scrivere nella forma $\begin{cases} P(x, y) = h \\ Q(x, y) = k \end{cases}$ dove P e Q sono polinomi omogenei nelle variabili x e y.

In particolare, un sistema omogeneo di quarto grado assume la forma $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$

Per risolvere questo sistema si opera la sostituzione $y = xt$ in entrambe le equazioni. A seconda del valore di d e d' si seguono poi due procedure diverse.

- ***I caso:*** $d \neq 0 \vee d' \neq 0$
  – Si dividono membro a membro le due equazioni e si risolve l'equazione di secondo grado nella variabile t così ottenuta (siano t_1 e t_2 le due radici)

– Si opera la sostituzione inversa e si ricavano le due equazioni $y = t_1 x \quad \vee \quad y = t_2 x$

– Si risolvono i due sistemi $\begin{cases} y = t_1 x \\ ax^2 + bxy + cy^2 = d \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = t_2 x \\ ax^2 + bxy + cy^2 = d \end{cases}$

(la seconda equazione è una delle due del sistema dato).

- ***II caso:*** $d = d' = 0$

  Il sistema ammette sempre come soluzione la coppia (0, 0); per trovare le altre:

  – si raccoglie x^2 a fattor comune in entrambe le equazioni

  – si trovano le soluzioni comuni delle due equazioni in t ottenute

  – si opera la sostituzione inversa.